数学题解辞典

初等微积分

SHUXUE
TIJIE
CIDIAN

上海辞书出版社

数学题解辞典

·初等微积分·

上海辞书出版社

(沪)新登字 110 号

封面设计：江小铎

数学题解辞典

(初等微积分)

唐秀颖　主编

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路 457 号　邮政编码 200040)

上海辞书出版社发行所发行　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 31.25　插页 5　字数 758000

1992 年 12 月第 1 版　1996 年 5 月第 4 次印刷

印数 15001—23000

ISBN 7-5326-0175-7/O·11

定价：30.70 元

数学题解辞典编辑委员会

顾　　问　赵宪初

主　　编　唐秀颖

副 主 编　鲍志新　夏明德

编辑委员　（按姓氏笔画为序）

陈振宣　郁　桢　*欧阳光中　顾鸿达

章景翰　*曾　容

主要编写人

欧阳光中　曾　容　康士凯

插　　图　朱恩源

责任编辑　杨泰俊　陈为众　陈少兰

注：有＊号者为本书责任编委

前　言

随着科学文化事业的发展，广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书．鉴于建国四十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，遵照原教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神，编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典．为此，我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书．

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷．主要供中等学校数学教师教学、进修时使用，也可供数学爱好者及中等学校学生参考．

编纂本辞典时，力求贯彻下列要求：

1．重视提高解题的分析能力．释文着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且学会思考问题的方法．

2．注重题材的广泛性和代表性．选题时，注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目，我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题，以及中学数学范围内传统的著名题，特别是在教学实践中有助于固巩数学概念、富于思考性的自编题．此外，还酌收少量一

般教材中常见的典型题.

3．注意题材归类，以典型带一般．题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，加以分析说明，使读者举一反三，触类旁通.

由于我们水平有限，虽经努力，但上述编纂要求未必都能达到，选材和释文也可能有疏漏和不当之处，热诚地欢迎读者批评指正．

数学题解辞典编辑委员会

1990 年 9 月

凡　例

1. 本书分极限、函数的连续性、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、级数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、常微分方程九章，共收录各类初等微积分题目一千五百余道. 正文后附录微积分简史和汉英对照微积分名词.

2. 题目按学科知识体系的章节分类分组编排. 正文前刊有按类组形式编制的详细目录.

3. 在各章开头用双线相隔的部分，是解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按序列出，作为解题的依据.

4. 题目解答一般是一题一解，部分题目有其他较好解法的，则一题多解，分别列出. 本书中已收录题目的结论，在其他题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”.

5. 对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广. 在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效.

6. 本书插图一百六十余幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2…….

目　　录

第一章　极　　限

第二章　函数的连续性

第三章　导数与微分

第四章 不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　级　　数

第七章　多元函数微分学及其应用

第八章 重积分、曲线积分和曲面积分

第九章　常微分方程

第一章　极　　限

1．数列的极限

对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$．则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，收敛于 a，或称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限．记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$．特别若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则称 $\{a_n\}$ 是无穷小量．

2．数列收敛的判别法

(1) 迫敛性　若存在 N，当 $n>N$ 时，有 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，并且

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=a,\quad 则\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(2) 单调有界数列　单调有界数列必收敛．

3．数列极限的柯西准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对一切自然数 p 有 $|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon$．

4．收敛数列的性质

(1) 唯一性　若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限是唯一的．

(2) 有界性　若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界，即存在正数 M，对任意自然数 n 有 $|a_n|<M$．

(3) 不等式　若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a>b$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n>b_n$．

(4) 施笃兹定理　若数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 满足：

(i) 存在 N，当 $n>N$ 时，有 $b_{n+1}>b_n$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$（$l$ 有限或无限）则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

5. 数列极限的运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $\quad (\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$.

6. 函数在 $x=x_0$ 点的极限.

对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处收敛于 A, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

7. 函数在 $x=x_0$ 点的单侧极限

对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<x-x_0<\delta$（或 $0<x_0-x<\delta$）时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处存在右(左)极限，其右(左)极限为 A, 记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=A).$$

8. 在 $x=x_0$ 点函数极限的柯西准则

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对属定义域的 x'、x'', 当满足 $0<|x'-x_0|<\delta$ 和 $0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

9. 函数极限的性质

(1) 唯一性　若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点存在极限，则它的极限

是唯一的.

(2) 局部有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, 则存在某个 $\delta_0>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时, 有 $|f(x)|<M$, 其中 M 是正数.

10. 函数极限的运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $\quad(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$.

11. 函数极限和数列极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在的充分必要条件是: 对任意数列 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\ x_n\neq x_0,\quad 有\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

12. 无穷大量

(1) 数列的无穷大 对任给 $M>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|>M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为无穷大量, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

(2) 函数的无穷大 对任给 $M>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点趋无穷大, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

13. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

14. 无穷小量(无穷大量)的阶

设 $x\to 0$, $y\to 0$,

(1) 若 $\frac{y}{x}\to 0$, 则称 y 是关于 x 的高阶无穷小量.

(2) 若存在常数 $c_1>0$, $c_2>0$, 使 $c_1\leqslant\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant c_2$, 则称 x, y 是同阶无穷小量. 特别,若 $\frac{y}{x}\to a\neq 0$, 则 x, y 是同阶无穷小量. 当 $a=1$ 时,则称 x, y 是等价无穷小量. 记作 $x\sim y$.

(3) 若 $\frac{y}{x^\alpha}\to a$, $a\neq 0$ 且 $\alpha>0$, 则称 y 是关于 x 的 α 阶无穷小量.

对无穷大量,有完全类似的定义.

§1. 数列的极限

(1) 数列极限的概念

1. 对于数列 $\{a_n\}$ 与常数 A, 下列各种说法是否正确,试说明之. (1) 若 a_n 越来越接近 A; (2) $|a_n-A|$ 越来越小; (3) 若 $|a_n-A|$ 越来越接近零,则 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

［解］ 以上三种说法都不正确. 例如

(1) 当 $a_n=\frac{1}{n}$, $A=-1$ 时;

(2) 当 $a_n=-\frac{1}{n}$, $A=1$ 时;

(3) 当 $a_n=\frac{n+100}{100n}$, $A=0$ 时;

分别符合所说的情况,但 A 不是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

2. 以下几种叙述与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义是否等价,试说明之:

(1) 对任给 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$|a_n-a|\leqslant\varepsilon;$$

(2) 对任给 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

(3) 对任给自然数 K, 总存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\frac{1}{K};$$

(4) 对无限多个 $\varepsilon>0$ 中的每一个 ε 都存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$;

(5) 对任给 $\varepsilon>0$, 总存在实数 A, 当 $n>A$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon;$$

(6) 对任给 $\varepsilon>0$, 总存在无限多项 a_n, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$;

(7) 对任给 $\varepsilon>0$, 只有有限项 a_n 位于 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之外.

[解] (1) 等价. 由于 ε 的任意性和 N 的不唯一性,所以等价.

(2) 等价. 由于 ε 的任意性,所以等价.

(3) 等价. 由于 K 的任意性,可使 $\frac{1}{K}$ 为任意小的正数,所以等价.

(4) 不等价. 无限多个 $\varepsilon>0$, 可以取无限多个大于 1 的 ε, 不含任意小的意思,故无限多个 $\varepsilon>0$ 并不等价任意的 $\varepsilon>0$.

(5) 等价. 因实数 A 的存在确保 N 的存在,所以等价.

(6) 不等价. 无限多项 a_n 不等价于 N 以后一切项(即 $n>N$) 的说法.

(7) 等价. 此说明某一项以后的一切项在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内, 即等价于 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

3. 设数列 $x_n=\frac{n}{2n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$,

(1) 求项数 N, 使得 $n>N$ 时, $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|$ 小于 0.1、0.01、0.001;

(2) 这样的项数 N 唯一吗?

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

［解］ (1) $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}$. (i) 由 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.1$，即 $\frac{1}{2(2n+1)}<0.1$，解得 $n>2$，∴ $N_{0.1}=3$. (ii) 由 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.01$，即 $\frac{1}{2(2n+1)}<0.01$，解得 $n>24.5$，∴ $N_{0.01}=25$. (iii)由 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.001$，即 $\frac{1}{2(2n+1)}<0.001$，解得 $n>249.5$，∴ $N_{0.001}=250$.

(2) 这样的项数 N 不是唯一的．以 $N_{0.001}=250$ 为例，当 $n>250$ 时，有 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.001$. 若取 N 为大于 250 的任何整数，则当 $n>N$ 时，显然也有 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<0.001$.

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，解不等式 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$，得 $4n>\frac{1}{\varepsilon}-2$，即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

于是，对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

4．求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

［证］ ∵ 对于任给 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon,$$

得

$$n>\frac{a^2}{\varepsilon}.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

5．求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+5}{n^2-2}=0$.

［证］ 对于任给 $\varepsilon>0$，

$$\because\quad |a_n-0|=\left|\frac{7n+5}{n^2-2}\right|,$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\text{原式}=\frac{7n+5}{n^2-2}=\frac{7n+5}{\frac{n^2}{2}+\left(\frac{n^2}{2}-2\right)}<\frac{7n+5n}{\frac{n^2}{2}}=\frac{24}{n},$$

再由 $\frac{24}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{24}{\varepsilon}$.

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{\left[\frac{24}{\varepsilon}\right],\ 2\right\}$, 当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{7n+5}{n^2-2}\right|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{7n+5}{n^2-2}=0.$$

6. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}=0$.

［证］ 对于任给 $\varepsilon>0$, 由

$$|a_n-0|=\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}\right|\leqslant\frac{1}{\ln n}<\varepsilon$$

得

$$\ln n>\frac{1}{\varepsilon},\quad n>e^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=[e^{\frac{1}{\varepsilon}}]$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}\right|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\ln n}=0.$$

7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$, 解不等式

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n+2\cdot(-1)^n-2n-1}{2(2n+1)}\right|\leqslant\frac{3}{2(2n+1)}$$

$$<\frac{3}{3n}<\varepsilon,$$

得

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

8. 求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}=\dfrac{1}{2}$.

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$,

$$\because\quad \left|\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{n-4}{2n^2+n-4}\right|,$$

当 $n>4$ 时,有

$$\frac{3}{2}\left|\frac{n-4}{2n^2+n-4}\right|=\frac{3(n-4)}{2(2n^2+n-4)}<\frac{3n}{2(2n^2-4n)}<\frac{3}{4(n-2)},$$

解不等式 $\dfrac{3}{4(n-2)}<\varepsilon$, 得 $n>\dfrac{3}{4\varepsilon}+2$.

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{4,\ \left[\dfrac{3}{4\varepsilon}+2\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}=\frac{1}{2}.$$

9. 求证下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-4n+7}{4n^3+5n^2+1}=\dfrac{3}{4}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-4n+7}{4n^3-5n^2+1}=\dfrac{3}{4}$.

［证］ (1) 对任给 $\varepsilon>0$, 解不等式

$$\left|\frac{3n^3-4n+7}{4n^3+5n^2+1}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{15n^2+16n-25}{4(4n^3+5n^2+1)}\right|=\frac{15n^2+16n-25}{4(4n^3+5n^2+1)}$$

$$<\frac{15n^2+16n^2}{4(4n^3)}=\frac{31}{16n}<\varepsilon,$$

得 $$n>\frac{31}{16\varepsilon}.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{31}{16\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{3n^3-4n+7}{4n^3+5n^2+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n+7}{4n^3+5n^2+1}=\frac{3}{4}.$$

(2) 对任给 $\varepsilon>0$, 当 $n>1$ 时,解不等式

$$\left|\frac{3n^3-4n+7}{4n^3-5n^2+1}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{15n^2-16n+25}{4(4n^3-5n^2+1)}\right|=\frac{15n^2-16n+25}{4(4n^3-5n^2+1)}$$

$$<\frac{15n^2+25n^2}{4(4n^3-5n^2)}=\frac{40}{4(4n-5)},$$

再由 $\dfrac{40}{4(4n-5)}<\varepsilon$ 解得 $n>\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{10}{\varepsilon}+5\right)$.

∴ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varepsilon}+5\right)\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{3n^3-4n+7}{4n^3-5n^2+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon,\ \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n+7}{4n^3-5n^2+1}=\frac{3}{4}.$$

10. 已知数列的通项

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n},\ n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{2^n+4}{2^n},\ n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

求证： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

［证］ 当 n 为奇数时,

$$|a_n-1|=\left|\frac{2^n-1}{2^n}-1\right|=\frac{1}{2^n};$$

当 n 为偶数时,

$$|a_n-1|=\left|\frac{2^n+4}{2^n}-1\right|=\frac{4}{2^n}.$$

所以对任何 n 有 $|a_n-1|\leqslant\frac{4}{2^n}$. 解不等式 $|a_n-1|\leqslant\frac{4}{2^n}<\varepsilon$, 得

$$n>\log_2\frac{4}{\varepsilon}.$$

任给 $\varepsilon>0$, 不妨规定 $0<\varepsilon<1$, 取 $N=\left[\log_2\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-1|\leqslant\frac{4}{2^n}<\varepsilon,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

11. 已知数列 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$, 若

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=A.$$

那末对于数列 $\{c_n\}$: $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \cdots$, 必定收敛, 且极限为 A.

［证］ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$, 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时, 有

$$|u_n-A|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=A$. 即对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 N_2, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$|v_n - A| < \varepsilon.$$

今取 $N=\max\{2N_1, 2N_2\}$，当 $n>N$ 时，有 $|c_n - A|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

12．求证：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2a^n=0$．其中 $0<a<1$．

［证］(1) 令 $a=\dfrac{1}{1+h}$，$h>0$．

对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|na^n| = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} < \varepsilon,$$

解得

$$n > \frac{2}{h^2\varepsilon}+1.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2\cdot\varepsilon}\right]+2$，当 $n>N$ 时，有 $|na^n|<\varepsilon$．

即

$$\lim_{n\to\infty} na^n = 0.$$

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，当 $n>3$ 时，解不等式

$$|n^2a^n| = \frac{n^2}{(1+h)^n} < \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)h^3}$$

$$< \frac{6n}{(n^2-3n)h^3} = \frac{6}{(n-3)h^3} < \varepsilon,$$

得

$$n > \frac{6}{\varepsilon h^3}+3.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{6}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^3\varepsilon}\right]+4$，当 $n>N$ 时，有 $|n^2a^n|<\varepsilon$．

即

$$\lim_{n\to\infty} n^2a^n = 0.$$

13．求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0$．

［证］∵ 当 $|a|\leqslant 1$ 时，由

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

解不等式得 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

当 $|a|>1$ 时,取 $[|a|]=K$, 则

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a^n|}{n!} = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\frac{|a|}{3}\cdots\frac{|a|}{[|a|]}\cdot\frac{|a|}{[|a|]+1}\cdots\frac{|a|}{n}$$

$$< \frac{|a|^K}{K!}\cdot\frac{|a|}{n} < \frac{|a|^{K+1}}{n},$$

由 $\frac{|a|^{K+1}}{n} < \varepsilon$, 解得 $n > \frac{|a|^{K+1}}{\varepsilon}$.

$\therefore$ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\left\{\left[\frac{|a|^{K+1}}{\varepsilon}\right],\ \left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

14. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=2.$

[证] $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

显然当 $n\geqslant 2$ 时,

$$2=(2^{\frac{1}{2^n}})^{2^n}=[1+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)]^{2^n}>[1+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)]^n$$

$$=1+n(2^{\frac{1}{2^n}}-1)+\frac{n(n-1)}{2}(2^{\frac{1}{2^n}}-1)^2+\cdots+(2^{\frac{1}{2^n}}-1)^n$$

$$>n(2^{\frac{1}{2^n}}-1).$$

由 $2>n(2^{\frac{1}{2^n}}-1)$, 得

$$0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\frac{2}{n},\quad \frac{n}{n+2}<2^{-\frac{1}{2^n}}<1,\quad -\frac{4}{n+2}<2^{1-\frac{1}{2^n}}-2<0,$$

即 $0<2-2^{1-\frac{1}{2^n}}<\frac{4}{n+2}$, 再由 $\frac{4}{n+2}<\varepsilon$, 得

$$n+2>\frac{4}{\varepsilon},$$

$\therefore$ 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+2$, 当 $n>N$ 时,有

$$|\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}-2|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2.$$

15. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

［证］ 首先证明 $n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}$. 应用数学归纳法，当 $n=1, 2$ 时不等式显然成立. 假设 $n=K\,(K\geqslant 2)$ 时不等式成立，即有 $K!\geqslant K^{\frac{K}{2}}$. 则当 $n=K+1$ 时，

$$\because\quad (K+1)!=(K+1)\cdot K!\geqslant(K+1)\cdot K^{\frac{K}{2}},$$

$\therefore$ 只要证明 $(K+1)\cdot K^{\frac{K}{2}}\geqslant(K+1)^{\frac{K+1}{2}}$，即 $K^K\geqslant(K+1)^{K-1}$，

亦即
$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\cdot\frac{1}{K+1}\leqslant 1.$$

$$\because\quad \left(1+\frac{1}{K}\right)^K<3,\quad\therefore\quad \left(1+\frac{1}{K}\right)^K\frac{1}{K+1}<\frac{3}{K+1}\leqslant 1\quad (K\geqslant 2).$$

于是 $(K+1)!\geqslant(K+1)^{\frac{K+1}{2}}$ 成立. 故不等式成立.

从而由 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，解得

$$n>\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$\therefore$ 对于任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$. 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

［说明］ $\left(1+\dfrac{1}{K}\right)^K<3$ 是因为由二项式定理：

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^K=1+\frac{K}{K}+\frac{K(K-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{K}\right)^2+\cdots$$
$$+\frac{K(K-1)\cdots 2\cdot 1}{K!}\cdot\left(\frac{1}{K}\right)^K$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{K}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{K!}\left(1-\frac{1}{K}\right)\left(1-\frac{2}{K}\right)\cdots\left(1-\frac{K-1}{K}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{K!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{K-1}}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{K-1}}+\cdots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

16. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^K}{a^n}=0 \quad (a>1)$.

[证] 取 K 的整数部分 $[K]$，则 $[K]+1\geqslant K$. 于是

$$0<\frac{n^K}{a^n}\leqslant\frac{n^{[K]+1}}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[[K]+1]{a^n}}\right)^{[K]+1}.$$

不妨令 $[K]+1=m$, $\sqrt[[K]+1]{a}=b>1$. 有

$$0<\frac{n}{b^n}=\frac{n}{[1+(b-1)]^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n}$$

$$<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(b-1)^2}.$$

即有
$$0<\left(\frac{n}{b^n}\right)^m<\frac{2^m}{[(n-1)(b-1)^2]^m},$$

由不等式 $\frac{2^m}{[(n-1)(b-1)^2]^m}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{2}{(b-1)^2\cdot\sqrt[m]{\varepsilon}}+1$.

∴ 对于任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{(b-1)^2\cdot\sqrt[m]{\varepsilon}}+2\right]$，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{n^K}{a^n}\right|<\varepsilon,\quad 即\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^K}{a^n}=0.$$

17. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1)$.

[证] ∵ 对任给 $\varepsilon>0$，由 $|\sqrt[n]{a}-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$，得 $a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$. 两边取对数 $\frac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$，解得 $n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$.

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1).$$

［说明］ 实际上，当 $0<a<1$ 时，同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

∵ 对任给 $\varepsilon>0$，由 $|\sqrt[n]{a}-1|=1-a^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$，得 $a^{\frac{1}{n}}>1-\varepsilon$. 两边取对数 $\frac{1}{n}\ln a>\ln(1-\varepsilon)$，注意到 $\ln a$，$\ln(1-\varepsilon)$ 均小于零，∴ $\frac{1}{n}<\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}$，$n>\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$.

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(0<a<1).$$

18. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

［证］ 由 $\sqrt[n]{n}\geqslant1(n=1,2,\cdots)$，设 $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n$，则 $n=(1+\alpha_n)^n$. 且对一切 n，有 $\alpha_n\geqslant0$. 由二项式定理，有

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\alpha_n^2+\cdots$$
$$+\alpha_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2\quad(n\geqslant2).$$

当 $n\geqslant2$ 时，有 $0\leqslant\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\frac{2}{\sqrt{n}}$. 对任给 $\varepsilon>0$，解不等式

$$0\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon,\quad 得\quad n>\frac{4}{\varepsilon^2}.$$

∴ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+2$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

19. 求证：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 反之如何，试说明之.

［证］ ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即对于任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon$.

由于 $||a_n||=|a_n|<\varepsilon$（当 $n>N$ 时）

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=0.$$

又若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，因 $||a_n||=|a_n|$，则亦有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

20. 求证：若 $\lim_{n\to\infty} a_n=a\neq0$，则 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$。反之如何，试说明之。

［证］ $\because \lim_{n\to\infty} a_n=a$，即对于任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

由于 $||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|$，故当 $n>N$ 时成立 $||a_n|-|a||<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$$

但反之未必。例如当 $a_n=(-1)^{n-1}$，则有 $|a_n|=1$，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=1,$$

而 $\{a_n\}$ 发散。

21. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，求证：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$

［证］ (i) 设 $a=0$。由 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon^3$。

$\therefore$ 对任给 $\varepsilon>0$，当 $n>N_1$ 时，有 $|\sqrt[3]{a_n}|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}=0.$$

(ii) 设 $a\neq0$，由 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<a^{\frac{2}{3}}\cdot\varepsilon$。此外，当取 $\varepsilon_0=\frac{|a|}{2}>0$ 时，则存在 N_2，$n>N_2$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{|a|}{2},\quad \frac{2a-|a|}{2}<a_n<\frac{2a+|a|}{2},$$

由此即可推得 $n>N_2$ 时，a_n 与 a 同号，$\sqrt[3]{a_na}>0$。因此任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\max(N_1,N_2)$，当 $n>N$ 时，有

$$|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt[3]{a_n^2}+\sqrt[3]{a_na}+\sqrt[3]{a^2}}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$<\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot\varepsilon}{\sqrt[3]{a^2}}=\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}.$$

(2) 数列极限的性质和求数列极限

22. 下列判断是否正确，试说明之：(1) 收敛数列必有界；(2) 有界数列必收敛；(3) 无界数列必发散；(4) 发散数列必无界；(5) 无界数列必是无穷大.

［解］ (1) 是正确的.

(2) 是不正确的，例如 $a_n=(-1)^{n-1}$，是有界而不收敛.

(3) 是正确的，因无界数列若不发散，则收敛，而收敛数列必有界，得出矛盾.

(4) 是不正确的，例如 $a_n=(-1)^{n-1}$ 是发散的，但非无界.

(5) 是不正确的，例如 $a_n=n^{(-1)^n}$ 是无界，但不是无穷大.

23. 若数列$\{a_n\}$收敛，而数列$\{b_n\}$发散，则数列(1) $\{a_n+b_n\}$；(2) $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何，试说明之.

［解］ (1) 数列 $\{a_n+b_n\}$ 必发散.

$\because$ 若 $c_n=a_n+b_n$ 收敛，则 $b_n=c_n-a_n$ 应收敛，而已知 b_n 为发散，与已知矛盾，$\therefore$ $\{a_n+b_n\}$ 发散.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\neq 0$，则 $c_n=a_n\cdot b_n$ 为发散，$\because$ $a\neq 0$，$\therefore$ $a_n\neq 0$ (当 $n>N$ 时)，于是 $b_n=\dfrac{c_n}{a_n}$. 若 c_n 收敛，则 b_n 收敛，此与已知矛盾，$\therefore$ c_n 发散. 又若 $a=0$，则 $c_n=a_nb_n$ 不确定. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=(-1)^{n-1}$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0.$$

而 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=(-n)^n$，则 $a_n\cdot b_n=(-1)^n$ 发散.

24. 若数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$都发散，则数列 (1) $\{a_n+b_n\}$；(2) $\{a_nb_n\}$ 是否也发散，举出适当的例子.

［解］ 数列 $\{a_n+b_n\}$ 与 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性不确定. 例如，当 $a_n=(-1)^{n}$，$b_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ 时，

$$a_n+b_n=\frac{1+3(-1)^{n-1}}{2},\quad a_nb_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$$

都是发散的；而当 $a_n=(-1)^{n-1}$, $b=(-1)^n$ 时，$a_n+b_n=0$, $a_nb_n=-1$ 都是收敛的.

25. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 而 $\{b_n\}$ 为任意数列，能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, 举出适当的例子.

［解］ 可能有各种不同的情况. 例如，设 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则当

$b_n=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$; $b_n=Kn$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=K$;

$b_n=n^2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$; $b_n=(-1)^{n-1}\cdot n$ 时，$\{a_nb_n\}$ 发散.

26. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 举出适当的例子.

［解］ 不能. 例如，当 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $b_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$ 时，$a_nb_n=0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$, 但 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都发散.

显然，若两数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则 a, b 中至少有一个为零. 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b=0$$

的缘故. 又若两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中，一个收敛另一个发散，则该收敛数列的极限必为零.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 而 $\{b_n\}$ 发散. 若 $a\neq0$, 则 $a_n\neq0$ (当 $n>N$ 时)，从而由 $c_n=a_nb_n$, 得 $b_n=\dfrac{c_n}{a_n}$ 为收敛数列，此与假设矛盾，∴ $a=0$.

27. 下列判断是否正确，试说明之：(1) 无限多个无穷小量之和仍为无穷小；(2) 无限多个无穷小量之积仍为无穷小.

［解］ (1) 设 $A_n^{(1)}$: 1, 0, 0, 0, 0, ⋯,

$A_n^{(2)}$: 0, 1, 0, 0, 0, ⋯,

$A_n^{(3)}$: 0, 0, 1, 0, 0, ….

……

$A_n^{(K)}$: 0, 0, …, 0, 1, 0, ….
第 K 项

……

对上述每一个数列 $\{A_n^{(K)}\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(K)}=0$. 但是无限多个这样的数列之和，有

$A_n^{(1)}+A_n^{(2)}+\cdots+A_n^{(K)}+\cdots$ 为 1, 1, 1, …, 不为无穷小量.

(2) 设 $A_n^{(1)}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ….

$A_n^{(2)}$: 1, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ….

$A_n^{(3)}$: 1, 1, 3^2, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ….

$A_n^{(4)}$: 1, 1, 1, 4^3, $\frac{1}{5}$, ….

……

$A_n^{(K)}$: 1, 1, …, 1, K^{K-1}, $\frac{1}{K+1}$, ….

对上述每一个数列 $\{A_n^{(K)}\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(K)}=0$. 但是无限多个这样的数列之积，有

$A_n^{(1)}\cdot A_n^{(2)}\cdot\cdots\cdot A_n^{(K)}\cdots$ 为 1, 1, 1, …, 不为无穷小量.

28. 任意两个无穷小量之商是无穷小量吗？举例说明之.

［解］ 若 $a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=\frac{1}{n}$, 则 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{n}$ 为无穷小量. 而 $\frac{b_n}{a_n}=n$ 则为无穷大量.

若 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$, 则 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$, 极限为 $\frac{1}{2}$.

若 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$, 则 $\frac{a_n}{b_n}=(-1)^{n-1}$ 为有界而发散.

若 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, 则 $\frac{a_n}{b_n}=[1+(-1)^n]\cdot n$ 为无界而不是无穷大量.

29. 任意两个无穷大量之和是无穷大量吗？举例说明之.

[解] 若 $a_n=n$, $b_n=n$, 则 $a_n+b_n=2n$ 为无穷大量；若 $a_n=n, b_n=-n$, 则 $a_n+b_n=0$ 为无穷小量；若 $a_n=1+n$, $b_n=1-n$, 则 $a_n+b_n=2$ 有极限但非无穷小量；

若 $a_n=n+(-1)^{n-1}$, $b_n=-n$, 则 $a_n+b_n=(-1)^{n-1}$ 为有界但发散. 若 $a_n=n$, $b_n=(-1)^{n-1}\cdot n$, 则 $a_n+b_n=n[1+(-1)^{n-1}]$ 为无界但不是无穷大量.

30. 举例说明无穷大量与无穷小量之积有下列几种可能：(1) 无穷小量；(2) 无穷大量；(3) 有不等于零的极限；(4) 有界但不收敛；(5) 无界但不是无穷大量.

[解] (1) 若 $a_n=n, b_n=\frac{1}{n^2}$, 则 $a_nb_n=\frac{1}{n}$ 为无穷小量.

(2) 若 $a_n=n^2, b_n=\frac{1}{n}$, 则 $a_nb_n=n$ 为无穷大量.

(3) 若 $a_n=n, b_n=\frac{K}{n}(K\neq0)$, 则 $a_nb_n=K$, 其极限为 $K(K\neq0)$.

(4) 若 $a_n=n, b_n=\frac{1-(-1)^n}{n}$, 则 $a_nb_n=1-(-1)^n$ 为有界但不收敛.

(5) 若 $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1-(-1)^n}{n}$, 则 $a_nb_n=n[1-(-1)^n]$ 为无界但不是无穷大量.

31. 求证：若数列 $\frac{a_n}{b_n}$ 的分母 b_n 为无穷小，则数列 $\frac{a_n}{b_n}$ 有极限的必要条件是其分子 a_n 亦为无穷小.

[证] 因若数列 $\frac{a_n}{b_n}$ 有极限 A, 则存在 N, 使当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<1.$$

$$\because\qquad \left|\frac{a_n}{b_n}\right|=\left|\frac{a_n}{b_n}-A+A\right|\leqslant\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|+|A|<1+|A|,$$

从而 $0\leqslant|a_n|<|b_n|(1+|A|)$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|(1+|A|)=0$. 依迫敛性

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

32. 若数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\cdots$ 收敛于 $a(a\neq0)$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

请问: 假如 $a=0$, 会有什么结论.

［证］ $\because$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a(a\neq0)$.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{a}=1.$$

若 $a=0$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=K$ 存在, 则 $|K|\leqslant1$. 下面用反证法证之:

假如 $|K|>1$, $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|K|>1$, $\therefore$ 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1,$$

即 $|u_{n+1}|>|u_n|$, 由此可知 $\{|u_n|\}$ 不可能收敛于 0, 即 $\{u_n\}$ 不可能收敛于 0, 与 $a=0$ 矛盾.

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 也可能不存在, 例如: $u_n=\frac{1}{n}[q+(-1)^n]$ $(|q|\neq1)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n\cdot[q+(-1)^{n+1}]}{(n+1)[q+(-1)^n]}\quad 显然 \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} 发散.$$

总之, 若数列 $\{u_n\}$ 收敛, 如果

$$\lim_{n\to\infty}u_n=a\quad(a\neq0),\quad 则\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 则其极限的绝对值必不大于 1. 此外, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}$ 有可能发散.

33. 已知: $a_1=\alpha$, $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\beta\ (n=2, 3, \cdots)$, 其中 α, β 是常数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$, 且 $a_3=\alpha^2$, 求: α, β.

［解］ 在 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\beta$ 中, 两端取极限得 $\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\beta$, 解得

$$\beta=\frac{1}{9}.$$

又
$$a_3=\frac{2}{3}a_2+\beta=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_1+\beta\right)+\beta,$$

将 $a_1=\alpha$, $a_3=\alpha^2$ 以及 $\beta=\frac{1}{9}$ 代入，解得 $\alpha=\frac{2\pm\sqrt{19}}{9}$.

$$\therefore\quad \alpha=\frac{2\pm\sqrt{19}}{9},\ \beta=\frac{1}{9}.$$

34. 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

[分析] 当数列的通项是有理式或无理式，而极限呈 $\frac{\infty}{\infty}$ 型时，一般以 n 的最高指数幂去除分子、分母，通过恒等变形，再利用数列极限的四则运算法则，以求极限.

[解] (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{2}{n}}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^6}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{9}{2}}}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}+\frac{2}{n^{\frac{15}{2}}}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}=0.$

35. 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-1)^4}{(n+2)^4+(n-1)^4}$.

[解] (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}$

$$=0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n[(n+1)^2+(n-1)^2]}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}=4.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^4+\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}$

$$=\frac{2^4-1}{2^4+1}=\frac{15}{17}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-1)^4}{(n+2)^4+(n-1)^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^3+18n^2+36n+15}{2n^4+4n^3+30n^2+28n+17}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12}{n}+\frac{18}{n^2}+\frac{36}{n^3}+\frac{15}{n^4}}{2+\frac{4}{n}+\frac{30}{n^2}+\frac{28}{n^3}+\frac{17}{n^4}}=0.$$

36. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\cdots+b_s}$，其中 k、s 是自然数，而 a_i、b_j（$i=0, 1, 2, \cdots, k$；$j=0, 1, 2, \cdots, s$）都是常数，$a_0\neq0$，$b_0\neq0$.

〔解〕 $\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\cdots+b_s}=n^{k-s}\cdot\dfrac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_s}{n^s}}.$

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-s}=\begin{cases}0, & k<s,\\ 1, & k=s,\\ +\infty, & k>s.\end{cases}$$

由极限的四则运算性质：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_s}{n^s}}=\frac{a_0}{b_0},$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\cdots+b_s}=\begin{cases}0, & k<s,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=s,\\ +\infty, & k>s.\end{cases}$$

37. 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

［分析］ 当分子、分母含有公因式时，总是先约简再求极限，含 $n!$ 的因式亦不例外.

［解］ (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)+1}{(n+3)(n+2)}=0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2+1}{n+2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n+1}=1.$

38. 计算：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\frac{n}{5}\right]}{n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}-n\right)$.

［解］ (1) 令 $n=5k+r\,(r=0, 1, 2, 3, 4)$，则 $\left[\dfrac{n}{5}\right]=k$.

从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{n}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{5k+r}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{5+\frac{r}{k}}=\frac{1}{5}.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}+n}.$$

令 $n=5k+r\quad(r=0, 1, 2, 3, 4)$.

则
$$\text{原式}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\sqrt{(5k+r)^2+k}+5k+r}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(5+\frac{r}{k}\right)^2+\frac{1}{k}}+5+\frac{r}{k}}=\frac{1}{10}.$$

39. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}\right)$.

［解］ $\because$ $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}\right)=\sin\left[2\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}-n\right)\right]$

$$=\sin\left(2\pi\cdot\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}+n}\right).$$

令 $n=5k+r\,(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$得

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\cdot\frac{\left[\frac{n}{5}\right]}{\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}+n}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sin\left(2\pi\cdot\frac{k}{\sqrt{(5k+r)^2+k}+5k+r}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sin\left(2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(5+\frac{r}{k}\right)^2+\frac{1}{k}}+5+\frac{r}{k}}\right)=\sin\frac{\pi}{5}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{5}\right]}\right)=\sin\frac{\pi}{5}.$$

40. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)\quad(x>0)$.

［解］ (i) 当 $x=1$ 时，显然 $x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}=0$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)=0$.

(ii) 当 $x\neq1$, $x>0$ 时，考虑恒等变形

$$n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)=n^2\cdot x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}-1\right)$$

$$=\frac{n^2}{n(n+1)}\cdot x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1;\ \lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n+1}}=1;$$

令 $x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1=t$，则 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln x}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln x}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}\cdot\ln x=\ln x.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\cdot x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}=\ln x.$$

由(i)、(ii)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})=\ln x$.

41. 求下列数列的极限: (1) $\left\{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right\}$;

(2) $\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n}\right\}$; (3) $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$; (4) $\left\{\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n\right\}$.

[解] (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4=e^4$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^2=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}=e^{-1}$.

(4) $\because\quad \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{3}{n-1}\right)$

$$=\left[\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right]^3\cdot\left(1+\frac{3}{n-1}\right).$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right]^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-1}\right)=e^3.$$

42. 求: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{n-1}$.

[解] $\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{n-1}=\left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{n+\frac{1}{3}}\right]\cdot\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{-\frac{4}{3}}$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{-\frac{4}{3}}.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}=e,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{-\frac{4}{3}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

43. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)a_n=5$. 求下列各极限值: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n$.

[解] (1) $\because\quad a_n=\dfrac{(3n+4)a_n}{3n+4}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)a_n=5$,

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)\cdot a_n}{3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n+4}=0.$$

(2) $\because\quad n\cdot a_n=\dfrac{n}{3n+4}\cdot(3n+4)\cdot a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)a_n=5$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+4}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n\cdot a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+4}\cdot(3n+4)a_n=\frac{5}{3}.$$

(3) $\because\quad n^2a_n=\dfrac{n^2}{3n+4}\cdot(3n+4)a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)a_n=5$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n+4}=+\infty,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n+4}\cdot(3n+4)a_n=+\infty.$$

44. 已知数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-a_n}{2a_n+3}=5$. 求: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

[解] $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 收敛, $\therefore$ 可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 由数列的四则运算性质得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-a_n}{2a_n+3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+3)}=\frac{4-A}{2A+3}=5.$$

由 $4-A=10A+15$ 解得 $A=-1$.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=-1.$$

45. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n(2-3x_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$. (1) 确定 x_1 的范围，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 收敛； (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

［解］ (1) ∵ $x_{n+1}=2x_n-3x_n^2$,

$$3x_{n+1}-1=-9x_n^2+6x_n-1=-(3x_n-1)^2.$$

令 $y_n=3x_n-1$，则有 $y_n=-y_{n-1}^2$. 由递推关系

$$y_n=-y_{n-1}^2=-y_{n-2}^{2^2}=-y_{n-3}^{2^3}=\cdots=-y_1^{2^{n-1}},$$

∴ 只有 $-1\leqslant y_1\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-y_1^{2^{n-1}})$ 存在，即 $-1\leqslant 3x_1-1\leqslant 1$，亦即 $0\leqslant x_1\leqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$\{x_n\}$ 收敛.

(2) ∵ 当 $x_1\in\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ 时，则 $y_1\in(-1, 1)$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，即得

$$\lim_{n\to\infty}(3x_n-1)=0, \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{3}.$$

当 $x_1=0, \dfrac{2}{3}$ 时，$y_1=\pm 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$,

得
$$\lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

46. 设数列 $\{a_n\}$ 具有关系 $a_n=pa_{n-1}+q$， 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在. 求：p、q 满足的条件.

［解］ 若 $q=0$，则

$$a_n=pa_{n-1}=p^2a_{n-2}=\cdots=p^{n-1}a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n=a_1\lim_{n\to\infty} p^{n-1}.$$

可见，若 $a_1\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 收敛，则 $-1<p\leqslant 1$；若 $a_1=0$，则 p 可以是任何数. 若 $q\neq 0$，在 $a_n=pa_{n-1}+q$ 中，两端取极限得 $A=pA+q$，∴ $q=A(1-p)$，得 $p\neq 1$.

47. 已知数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_n=\dfrac{3a_{n-1}}{a_{n-1}+3}$ 给出，求：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

［解］ $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+3}{3a_{n-1}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$.

令 $\quad b_n=\dfrac{1}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$. 则 $\quad b_n=\dfrac{1}{3}+b_{n-1}$.

此为等差数列，其通项 $b_n=b_1+\frac{1}{3}(n-1)$.

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{3}(n-1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{3}(n-1)}=0.$$

48. 数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=a$, $x_2=b$, $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$ $(n>2)$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

［解］ $n>2$ 时，

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}).$$

令 $a_{n-1}=x_n-x_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，$a_1=b-a$，则 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}$. $\therefore\ \{a_n\}$ 为首项为 $b-a$ 的等比数列，$a_n=(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 即有

$$x_n-x_{n-1}=(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

$$x_n=x_1+\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=a+\frac{2(b-a)}{3}+\frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}.$$

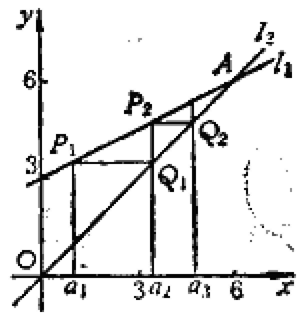
$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[a+\frac{2(b-a)}{3}+\frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right]=\frac{a+2b}{3}.$$

49. 设数列 $\{a_n\}$ 具有关系 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3$ $(n=2,3,\cdots)$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ 根据第46题的结论，有 $p=\frac{1}{2}$，$q=3$. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{q}{(1-p)}=6$.

［说明］ 由递推关系式 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3$ 给出的数列，不论首项取何值，其极限都等于6. 这个结论有几何解释，对于 l_1: $y=\frac{1}{2}x+3$ 与 l_2: $y=x$ 两条直线。

取$(a_1, 0)$，过$(a_1, 0)$作x轴垂线交l_1于$P_1\left(a_1, \frac{1}{2}a_1+3\right)$，$P_1$的纵坐标是$a_2$. 过$P_1$作$x$轴平行线交$l_2$于$Q_1\left(\frac{1}{2}a_1+3, \frac{1}{2}a_1+3\right)$，即$(a_2, a_2)$，过$Q_1$作$x$轴垂线交$l_1$于$P_2\left(a_2, \frac{1}{2}a_2+3\right)$，$P_2$的纵坐标是$a_3$. 以此类推在$l_1$上就可得$P_1, P_2, \cdots, P_n$. 其纵坐标就构成$a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}$，并且点$P_n$趋于$l_1$与$l_2$的交点$A(6, 6)$，其$A$的纵坐标为6，即$\{a_n\}$的极限为6.



由此可见，事实上$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3$的极限是$y=\frac{1}{2}x+3$与$y=x$交点的纵坐标.

50. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}+\frac{b+d}{a^2}+\cdots+\frac{b+(n-1)d}{a^n}\right)\quad(a>1)$.

［分析］ 求无限项之和的极限时，不能直接应用求极限的四则运算法则. 但可以先求和，然后求其极限，或者采用其他方法.

［解］ 设 $S_n=\frac{b}{a}+\frac{b+d}{a^2}+\cdots+\frac{b+(n-1)d}{a^n}$,

则
$$\frac{1}{a}\cdot S_n=\frac{b}{a^2}+\cdots+\frac{b+(n-2)d}{a^n}+\frac{b+(n-1)d}{a^{n+1}},$$

相减得
$$\frac{a-1}{a}S_n=\frac{b}{a}+\left(\frac{d}{a^2}+\cdots+\frac{d}{a^n}\right)-\frac{b+(n-1)d}{a^{n+1}}.$$

$$\because\quad a\neq1,$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{a-1}\left\{\left[b+d\,\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{a}}\right]-\frac{b+(n-1)d}{a^n}\right\}.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a-1}\left[b+d\,\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{a}}\right]-\lim_{n\to\infty}\frac{b+(n-1)d}{a^n\cdot(a-1)}$$

$$=\frac{ab-b+d}{(a-1)^2}.$$

51. 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

［解］ (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}^{n\text{项}}}{\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}=-1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n[(n+1)-(n+2)]}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}-\frac{n}{2(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

［说明］ 如(2)题，求 $\infty-\infty$ 型的极限，一般化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型求之.

52. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]$.

［解］ ∵ $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2]-[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2]$$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{2n(2n+1)}{6}[(4n+1)-2(n+1)]$$

$$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1).$$

∴ 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{4}{3}$.

53. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{k^2+k+1}$.

［解］ ∵ $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)\cdot k}$

$=\operatorname{arc\,tg}(k+1)-\operatorname{arc\,tg}k.$

∴ $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arc\,tg}(n+1)-\operatorname{arc\,tg}1.$

∴ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k^2+k+1}=\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arc\,tg}(n+1)-\operatorname{arc\,tg}1]=\frac{\pi}{4}.$

54. 求：(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$

［解］ (1) ∵ $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

∴ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$

(2) ∵ $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$

∴ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}.$

55. 设 $a_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$，求：$\lim_{n\to\infty}a_n$。

［解］ ∵ $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$

$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$

$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$$

56. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=(-1)^n(n^2+3n+1)-1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

(1) 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k}$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}}{n^t}=C$ （C 为非零常数），求：t 和 C 的值.

［解］ (1) $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^n\cdot[n^2+3n+1+(n-1)^2+3(n-1)+1]$$
$$=(-1)^n\cdot(2n^2+4n),$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(k^2+2k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{8}.$$

(2) 由 $a_n=(-1)^n\cdot 2n(n+2)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\therefore\ a_{2n}=8n(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=8\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{8n(n+1)(n+2)}{3}.$$

可见只有当 $t=3$ 时，收敛于非零常数，且

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{8n(n+1)(n+2)}{3n^3}=\frac{8}{3}. \quad \therefore \quad t=3,\ C=\frac{8}{3}.$$

57. 已知：x 的恒等式

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+k)$$
$$=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{b_k}$，其中设 $b_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i$.

［解］ 令 $x=1$，则 $b_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i=(k+1)!$.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$$

58. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin x)(1+\sin^2 x)(1+\sin^4 x)\cdots(1+\sin^{2^n} x)$.

［解］ 当 $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\sin x}(1-\sin x)(1+\sin x)(1+\sin^2 x)\cdots(1+\sin^{2^n} x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\sin x}\cdot(1-\sin^{2^{n+1}} x)=\frac{1}{1-\sin x}.$$

当 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$,

$$原式=\lim_{n\to\infty}2^{n+1}=+\infty.$$

当 $x=2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin x)(1+\sin^2 x)\cdots(1+\sin^{2^n} x)=0.$$

59. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\ \cdots\ \cos\dfrac{x}{2^n}$.

［解］ 当 $x=0$ 时.

$$\because\quad \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}=1.$$

当 $x\neq0$ 时.

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}=\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}\cdot\left(2\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ \cdots\ \cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

60. 设$a_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\ \cdots\ (2n)}{3\cdot6\cdot9\ \cdots\ (3n)}$. 求: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ $a_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\ \cdots\ (2n)}{3\cdot6\cdot9\ \cdots\ (3n)}=\dfrac{2\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots(2\cdot n)}{3\cdot(3\cdot2)\cdot(3\cdot3)\cdots(3\cdot n)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\ \cdots\ (2n)}{3\cdot6\cdot9\ \cdots\ (3n)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

61. 设数列$\{a_n\}$, 若$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=kn^2(n=1,\ 2,\cdots)$, k为正的常数. 求:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}).$$

［解］ 当$n\geqslant2$时, $a_n=S_n-S_{n-1}=kn^2-k(n-1)^2=2kn-k$, $a_1=S_1=k$.

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^n a_{2i}=\sum_{i=1}^n(2k\cdot2i-k)=2k\cdot n(n+1)-nk=kn(2n+1).$$

$$\sum_{i=1}^n a_{2i-1}=\sum_{i=1}^n[2k(2i-1)-k]=\sum_{i=1}^n(4ki-3k)=nk(2n-1).$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{kn(2n+1)}-\sqrt{nk(2n-1)})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2nk}{\sqrt{kn(2n+1)}+\sqrt{nk(2n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{\sqrt{k\left(2+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{k\left(2-\frac{1}{n}\right)}}=\frac{\sqrt{2k}}{2}.$$

62. 求: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\right)$.

[解] $\because\ 1+\frac{1}{\frac{(k-1)(k+2)}{2}}=\frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}\quad(k=2,3,\cdots,n)$.

$$\therefore\ \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\right)$$

$$=\frac{2\cdot3}{1\cdot4}\cdot\frac{3\cdot4}{2\cdot5}\cdot\frac{4\cdot5}{3\cdot6}\cdots\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}=\frac{3\cdot n}{(n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=3.$$

63. 求: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

[解] $\because\ 1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\quad(k=2,3,\cdots,n)$.

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

即得 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$.

64. 求: $\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

[解] $\because\ \frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$

$$=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}\quad(k=2,3,\cdots,n).$$

$$\therefore\quad \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdots\frac{(n-2)[(n-1)^2+(n-1)+1]}{(n)\cdot[(n-2)^2+(n-2)+1]}$$

$$\cdot\frac{(n-1)[n^2+n+1]}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}.$$

65. 已知：$S=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{13^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}+\cdots$,

$$S'=\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{4}{21}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{y_n}+\cdots,$$

其中 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$, $y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n=0$.

求证：$\dfrac{S}{S'}=\sqrt{5}$.

［证］ $x_1=1$, $x_2=2$, $x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$;

$y_1=1$, $y_2=3$, $y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n=0$.

根据递推数列求通项，对特征方程 $x^2-3x+1=0$. 设 a, $\dfrac{1}{a}$ 是方程的根。于是

$$\begin{cases}A_1a+\dfrac{B_1}{a}=1,\\ A_1a^2+\dfrac{B_1}{a^2}=2,\end{cases}\quad \begin{cases}A_2a+\dfrac{B_2}{a}=1,\\ A_2a^2+\dfrac{B_2}{a^2}=3.\end{cases}$$

注意到　$a+\dfrac{1}{a}=3$,　$\therefore\quad A_1=\dfrac{1}{\sqrt{5a}}$,　$B_1=\sqrt{\dfrac{a}{5}}$;

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad B_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$x_n=A_1a^n+\frac{B_1}{a^n},\quad y_n=A_2a^n+\frac{B_2}{a^n}.$$

$$\therefore\quad x_n^2=\left[\frac{1}{\sqrt{5a}}a^n+\sqrt{\frac{a}{5}}a^{-n}\right]^2=\frac{a^{2n-1}}{5(a^{2n-1}+1)^2},$$

$$(-1)^{n+1}\frac{n}{y_n}=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{5}na^n}{a^{2n}-1}.$$

$$S=5a\left\{\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a^3+1)^2}+\frac{a^4}{(a^5+1)^2}+\cdots\right\},$$

$$S'=\sqrt{5}\,a\left\{\frac{1}{a^2-1}+\frac{2a}{a^4-1}+\frac{3a^2}{a^6-1}+\cdots\right\}.$$

取方程 $x^2-3x+1=0$ 大于 1 的根，可以得到

$$\begin{aligned}S'=\sqrt{5}\,a\{&[a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+\cdots]-2[a^{-3}+a^{-7}+a^{-11}+a^{-15}+\cdots]\\&+3[a^{-4}+a^{-10}+a^{-16}+a^{-22}+\cdots]\\&-4[a^{-5}+a^{-13}+a^{-21}+a^{-29}+\cdots]+\cdots\}.\end{aligned}$$

然而

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}-\frac{4}{a^5}+\cdots=\frac{1}{(a+1)^2},$$

$$\frac{1}{a^4}-\frac{2}{a^7}+\frac{3}{a^{10}}-\frac{4}{a^{13}}+\cdots=\frac{a^2}{(a^3+1)^2},$$

$$\cdots\cdots$$

由此可推得　$$S'=\sqrt{5}\,a\left\{\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a^3+1)^2}+\frac{a^4}{(a^5+1)^2}+\cdots\right\},$$

$$\therefore\quad \frac{S}{S'}=\frac{5a\left\{\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{a^2}{(a^3+1)^2}+\dfrac{a^4}{(a^5+1)^2}+\cdots\right\}}{\sqrt{5}\,a\left\{\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{a^2}{(a^3+1)^2}+\dfrac{a^4}{(a^5+1)^2}+\cdots\right\}}=\sqrt{5}.$$

[说明]　已知第一、二项 x_1、x_2，且通项满足 $x_{n+2}+Ax_{n+1}+Bx_n=0$ 的递推数列，有如下性质：

(1) 等比数列 $\{q^n\}$ 满足递推关系式．其中 q 是方程 $x^2+Ax+B=0$ 的根．

(2) 若 $\{q_1^n\}$，$\{q_2^n\}$ 两个等比数列均满足递推关系式 $x_{n+2}^2+Ax_{n+1}+Bx_n=0$，则数列 $\{C_1q_1^n+C_2q_2^n\}$ 也满足递推关系式．

(3) 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是满足递推关系式 $x_{n+2}+Ax_{n+1}+Bx_n=0$ 的两个数列，则满足递推关系式的任意一个数列均能表成 $\{C_1a_n+C_2b_n\}$，C_1,C_2 为两个适当常数．

以上三项性质可由《数学题解辞典·代数》第 885 页几题中推出．而递推关系式 $x_{n+2}+Ax_{n+1}+Bx_n=0$ 对应的方程 $x^2+Ax+B=0$ 叫特征方程．本题递推关系式的特征方程是 $x^2-3x+1=0$．由韦达定理，方程两根有 a，$\dfrac{1}{a}$ 形式．于是 $\left\{C_1a^n+C_2\dfrac{1}{a^n}\right\}$ 是满足递推关系式的通解．

根据 $x_1=1$，$x_2=2$ 条件即可确定 C_1、C_2 的值；$y_1=1$，$y_2=3$ 条件亦可推

得数列 $\{y_n\}$ 的通项公式，即 C_1、C_2 的值. 以上是 $x_{n+2}+Ax_{n+1}+Bx_n=0$ 有 x_1、x_2 初始条件的递推数列求通项的方法之一.

66. 平面上有点列 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$、…，坐标由下面递推关系式给出：

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=-42,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_{n+1}=4x_n-\dfrac{1}{3}y_n,\\ y_{n+1}=10x_n-\dfrac{1}{3}y_n.\end{cases}$$

求：当 $n\to\infty$ 时，直线 OM_n 的斜率的趋势.

［解］ $\because$ 由递推关系式，$x_{n+1}-y_{n+1}=-6x_n$，$y_{n+1}=x_{n+1}+6x_n$，

$$y_n=x_n+6x_{n-1}.\qquad \therefore\quad x_{n+1}=4x_n-\frac{1}{3}(x_n+6x_{n-1}),$$

$$3x_{n+1}-11x_n+6x_{n-1}=0.$$

按二阶递推数列的解法，x_n 有形如 $C_1q_1^n+C_2q_2^n$ 的通项. 解特征方程得

$$3q^2-11q+6=0,\ q_1=3,\ q_2=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad x_n=C_13^n+C_2\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \cdots①$$

$x_1=0$，$x_2=4x_1-\dfrac{1}{3}y_1=14$ 代入 ①：

$$\begin{cases}3C_1+\dfrac{2}{3}C_2=0\\ 9C_1+\dfrac{4}{9}C_2=14.\end{cases}\qquad 解得\ C_1=2,\ C_2=-9.$$

$$\therefore\quad x_n=2\times3^n-9\times\left(\frac{2}{3}\right)^n.\quad y_n=x_n+6x_{n-1},$$

$$y_n=6\times3^n-90\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

OM_n 的直线斜率为 $\dfrac{y_n}{x_n}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times3^n-90\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{2\times3^n-9\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=3.$$

于是 OM_n 的斜率趋势为 3.

67. 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}.$$

[解] 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$. $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$, 且

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n>0.$$

按施笃兹定理

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}}=2,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=2.$$

68. 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ (k 为自然数);

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)$.

[解] (1) 令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^k$, $\sigma_n=n^{k+1}$. $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$; 且 $\sigma_{n+1}-\sigma_n>0$.

按施笃兹定理

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-n^{k+1}+C_{k+1}^1\cdot n^k-C_{k+1}^2\cdot n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot C_{k+1}^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{k+1},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\frac{1}{k+1}.$$

(2) 令 $S_n=(k+1)\sum_{i=1}^{n}i^k-n^{k+1}$, $\sigma_n=(k+1)n^k$.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty,\quad 且\quad \sigma_{n+1}-\sigma_n>0.$$

按施笃兹定理

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k+(n-1)^{k+1}-n^{k+1}}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k(k+1)}{2}\cdot n^{k-1}-\frac{k(k+1)(k-1)}{2\cdot 3}\cdot n^{k-2}+\cdots}{(k+1)\left[k\cdot n^{k-1}-\frac{k(k-1)}{2}n^{k-2}+\cdots\right]}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sigma_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\frac{1}{2}.$$

69. 设 $0<x_1<1$, 数列 $\{x_n\}$ 满足递推关系 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

[证] $\because$ $x_{n+1}-x_n=-x_n^2\leqslant 0$, $\therefore$ 数列单调减小.

用数学归纳法证明 $0<x_n<1(n=1, 2, \cdots)$. 已知 $0<x_1<1$, 又假设 $0<x_n<1$, 即有 $0<\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$, 则

$$x_{n+1}=x_n-x_n^2=\frac{1}{4}-\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

于是有 $0<x_n<x_1<1$. $\therefore$ $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, 两边取极限, 有 $a=a-a^2$, $\therefore$ $a=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 再由施笃兹定理

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}(1-x_{n-1})}{x_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n-1})=1.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}nx_n=1.$$

70. 求: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

［解］ 令 $x_n=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$, $y_n=n\sqrt{n}$. 并且

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty, y_n-y_{n-1}>0,$$

由施笃兹定理

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\dfrac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{2}{3}.$$

71. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$. 但反之不然.

［证］ 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $S_n-S_{n-1}=a_n, \sigma_n=n$, $\sigma_n-\sigma_{n-1}=1$.

由
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

按施笃兹定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

反之不然, 例如 $a_n=1+(-1)^n$, $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 1$, 但 $\{a_n\}$ 不收敛.

[说明] 由数列极限的定义出发，证明如下．由条件知对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，有：$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$．

又
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$
$$=\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n},$$

令 $M=\max\{|a_1-a|,\ |a_2-a|,\ \cdots,\ |a_{N_1}-a|\}$，则欲使上式 $\leqslant\frac{MN_1}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{MN_1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2MN_1}{\varepsilon}$．

$\therefore$ 取 $N=\max\left\{\left[\frac{2MN_1}{\varepsilon}\right]+1,\ N_1\right\}$，当 $n>N$ 时，有
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a.$$

72．设 $a_n>0(n=1,\ 2,\ \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$．求证：
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ \cdots\ a_n}=a.$$

[证] (1) 若 $a=0$．
$$\because\quad 0\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ \cdots\ a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0,$$

$\therefore$ 由迫敛性
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ \cdots\ a_n}=0.$$

(2) 若 $a>0$．取对数
$$\ln\sqrt[n]{a_1a_2\ \cdots\ a_n}=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$，从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln a,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\ln a$, $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

73. 已知: $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=A$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

[证] $\because$ $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$.

. 由上题结论, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=A.\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A.$$

74. 求: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2+3n}$.

[解一] 由第 73 题结论 对数列 $a_n=2n^2+3n$.

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{2(n-1)^2+3(n-1)}=1.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2+3n}=1.$$

[解二] 由于 $\sqrt[n]{2n^2}<\sqrt[n]{2n^2+3n}<\sqrt[n]{5n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\cdot\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2=1.$$

由迫敛性 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2+3n}=1$$

75. 求. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

[解一] 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$.

$$x_1\cdot x_2\cdots x_n=\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=\left(\frac{2}{1}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{(n+1)^n}{n!},$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

由第 72 题结论: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1}=e.$$

［解二］ 首先注意 $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{a_n}$, $a_n=\frac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e.$$

∴ 由上题结论

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

(3) 迫　敛　性

76. 设 $0<k<1$, 求: $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$.

［解］ ∵ $0<k<1$, ∴ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\leqslant 1+\frac{1}{n}$. 从而

$$0\leqslant(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]$$

$$<n^k\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n^{1-k}}.$$

又　　∵ $1-k>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-k}}=0$,

由迫敛性，得　　$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$.

77. 求证：若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

［证明］ 由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$, 取 r_0, 使 $r<r_0<1$, 由数列极限的性质，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{a_n}<r_0$, ∴ $0<a_n<r_0^n$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}r_0^n=0$ (∵ $0<r_0<1$).

∴　由迫敛性　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

78. 已知：$a\geqslant 0$, $a_n=\sqrt[n]{\underbrace{[a[a\cdots[a]}_{n\text{项}}\cdots]]}$，其中$[a]$表示不超过$a$的最大整数部分，求：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ (1) 当 $0\leqslant a<1$，则 $[a]=0$. $\therefore a_n\equiv 0$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

(2) 当 $1\leqslant a<2$，则 $[a]=1$. $\therefore a_n\equiv 1$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

(3) 当 $a\geqslant 2$，设 $b_n=a_n^n=[\overbrace{a[a\cdots[a]}^{n\text{项}}\cdots]]$.

$$[b_n]=[a\cdot b_{n-1}]>ab_{n-1}-1>a(ab_{n-2}-1)-1=a^2\cdot b_{n-2}-a-1>\cdots$$

$$>a^{n-1}b_1-a^{n-2}-\cdots-a-1,\ b_1=[a]>a-1.$$

$$\therefore\quad a_n^n=b_n\geqslant[b_n]>a^n-a^{n-1}-\cdots-a-1$$

$$=a^n-\frac{a^n-1}{a-1}>\frac{a-2}{a-1}\cdot a^n,$$

$$a_n>\sqrt[n]{\frac{a-2}{a-1}}\cdot a.$$

又 $a>2$, $\therefore [a]\leqslant a$, $a_n^n<a^n$. 于是，

$$\sqrt[n]{\frac{a-2}{a-1}}\cdot a<a_n<\sqrt[n]{a^n}.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a-2}{a-1}}\cdot a=a,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a.$$

由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

79. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)})$.

［解］ $\because\ k<\sqrt{k(k+1)}<\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}=k+\frac{1}{2}\ (k=1,2,\cdots)$.

$$\therefore\quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k<\frac{1}{n^2}(\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)})$$

$$<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

由迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)=\frac{1}{2}.$$

80．已知：$x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

［解］ $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$

（共 $2n+2$ 项）.

$$2=\frac{2n+2}{n+1}<x_n<\frac{2n+2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2,\text{由迫敛性得}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

81．求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+k^n}$（其中 k 为某自然数）.

［解］ (1) $\frac{\ln n}{n}=\ln\sqrt[n]{n}$. 由第 18 题得 $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$,

$$\therefore\quad 0<\ln\sqrt[n]{n}<\ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\qquad\cdots①$$

又

$$1<\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}<e,$$

两边取对数后，除以 $\sqrt{\frac{n}{2}}$，得

$$0<\ln\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)<\sqrt{\frac{2}{n}}\qquad\cdots②$$

∴ 由 ① 和 ② 得

$$0<\frac{\ln n}{n}<\sqrt{\frac{2}{n}}.\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}}=0.$$

由迫敛性得 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

(2) 由(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. 再由 $\frac{\ln k}{k}>0$ 以及极限的不等式性质，故总存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\frac{\ln n}{n}<\frac{\ln k}{k}$，即 $k\ln n<n\ln k$（k 为自然数），

$$\ln n^k<\ln k^n,\ n^k<k^n.$$

∴ 在 N 以后的一切项，均有 $k^n<n^k+k^n<2k^n$，

$$\sqrt[n]{k^n}<\sqrt[n]{n^k+k^n}<\sqrt[n]{2k^n},\quad 而\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2k^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k^n}=k.$$

由迫敛性得 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+k^n}=k.$$

82. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}$（其中 c 为常数）.

［解］ 对于常数 c，总存在自然数 k，满足 $0\leqslant|c|\leqslant\frac{1}{2}k$.

对充分大的 n，

$$0\leqslant\left|\frac{c^n}{n!}\right|=\frac{|c|}{n}\cdot\frac{|c|}{n-1}\cdots\frac{|c|}{k}\cdots\frac{|c|}{2}\cdot\frac{|c|}{1}<\frac{|c|^k}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{(2|c|)^k}{k!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2|c|)^k}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

由迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c^n}{n!}\right|=0,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0.$$

83. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$.

［解］ ∵ $$n!\leqslant\sum_{p=1}^{n}p!\leqslant(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!$$
$$\leqslant 2(n-1)!+n!,$$

$$\therefore\quad 1\leqslant\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}\leqslant\frac{2}{n}+1.\quad 又\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1,$$

由迫敛性，得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p=1}^{n}p!}{n!}=1.$$

84. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\quad a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$.

［解］ 令 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，有
$$\sqrt[n]{A^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{A^n+A^n+\cdots+A^n},$$
$$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{k}\cdot A.$$
而 $\lim\limits_{n\to\infty}A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot A=A$，由迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=A.$$

85. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]$.

［解］
$$\frac{n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{(n^2+n)^2}=\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+n)^2}$$
$$<n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]$$
$$<\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+1)^2}=\frac{n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{(n^2+1)^2},$$
又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{(n^2+1)^2}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{(n^2+n)^2}=\frac{1}{2}$.
由迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]=\frac{1}{2}.$$

86. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

［解］ ∵ $1\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant n\quad(n=1,2,\cdots)$，

∴ $1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

由迫敛性得 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

87. 设：$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ $\because$ $$\frac{2k-1}{2k}=\frac{\sqrt{2k-1}\sqrt{2k-1}}{2k}=\sqrt{2k-1}\cdot\frac{\sqrt{2k-1}}{2k}$$

$$<\sqrt{2k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}<\sqrt{\frac{1}{3}},\ \frac{3}{4}<\sqrt{\frac{3}{5}},\ \frac{5}{6}<\sqrt{\frac{5}{7}},\ \cdots,\ \frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

于是， $$0<a_n<\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0,$$

故由迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{n}=0.$$

［说明］ 对于数列 $\{u_n\}$，其中 $u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，不难用数学归纳法证得

$$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

实际上，当 $n=1$ 时，$0<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

设当 $n=k$ 时，有

$$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}},$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$u_{k+1}=u_k\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

$$=\frac{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{2k+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{\sqrt{(2k+2)^2-1}}{2k+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

$$\therefore\quad u_{k+1}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.\quad \therefore\quad u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

88. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1}|\leqslant q|a_n|,0<q<1(n=1,2,\cdots)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

［证］ $\because\ |a_{n+1}|\leqslant q|a_n|\quad(n=1,2,\cdots)$.

$\therefore\ 0\leqslant|a_n|\leqslant q|a_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant q^{n-1}|a_1|$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}|a_1|=0\,(0<q<1)$, 由迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

［说明］ 数列 $\{a_n\}$ 只要满足 $|a_{n+1}|\leqslant|qa_n|$, $|q|<1(n=k,k+1,\cdots)$. 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

89. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+4}$, 求: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ 由 $x=\sqrt{3x+4}$, 得 $x^2-3x-4=0$, 其根为 $x_1=-1$, $x_2=4$. 由于 $a_n>0$, 可以估计数列若有极限, 只可能是 4. 考虑

$$|a_{n+1}-4|=|\sqrt{3a_n+4}-4|=\frac{3|a_n-4|}{\sqrt{3a_n+4}+4}<\frac{3}{4}|a_n-4|.$$

令 $b_n=a_n-4$, 则有 $|b_{n+1}|<\frac{3}{4}|b_n|$, $\therefore\ |b_n|\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}|b_1|$, 依迫敛性, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-4)=0$.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=4.$$

［说明］ 本题若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=k$, $a_{n+1}=\sqrt{Aa_n+B}$, 且 $A>0$, $B>0$, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

90. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$, 求: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

［解］ 由 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ 得 $x^2-2x-3=0$. 解得 $x_1=-1$, $x_2=3$. 由于 $a_n>0$, 可以估计数列若有极限, 只可能是 3. 考虑

$$|a_{n+1}-3|=\left|\frac{4a_n+3}{a_n+2}-3\right|=\frac{|a_n-3|}{|a_n+2|}=\frac{|a_n-3|}{a_n+2}<\frac{1}{2}|a_n-3|.$$

令 $b_n=a_n-3$，则有 $|b_{n+1}|<\frac{1}{2}|b_n|$. 与上题同理，有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0. \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n=3.$$

91. 若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

[证] $\because l>1$，$\therefore$ 存在 A，满足 $1<A<l$.

由数列收敛的性质，总存在 N，当 $n>N$ 时，有 $A<\frac{a_n}{a_{n+1}}$，即

$$a_{n+1}<\frac{a_n}{A}<\frac{a_{n-1}}{A^2}<\cdots<\frac{a_N}{A^{n-N+1}}.$$

$$\therefore \quad 0<a_n<\frac{a_N}{A^{n-N}}=\left(\frac{1}{A}\right)^n\cdot a_N\cdot A^N, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{A}\right)^n\cdot a_N\cdot A^N=0.$$

由迫敛性得
$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

[说明] 若条件改为 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=+\infty$，则亦有结论
$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

92. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}\quad(a>1)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdots(n+10)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$.

[解] (1) 设 $a_n=\frac{n^k}{a^n}$，$a_{n+1}=\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}$. 显然 $a_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}\cdot\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot a=a>1.$$

由上题所证结论得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

(2) 设 $a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，$a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}$. 显然 $a_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}\cdot\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot(n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot(n+1)=+\infty>1.$$

由上题的说明得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$$

(3) 设 $a_n=\frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. 显然 $a_n>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty>1.$$

由上题的说明得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

(4) 设 $a_n=\frac{11\cdot12\cdot13\cdots(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$,

$$a_{n+1}=\frac{11\cdot12\cdots(n+10)\cdot(n+11)}{2\cdot5\cdots(3n-1)\cdot(3n+2)}.$$

显然 $a_n>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{11\cdot12\cdot13\cdots(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}\cdot\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)(3n+2)}{11\cdot12\cdots(n+10)(n+11)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+11}=3>1.$$

∴ 由上题的结论得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{11\cdot12\cdot13\cdots(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}=0.$$

93. 已知: $b>a>0$, $d>0$,

$$a_n=\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

[证] 取 $y>x>0$, $u=y-x$. 由贝努利不等式, 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\gamma=\left(1+\frac{y-x}{x}\right)^\gamma>1+\gamma\frac{u}{x},\quad \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{\delta}}=\left(1+\frac{y-x}{x}\right)^{\frac{1}{\delta}}<1+\frac{u}{\delta x},$$

其中 γ, δ 是正整数. 故

$$\left(1+\frac{\gamma u}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}}<\frac{y}{x}<\left(1+\frac{u}{\delta x}\right)^{\delta},\quad 或\quad \left(\frac{x}{x+\frac{u}{\delta}}\right)^{\delta}<\frac{x}{y}<\left(\frac{x}{1+\gamma u}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

考虑 $\frac{u}{\delta}<d$ 和 $\gamma u>d$ 的情况，

$$\left(\frac{x}{x+d}\right)^{\delta}<\left(\frac{x}{x+\frac{u}{\delta}}\right)^{\delta}<\frac{x}{y}<\left(\frac{x}{x+\gamma u}\right)^{\frac{1}{\gamma}}<\left(\frac{x}{x+d}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

于是有不等式

$$\left(\frac{x}{x+d}\right)^{\delta}<\frac{x}{y}<\left(\frac{x}{x+d}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

其中 $\frac{x}{y}$ 是正分数，不等式对 γ, δ 取一切正整数均成立，取

$$x=a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ a+nd,$$
$$y=b,\ b+d,\ b+2d,\ \cdots,\ b+nd.$$

得

$$\left(\frac{a}{a+d}\right)^{\delta}<\frac{a}{b}<\left(\frac{a}{a+d}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\left(\frac{a+d}{a+2d}\right)^{\delta}<\frac{a+d}{b+d}<\left(\frac{a+d}{a+2d}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

……………………

$$\left[\frac{a+nd}{a+(n+1)d}\right]^{\delta}<\frac{a+nd}{b+nd}<\left[\frac{a+nd}{a+(n+1)d}\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

将上面 $(n+1)$ 个不等式相乘，得

$$\left[\frac{a}{a+(n+1)d}\right]^{\delta}<a_n<\left[\frac{a}{a+(n+1)d}\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{a+(n+1)d}\right]^{\delta}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{a+(n+1)d}\right]^{\frac{1}{\gamma}}=0.$$

根据迫敛性

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

〔说明〕 贝努利不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 同号，且大于 -1. 根据数学归纳法，$n=1$ 时，显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+\cdots+x_k,$$

当 $n=k+1$ 时，因 $1+x_{k+1}>0$，故

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1})$$

由 $x_ix_j\geqslant0$

$$\therefore\quad (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}.$$

故贝努利不等式成立.

本题用了 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时的结论：$(1+x)^n\geqslant1+nx$. 显然 $x>-1$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{n}x\right)^n\geqslant1+n\cdot\frac{1}{n}x=1+x,$$

两边开 n 次方，得

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}\leqslant1+\frac{1}{n}x.$$

94. 已知：$x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

［解］ 取 $y_n=\ln x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. 注意到

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\qquad \frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2},$$

因此
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

而
$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}=0.$$

根据迫敛性
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}x_n=e^{\frac{1}{2}}.$$

95. 已知：$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$.

［证］ 由不等式

$$\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2},\ 1+x>0.$$

取 $x=\frac{k}{n^2}$，可见

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k \qquad \cdots \ ①$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{4}.$$

另一方面

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)},$$

显然 $$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^4}=0.$$

由追敛性 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{4},$$

再由追敛性，从①式得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$.

(4) 单调有界数列

96. 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0,\quad 则\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

[证] $\because \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，依有界性，存在常数 M、N，使得

$$N\leqslant a_n-b_n\leqslant M\quad (n=1,2,\cdots).$$

$$\therefore\quad a_n\leqslant b_n+M<b_1+M,\ b_n\geqslant a_n-M>a_1-M,\quad (n=1,2,\cdots),$$

即数列 $\{a_n\}$ 有上界，$\{b_n\}$ 有下界．且都单调，$\therefore$ $\{a_n\}\{b_n\}$ 都收敛．

于是 $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

97. 给定 u_0 和 v_0，且 $u_0<v_0$. 设数列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 满足下列关系：

$$u_1=\frac{u_0+v_0}{2},\quad v_1=\frac{u_0+2v_0}{3};\quad u_2=\frac{u_1+v_1}{2},\quad v_2=\frac{u_1+2v_1}{3};\ \cdots$$

$$u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2},\quad v_n=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}.$$

求证：数列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 有相同的极限.

[证] (1) 用数学归纳法证明 $v_n>u_n$. 当 $n=1$ 时，

$$u_1=\frac{3u_0+3v_0}{6},\quad v_1=\frac{2u_0+4v_0}{6},\quad v_1-u_1=\frac{v_0-u_0}{6}>0,$$

$$\therefore \quad v_1>u_1.$$

假设 $n=k-1$ 时，$v_{k-1}>u_{k-1}$，则当 $n=k$ 时，

$$v_k-u_k=\frac{3u_{k-1}+3v_{k-1}}{6}-\frac{2u_{k-1}+4v_{k-1}}{6}=\frac{v_{k-1}-u_{k-1}}{6}>0,$$

$$\therefore \quad v_n>u_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

(2) 用数学归纳法证 $\{u_n\}$ 单调增加. 当 $n=1$ 时，

$$2u_1=u_0+v_0>2u_0,\quad \therefore \quad u_1>u_0.$$

假设当 $n=k-1$ 时，$u_k>u_{k-1}$，则当 $n=k$ 时，由(1)有

$$2u_k=u_{k-1}+v_{k-1}>2u_{k-1},$$

即

$$u_k>u_{k-1}.$$

$\therefore$ $\{u_n\}$ 单调增加.

(3) 用数学归纳法可证 $\{v_n\}$ 单调减少. 当 $n=1$ 时，$3v_1=u_0+2v_0<3v_0$，$\therefore$ $v_1<v_0$. 假设当 $n=k-1$ 时，$v_k<v_{k-1}$，则当 $n=k$ 时，有

$$3v_k=u_{k-1}+2v_{k-1}<3v_{k-1},\quad 即\quad v_k<v_{k-1}.$$

$\therefore$ $\{v_n\}$ 单调减少.

(4) 又 $v_n-u_n=\dfrac{v_{n-1}-u_{n-1}}{6}$，即 $\{v_n-u_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1}{6}$ 的等比数列.

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0.$$

由(2)、(3)讨论即得 $$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} v_n.$$

98. 已知数列 $\{u_n\}$, 其中 $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}$, $\cdots$ $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot4\cdots(2n)}$, $\cdots$, 求证: 数列 $\{u_n\}$ 收敛.

[证] $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2\cdot4\cdots(2n)\cdot(2n+2)}>0$,

$\therefore$ $\{u_n\}$ 单调增加.

此外,

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$

$\therefore$ $\{u_n\}$ 有界. 于是 $\{u_n\}$ 收敛.

99. 设 $x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个}}$ $(a>0)$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求其值.

[证] (1) 由数学归纳法证明其单调性: 当 $n=1$ 时,

$$\because\quad x_1=\sqrt{a},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad\therefore\quad x_2>x_1.$$

设当 $n=k-1$ 时, 有 $x_k>x_{k-1}$, 则 $x_k+a>x_{k-1}+a$,

$$\sqrt{a+x_k}>\sqrt{a+x_{k-1}},\quad\therefore\quad x_{k+1}>x_k.$$

即 $\{x_n\}$ 单调增加.

(2) 有界性:

$\because$ $\{x_n\}$ 单调增大, $\therefore$ $\frac{x_{n-1}}{x_n}<1$. 又 $x_n^2=a+x_{n-1}$, 得

$$0<x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1.$$

即 $\{x_n\}$ 有界.

(3) 由(1)(2)知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. $\because$ $x_n^2=a+x_n$, 两端取极限, 得 $A^2=a+A$, 即 $A^2-A-a=0$. 解得

$$A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\quad\left(A=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\text{ 舍去}\right).$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

100. 已知 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 求证 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

［证］ $\because\quad x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{2\sqrt{n+1}}=0.$$

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

又 $\quad\because\quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n+1}-1),$$

$$\therefore\quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}>2(\sqrt{n+1}-1)-2\sqrt{n}>-2.$$

数列 $\{x_n\}$ 有下界. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

101. 证明：若 $a_n=\underbrace{\sin\sin\cdots}_{n\text{个}}\sin x$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

［证］ (1) 先设 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则 $0\leqslant\sin x\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 由正弦函数在第一象限单调增加,故有 $0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x$. 而若 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, 则置 $t=\pi-x$, 有 $0<t<\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ 0\leqslant\sin(\sin t)\leqslant\sin t$, 即 $0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x$. 于是当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 有 $0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x$. 于是由数学归纳法,易得 $0\leqslant a_n\leqslant a_{n-1}$, $(0\leqslant x<\pi)$.

$\therefore$ $\{a_n\}$ 单调减少, 且有界, 从而 $\{a_n\}$ 收敛. 于是可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则由 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_{n-1}=\sin A$,

$$\therefore\quad A=0,$$

(2) $\because$ 当 $\pi \leqslant x < 2\pi$, 设 $y = x - \pi$, 则 $0 \leqslant y < \pi$.

$$\sin x = \sin(y+\pi) = -\sin y.$$

$$\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}} x = -\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}} y.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sin\sin\cdots\sin x = -\lim_{n\to\infty}\sin\sin\cdots\sin y = 0.$$

(3) 由周期性得 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sin\cdots\sin x = 0$.

102 设 $a>0$, $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_n = \sqrt[3]{ax_{n-1}}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$. 求证数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限.

[证] (1) 当 $a>1$ 时,

$$\because \quad x_1 = \sqrt[3]{a}, \quad x_2 = \sqrt[3]{ax_1} = \sqrt[9]{a^4}, \quad \therefore \quad x_1 < x_2.$$

假设$n=k$时有$x_k < x_{k+1}$, 则$x_{k+1} = \sqrt[3]{ax_k} < \sqrt[3]{ax_{k+1}} = x_{k+2}$. $\therefore$ $a>1$ 时, $\{x_n\}$ 单调增加.

又 $\because$ $x_1 = \sqrt[3]{a} < a$. 若 $x_k < a$, 则 $x_{k+1} = \sqrt[3]{ax_k} < \sqrt[3]{a^2} < a$, $\therefore$ 当 $a>1$ 时, $\{x_n\}$ 有上界. 因此, $\{x_n\}$ 收敛

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 由

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{ax_{n-1}},$$

得 $A = \sqrt[3]{aA}$, 即 $A^3 = aA$.

$$\therefore \quad A = \sqrt{a} \quad (A=0、A=-\sqrt{a}\text{舍去}).$$

(2) 当 $0<a<1$: $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_2 = \sqrt[3]{ax_1} = \sqrt[9]{a^4}$, $\therefore$ $x_1 > x_2$.

假设 $n=k$ 时有 $x_k > x_{k+1}$, 则 $x_{k+1} = \sqrt[3]{ax_k} > \sqrt[3]{ax_{k+1}} > x_{k+2}$, $\therefore$ $0<a<1$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少.

又由 $a>0$, $\therefore$ $x_n > a$ 即 $\{x_n\}$ 有下界, $\therefore$ $\{x_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{ax_{n-1}}$, 得 $A = \sqrt[3]{aA}$, $\therefore$ $A = \sqrt{a}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

因此, 当 $a>0$ 时, 总有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

103. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n<1$, $(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

［证］ ∵ 对任何正实数 $x>0$，有 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$.

于是
$$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}\geqslant(1-x_n)x_n,$$

亦即 $x_{n+1}>x_n(n=1, 2, \cdots)$. ∴ $\{x_n\}$ 是单调递增数列，且有上界. 故 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设极限为 L.

由 $(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)x_{n+1}=(1-L)\cdot L\geqslant\frac{1}{4}$.

又对任何正实数有 $(1-L)\cdot L\leqslant\frac{1}{4}$，故 $(1-L)\cdot L=\frac{1}{4}$. 解得 $L=\frac{1}{2}$

即
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

104. 已知 $k>0$, $x_0=a$, m 是正整数,
$$x_p=\frac{m-1}{m}x_{p-1}+\frac{k}{mx_{p-1}^{m-1}}\quad(p=1, 2, \cdots).$$

求: $\lim\limits_{p\to\infty}x_p$.

［解］ 先证明 $x_p^m>k$. 事实上 $x_p^m=x_{p-1}^m\left(1+\frac{k-x_{p-1}^m}{mx_{p-1}^m}\right)^m$. 由贝努利不等式 $(1+a)^n>1+na$, $n\geqslant2$, $a>0$ 或 $-1<a<0$. 因此
$$\left(1+\frac{k-x_{p-1}^m}{mx_{p-1}^m}\right)^m>1+\frac{k-x_{p-1}^m}{mx_{p-1}^m}m=1+\frac{k-x_{p-1}^m}{x_{p-1}^m}=\frac{k}{x_{p-1}^m}.$$
$$\therefore\quad x_p^m=x_{p-1}^m\left(1+\frac{k-x_{p-1}^m}{mx_{p-1}^m}\right)^m>k,$$

即 $\{x_p^m\}$ 有下界或 $\{x_p\}$ 有下界. 又
$$x_p-x_{p-1}=\frac{k-x_{p-1}^m}{mx_{p-1}^m}<0,$$

∴ 数列 $\{x_p\}$ 单调减少. 于是 $\{x_p\}$ 收敛.

设
$$\lim_{p\to\infty}x_p=\lambda,\ \lim_{p\to\infty}x_p=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{m-1}{m}x_{p-1}+\frac{k}{mx_{p-1}^{m-1}}\right).$$
$$\therefore\quad \lambda=\frac{m-1}{m}\lambda+\frac{k}{m\lambda^{m-1}},\ \lambda^m=k,\ \lambda=\sqrt[m]{k}.\quad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[m]{k}.$$

105. 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

[证] 由于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, $\therefore n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$, 得 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

即 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$, $\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

所以
$$a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\frac{1}{n+1}>0,$$

即 $\{a_n\}$ 有下界.

又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$, 得 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$. $\therefore a_{n+1}-a_n<0$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少.

综上所述 $\{a_n\}$ 收敛.

[说明] 1. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\gamma$, 其中 γ 称为欧拉常数, $\gamma=0.577216\cdots$;

2. 证明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$ 如下:

$$\because \sqrt[n+1]{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{n}{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore \left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

于是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,$$

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减小而趋近 e, $\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$.

106. 设 $T_n=\frac{1}{n}\left[\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n!)\right]$, 求: $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

［解］ 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\gamma$，其中 γ 为欧拉常数.

又
$$T_n=\frac{1}{n}\left[\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n!)\right]$$
$$=\frac{1}{n}[a_1+a_2+\cdots+a_n].$$

由第 71 题结论得
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[a_1+a_2+\cdots+a_n]=\lim_{n\to\infty}a_n.$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}T_n=\gamma\quad(\gamma\text{ 是欧拉常数}).$$

107. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

［解］ 由第 105 题结论
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma,$$
其中 γ 是欧拉常数.
$$\therefore\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\gamma+\ln n+\varepsilon_n,$$
且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$. 设 $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 于是
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=u_{2n}-u_n=[\gamma+\ln 2n+\varepsilon_{2n}]-[\gamma+\ln n+\varepsilon_n]$$
$$=(\ln 2n-\ln n)+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)=\ln 2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n).$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)=\ln 2.$$

(5) 柯 西 准 则

108. 任一无限十进小数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的不足近似值组成数列 $\{A_n\}$：$a_1\cdot 10^{-1}$，$a_1\cdot 10^{-1}+a_2\cdot 10^{-2}$，…，$a_1\cdot 10^{-1}+a_2\cdot 10^{-2}+\cdots+a_n\cdot 10^{-n}$，…，其中 a_i 是 0 至 9 之间的整数（$i=1, 2, \cdots$）. 求证 $\{A_n\}$ 收敛.

[证] ∵ $A_n=a_1 10^{-1}+a_2\cdot 10^{-2}+\cdots+a_n\cdot 10^{-n}$. 由柯西准则，对任给$\varepsilon>0$和任意自然数$p$，解不等式

$$|A_{n+p}-A_n|=a_{n+1}\cdot 10^{-(n+1)}+a_{n+2}\cdot 10^{-(n+2)}+\cdots+a_{n+p}\cdot 10^{-(n+p)}$$

$$\leqslant\frac{9}{10^{(n+1)}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{10^n}\left(1-\frac{1}{10^p}\right)<\frac{1}{10^n}=\frac{1}{(1+9)^n}<\frac{1}{1+9n}<\varepsilon,$$

得

$$n>\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{9}.$$

取$N=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$，有$|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$.

∴ 数列$\{A_n\}$收敛.

[说明] 本题实质上说明任一无限十进小数都收敛于一个实数.

109. 已知$x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$，**利用柯西准则证明$\{x_n\}$收敛.**

[证] 对于任给$\varepsilon>0$，及任意自然数p，解不等式，

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2^{-n}<\varepsilon$$

取$N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$，都有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. 由柯西准则：$\{x_n\}$收敛.

110. 已知$x_n=\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\sin n!}{n(n+1)}$. **利用柯西准则证明$\{x_n\}$收敛.**

[证] ∵ 对于任给$\varepsilon>0$，与任意自然数p.

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\sin(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{\sin(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\sin(n+1)!|}{(n+1)(n+2)}+\frac{|\sin(n+2)!|}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{|\sin(n+p)!|}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

解不等式得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$, 都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

∴ 由柯西准则: $\{x_n\}$ 收敛.

111. 已知 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, 利用柯西准则证明 $\{x_n\}$收敛.

[证一] 对于任给 $\varepsilon>0$, 与任意自然数 p.

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

解不等式得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$, 都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

∴ 由柯西准则数列 $\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right\}$ 收敛.

[证二] ∵ $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, ∴ 数列单调增加. 又

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+1-\frac{1}{n}<2.$$

∴ 数列有上界. ∴ $\left\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right\}$ 收敛.

112. 利用柯西准则证明 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$ 发散.

［分析］ 柯西准则验证数列发散的说法为：存在某个 $\varepsilon_0>0$，若对任意的 N，总存在某个 $n>N$ 和某个自然数 p，使得 $|x_{n+p}-x_n|>\varepsilon_0$.

［证］ ∵ 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对任意的 N，取 $n>N$ 以及 $p=n$，有

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

∴ 按柯西准则 $\{x_n\}$ 发散.

113. 利用柯西准则证明 $x_n=1+\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ 发散.

［证］ 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对于任意的 N，取 $n>N$ 以及 $p=n$，有

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln(n+2)}+\cdots+\frac{1}{\ln(n+p)}$$

$$>\frac{p}{\ln(n+p)}>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

∴ 按柯西准则，$\{x_n\}$ 发散.

114. 利用柯西准则，证明数列 $a_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 发散.

［证］ ∵ 取 $\varepsilon_0=1$，对于任意的 N，取 $n>N$ 以及 $p=3n+1$，有

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|(n+p)\sin\frac{(n+p)\pi}{2}-n\sin\frac{n\pi}{2}\right|,$$

$$\text{原式}=\left|(4n+1)\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}-n\sin\frac{n\pi}{2}\right|$$

$$=\left|(4n+1)-n\sin\frac{n\pi}{2}\right|\geqslant|4n+1|-\left|n\sin\frac{n\pi}{2}\right|$$

$$>3n>\varepsilon_0.$$

$$\therefore\quad |a_{n+p}-a_n|>3n>1=\varepsilon_0.$$

按柯西准则，$\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 发散.

115. 求证：若存在常数 c，对任意自然数 n，有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

［证］ 设 $A_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$，则 $\{A_n\}$ 是单调增加数列，且有上界 c，所以 $\{A_n\}$ 收敛.

由柯西准则，$\because$ $\{A_n\}$ 收敛，$\therefore$ 对于任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$，对任意自然数 p 有 $|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon$. 而

$$|x_{n+p}-x_n|=|(x_{n+p}-x_{n+p-1})+(x_{n+p-1}-x_{n+p-2})+\cdots+(x_{n+1}-x_n)|$$

$$\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$=|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon.$$

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

［说明］ 数列 $\{x_n\}$，若存在常数 c，使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$

则称 $\{x_n\}$ 是有界变差数列.

116. 对于开普勒方程 $x=m+\varepsilon\sin x(0<\varepsilon<1)$，设

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \cdots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \cdots.$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，证明$\xi$是开普勒方程的唯一解.

［证］ $\because\quad x_2-x_1=\varepsilon(\sin x_1-\sin x_0)=2\varepsilon\cdot\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2},$

$$\therefore\quad |x_2-x_1|\leqslant2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1-x_0}{2}\right|\leqslant2\varepsilon\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}=\varepsilon|x_1-x_0|.$$

同理，
$$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon|x_{n-1}-x_n|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|.$$
$$\therefore\quad |x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$$
$$\leqslant(\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1})|x_1-x_0|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|x_1-x_0|.$$

利用第115题的结果，得 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ 两边取极限，得 $\xi=m+\varepsilon\sin\xi$. 因此 ξ 是 $x=m+\varepsilon\sin x$ 的解.

下面证明 ξ 是方程的唯一解：若 η 也是方程的解，$\eta=m+\varepsilon\sin\eta$，则
$$|\xi-\eta|=\varepsilon|\sin\xi-\sin\eta|\leqslant\varepsilon|\xi-\eta|$$
而 $0<\varepsilon<1$，故 $\xi=\eta$. 即 ξ 是开普勒方程的唯一解.

§2. 函数的极限

(1) 函数极限的概念

117. 已知函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，求 δ 的值，使

(1) 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，满足 $\left|y-\dfrac{3}{5}\right|<0.1$;

(2) 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，满足 $\left|y-\dfrac{3}{5}\right|<0.01$;

(3) 证明 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}$.

［解］ (1) 欲使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{3}{5}\right|<0.1$，当 $|x-2|<1$ 即 $1<x<3$ 时，有
$$\left|\frac{2(x^2-4)}{5(x^2+1)}\right|=\frac{2(x+2)}{5(x^2+1)}\cdot|x-2|<\frac{2\cdot5}{5}\cdot|x-2|<0.1,$$
由此解得 $|x-2|<0.05$. 故取 $0<\delta<0.05$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有
$$\left|y-\frac{3}{5}\right|<0.1.$$

(2) 欲使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{3}{5}\right|<0.01$，当 $|x-2|<1$ 即 $1<x<3$ 时，有

$$\left|\frac{2(x^2-4)}{5(x^2+1)}\right|=\frac{2(x+2)}{5(x^2+1)}\cdot|x-2|<\frac{2\cdot 5}{5}\cdot|x-2|<0.01,$$

解得 $|x-2|<0.005$. 故取 $0<\delta<0.005$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有

$$\left|y-\frac{3}{5}\right|<0.01.$$

(3) 对任给 $\varepsilon>0$, 解不等式: $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$, 当 $|x-2|<1$ 即 $1<x<3$ 时,

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|=\frac{2(x+2)}{5(x^2+1)}|x-2|<2|x-2|<\varepsilon,$$

解得 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon. \quad \therefore \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}.$$

118. 求证: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$.

[证] 对任给 $\varepsilon>0$,

$$\because \quad \left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right|=\left|\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|,$$

当 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$ 时,由

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{2x+1}{2(x+1)}\cdot|x-1|<\frac{5}{2}|x-1|<\varepsilon,$$

解得 $0<|x-1|<\frac{2\varepsilon}{5}$. 取 $\delta=\min\left\{1,\ \frac{2\varepsilon}{5}\right\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

119. 求证: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x+1}=1$

[证] 对任给 $\varepsilon>0$,

$$\because \quad \left|\frac{x^3+1}{x+1}-1\right|=|(x^2-x+1)-1|=|x^2-x|=|x|\cdot|x-1|.$$

当 $|x-1|<1$ 即有 $0<x<2$ 时,由

$$\left|\frac{x^3+1}{x+1}-1\right|=|x|\cdot|x-1|<2\cdot|x-1|<\varepsilon,$$

解得 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x^3+1}{x+1}-1\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}\frac{x^3+1}{x+1}=1.$$

120. 求证: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}=1.$

[证] 对任给 $\varepsilon>0$,

$$\because\quad \left|\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}-1\right|=\frac{|x^2+x|}{2x^2+x+1}=\frac{|x|\cdot|x+1|}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}$$

$$<\frac{|x|\cdot|x+1|}{\frac{7}{8}}.$$

不妨取 $\delta_1=\frac{1}{2}$, 当 $0<|x+1|<\frac{1}{2}$, 即 $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$ 时,有 $|x|<\frac{3}{2}$. 由

$$\left|\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}-1\right|<\frac{|x|\cdot|x+1|}{\frac{7}{8}}<\frac{12}{7}|x+1|<2|x+1|<\varepsilon,$$

解不等式得 $|x+1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, 当 $0<|x+1|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}-1\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}=1.$$

121. 求证: $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

[证] ∵ 对任给 $\varepsilon>0$, 由

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|<|x|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x|<\delta$ 时,有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

122. 求证：$\lim\limits_{x\to a}x^m=a^m$ （m 是自然数）.

［证］ 不妨限定 $|x-a|<1$，即有

$$|x|=|a-(a-x)|<|a|+|a-x|<1+|a|.$$

对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|x^m-a^m|=|x-a|\cdot|x^{m-1}+x^{m-2}\cdot a+\cdots+a^{m-1}|$$
$$\leqslant|x-a|\cdot(|x|^{m-1}+|x|^{m-2}\cdot|a|+\cdots+|a|^{m-1})$$

及 $|x|^k<(1+|a|)^k$ 得 $|x^m-a^m|<|x-a|\cdot m\cdot(1+|a|)^{m-1}<\varepsilon$，即

$$|x-a|<\frac{\varepsilon}{m(1+|a|)^{m-1}}.$$

取
$$\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{m(1+|a|)^{m-1}}\right\};$$

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|x^m-a^m|<\varepsilon$.

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}x^m=a^m.$$

123. 求证：

(1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$； (2) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

［证］ (1) 对任给 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，由

$$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0\right|=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon,$$

解得 $1+e^{\frac{1}{x}}>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $e^{\frac{1}{x}}>\dfrac{1}{\varepsilon}-1>1$，两边取对数得 $\dfrac{1}{x}>\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)>0$，即

$$0<x<\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)},\quad 取\quad \delta=\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)},$$

当 $0<x<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

(2) 对任给 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 由 $\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-1\right|=1-\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon$, 解得

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}>1-\varepsilon, \quad 即 \quad 1+e^{\frac{1}{x}}<\frac{1}{1-\varepsilon}, \quad e^{\frac{1}{x}}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

$\therefore \frac{1}{x}<\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. $\because x<0$, 由 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $0<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<1$,

$$\therefore \quad \ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<0. \quad 则 \quad x>\frac{1}{\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

$$0<-x<-\frac{1}{\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}=\frac{1}{\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

取 $\delta=\frac{1}{\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$, 当 $0<-x<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-1\right|<\varepsilon$.

$$\therefore \quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1.$$

124. 求证: $\lim\limits_{x\to a-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}=\frac{\pi}{2}$.

[证] 对任给 $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, 由

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}<\varepsilon,$$

得 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$. 由于正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, 故两边取正切, 得

$$\frac{1}{a-x}>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\operatorname{ctg}\varepsilon.$$

$\therefore a-x<\operatorname{tg}\varepsilon$. 取 $\delta=\operatorname{tg}\varepsilon$, 当 $0<a-x<\delta$ 时, 有

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to b-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a-x}=\frac{\pi}{2}.$$

125. 已知函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, 求 X 的值，使

(1) 当 $|x|>X$ 时，满足 $|y-1|<0.1$;

(2) 当 $|x|>X$ 时，满足 $|y-1|<0.01$;

(3) 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1$.

[解] (1) 欲使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|<0.1$, 即 $\dfrac{2}{x^2+1}<0.1$, 解得 $|x|>\sqrt{19}$. 取 $X>\sqrt{19}$, 当 $|x|>X$, 则有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|<0.1$.

(2) 欲使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|<0.01$, 即 $\dfrac{2}{x^2+1}<0.01$, 解得 $|x|>\sqrt{199}$. 取 $X>\sqrt{199}$, 当 $|x|>X$, 则有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|<0.01$.

(3) 对任给 $\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|=\dfrac{2}{x^2+1}<\dfrac{2}{x^2}<\varepsilon$, 解不等式得

$$|x|>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

取 $X=\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$, 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$.

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

126. 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\dfrac{1}{2}$.

[证] 对任给 $\varepsilon>0$, 取 $x>0$, 由

$$\left|\sqrt{x^2+x}-x-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\right|=\left|\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)^2}\right|$$

$$=\frac{1}{2(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}<\frac{1}{4x}<\varepsilon,$$

解得 $x>\dfrac{1}{4\varepsilon}$. 取 $X=\dfrac{1}{4\varepsilon}$, 当 $x>X$ 时，有

$$\left|\sqrt{x^2+x}-x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}.$$

127. 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=0.$

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{x-1}}<\varepsilon,$$

解得 $\sqrt{x-1}>\dfrac{1}{\varepsilon}$，$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}+1$. 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}+1$，当 $x>X$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0.$$

128. 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon,$$

解得 $x>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$. 取 $X=\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，有

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|<\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

129. 求证：(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\dfrac{\pi}{2}$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\dfrac{\pi}{2}$.

［证］ (1) 不妨假设 $x<0$，由反正切函数的值域可知：$-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}x<0$. 对任给 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$，考虑

$$\left|\operatorname{arc\,tg}x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{\pi}{2}<\varepsilon,$$

亦即
$$\operatorname{arc\,tg} x<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

由正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，对不等式两边取正切，得
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x<\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\operatorname{ctg}\varepsilon.\quad\therefore\quad x<-\operatorname{ctg}\varepsilon.$$

取 $X=\operatorname{ctg}\varepsilon$，当 $x<-X$ 时，有
$$\left|\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.\quad\therefore\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 不妨假设 $x>0$，由反正切函数的值域可知，$0<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2}$. 对任给 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，考虑
$$\left|\operatorname{arc\,tg} x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x<\varepsilon,$$

亦即
$$\operatorname{arc\,tg} x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon.$$

由正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，对不等式两边取正切，得
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\operatorname{ctg}\varepsilon.\quad\therefore\quad x>\operatorname{ctg}\varepsilon.$$

取 $X=\operatorname{ctg}\varepsilon$，当 $x>X$ 时，有
$$\left|\operatorname{arc\,tg} x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.\quad\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}.$$

130. 求证：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x-5}=\dfrac{2}{3}.$

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，
$$\because\quad \left|\frac{2x+3}{3x-5}-\frac{2}{3}\right|=\frac{19}{3|3x-5|}<\frac{7}{|3x-5|}.$$

取 $X_1=5$，当 $|x|>X_1=5$ 时，有 $|3x-5|\geqslant 2|x|+(|x|-5)>2|x|$.
$$\therefore \text{由}\quad \left|\frac{2x+3}{3x-5}-\frac{2}{3}\right|<\frac{7}{|3x-5|}<\frac{7}{2|x|}<\varepsilon,$$

解得 $|x|>\frac{7}{2\varepsilon}$. 取 $X=\max\left\{X_1,\ \frac{7}{2\varepsilon}\right\}$，当 $|x|>X$ 时，有
$$\left|\frac{2x+3}{3x-5}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon.\quad\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x-5}=\frac{2}{3}.$$

131. 求证：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (a>1)$;

$$(2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty.$$

[证] (1) 对任给 $M>1$, 解不等式 $a^x>M=a^{\log_a M}$, 由 $a>1$ 指数函数单调增加, 得 $x>\log_a M$. 取 $X=\log_a M$, 当 $x>X$ 时, $a^x>M$.

$$\therefore \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (a>1).$$

(2) 对任给 $M>0$, 由 $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$ 知, 当 $x<-2$ 时有 $\dfrac{1}{x+1}<0$, 从而 $\dfrac{x^2}{x+1}<x$, 取 $X=\max\{2, M\}$, 当 $x<-X$ 时, 有

$$\frac{x^2}{x+1}<-M. \quad \therefore \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty.$$

132. 求证：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+1}{x^2}=\infty$; (2) $\lim\limits_{x\to+0}\log_3 x=-\infty$.

[证] (1) 对任给 $M>0$, 取 $\delta_1=\dfrac{1}{4}$, 当 $|x|<\dfrac{1}{4}$ 时有

$$\left|\frac{2x+1}{x^2}\right|>\frac{1-2|x|}{x^2}>\frac{1}{2x^2},$$

再由 $\dfrac{1}{2x^2}>M$ 解得 $|x|<\sqrt{\dfrac{1}{2M}}$. 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{4}, \sqrt{\dfrac{1}{2M}}\right\}$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{2x+1}{x^2}\right|>M$. $\therefore \quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+1}{x^2}=\infty$.

(2) 对任给 $M>0$, 解不等式

$$\log_3 x<-M=\log_3\frac{1}{3^M}.$$

得 $0<x<\dfrac{1}{3^M}$. 取 $\delta=\dfrac{1}{3^M}$, 当 $0<x<\delta$ 时, $\log_3 x<-M$.

$$\therefore \quad \lim_{x\to+0}\log_3 x=-\infty.$$

(2) 柯 西 准 则

133. 用柯西准则证明 $y=\sin x$ 在 $x=x_0$ 处收敛.

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|\sin x'-\sin x''|=\left|2\cos\frac{x'+x''}{2}\cdot\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x'-x''}{2}\right|=|x'-x_0+x_0-x''|$$

$$\leqslant|x'-x_0|+|x''-x_0|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$.

由柯西准则，$y=\sin x$ 在 $x=x_0$ 处收敛.

134. 用柯西准则证明 $y=x^2$ 在 $x=x_0$ 处收敛.

［证］ 在 $|x'^2-x''^2|=|x'+x''|\cdot|x'-x''|\leqslant(|x'|+|x''|)\cdot|x'-x''|$ 中当 $|x'-x_0|<1$，$|x''-x_0|<1$ 时

$$|x'|=|x'-x_0+x_0|\leqslant|x'-x_0|+|x_0|<1+|x_0|,$$

$$|x''|=|x''-x_0+x_0|\leqslant|x''-x_0|+|x_0|<1+|x_0|.$$

有 $$|x'^2-x''^2|\leqslant(|x'|+|x''|)\cdot|x'-x''|<2(1+|x_0|)\cdot|x'-x''|$$

$$\leqslant 2(1+|x_0|)\cdot[|x'-x_0|+|x''-x_0|],$$

可见，只要

$$0<|x'-x_0|<\frac{\varepsilon}{4(1+|x_0|)},\quad 0<|x''-x_0|<\frac{\varepsilon}{4(1+|x_0|)},$$

上式右端必小于 ε.

因此，取 $\delta=\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{4(1+|x_0|)}\right\}$，当 $0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$.

由柯西准则，$y=x^2$ 在 $x=x_0$ 处收敛.

135. 用柯西准则证明 $y=\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时收敛.

［证］ ∵ 对任给 $\varepsilon>0$，不妨取 $x'>x''>0$. 由

$$\left|\frac{\sin x'}{x'}-\frac{\sin x''}{x''}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x'}{x'}\right|+\left|\frac{\sin x''}{x''}\right|\leqslant\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\leqslant\frac{2}{x''}<\varepsilon.$$

解得 $x''>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $X=\frac{2}{\varepsilon}$，当 $x'>X$，$x''>X$ 时，有

$$\left|\frac{\sin x'}{x'}-\frac{\sin x''}{x''}\right|<\varepsilon.$$

∴ 由柯西准则，$y=\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时收敛.

136. 用柯西准则证明 $y=\sin x$ 当 $x\to+\infty$ 时发散.

[证] 取 $\varepsilon_0=1$，对任何 $X>0$，总存在

$$x'=2[X]\pi+\frac{\pi}{2}>X,\ x''=2[X]\pi+\frac{3\pi}{2}>X,$$

而 $$|\sin x'-\sin x''|=|1-(-1)|=2>1=\varepsilon_0.$$

$$\therefore\quad y=\sin x\quad 当\ x\to+\infty\ 时发散.$$

[说明] 也可用函数极限和数列极限的关系来讨论.

取 $$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad x_n'=2n\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=+\infty.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$$

$$\therefore\quad y=\sin x\quad 当\ x\to+\infty\ 时发散.$$

137. 求证：$f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 当 $x\to0$ 时发散.

[证] 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任何 $\delta>0$ 总存在 n，使

$$x'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\quad 和\quad x''=\frac{1}{2n\pi}$$

有 $|x'-x''|<\delta$ 但

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\cos 2n\pi\right|=1>\varepsilon_0.$$

$$\therefore\quad f(x)=\cos\frac{1}{x}\quad 当\ x\to0\ 时发散.$$

[说明] 也可以用函数极限与数列极限的关系来讨论.

取 $$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad x_n'=\frac{1}{2n\pi}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0.$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1.$$

$$\therefore \quad f(x) = \cos\frac{1}{x} \quad \text{当 } x\to 0 \text{ 时发散.}$$

(3) 求函数的极限

138. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

[解] (1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

$$= -\frac{3}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(x^2+x+1)} = -1.$$

139. 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

[解] 原式 $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

140. 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right]$.

［解］ $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

141. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$。

［解］ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2})(\sqrt{x^4+1}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

142. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

［解］ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\cdots+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{x}\right)^{10}}=100.$$

143. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

［解］ (i) 若 $a=0$, 则

$$\lim_{x\to a+0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0+0}\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

(ii) 若 $a\neq0$, 则

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\cdot\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}},$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\cdot\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

144．求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}\quad(a>b)$.

［解］ (i) $a\neq0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x^2-a^2)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}.$$

(ii) $a=0$，则由(i)的结论可知极限不存在.

145．求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

［解］ ∵ $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$$

$$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}].$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.$$

146．求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$；(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$.

［解］ ∵ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，且 $\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{arc\,tg} x$ 都是有界变量，得

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=\operatorname{arc\,tg}1=\dfrac{\pi}{4}$.

147. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

[解]　(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(\sin x+1)(2\sin x-1)}{(\sin x-1)(2\sin x-1)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot(\operatorname{tg}^2x-3)}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\cdot\left(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\cdot\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cdot\frac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\cdot\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{-1}{\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}}=-24.$$

148. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-3)^x+4^x}{(-3)^{x+1}+4^{x+1}}$.

［解］　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^x+1}{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^x\cdot(-3)+4}=\dfrac{1}{4}$.

149. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-3\cdot\sqrt[3]{x}+2}{x-8}$;

(3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{60+x}-8}{\sqrt[3]{60+x}-4}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

［解］　(1) 作变量代换 $x=t^6$, 有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

(2) 作变量代换 $x=t^3$, 有

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-3\cdot\sqrt[3]{x}+2}{x-8}=\lim_{t\to2}\frac{t^2-3t+2}{t^3-8}=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t-1)}{(t-2)(t^2+2t+4)}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{t-1}{t^2+2t+4}=\frac{1}{12}.$$

(3) 作变量代换 $x+60=t^6$, 有

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{60+x}-8}{\sqrt[3]{60+x}-4}=\lim_{t\to2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=3.$$

(4) 作变量代换 $x=t^{12}$, 有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1}=\frac{4}{3}.$$

150. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$　(m、n 都是正整数).

［解］　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{m}{n}.$$

151. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^{\frac{p}{q}}-1}{(x+1)^{\frac{r}{s}}-1}$　(p、q、r、s 均是自然数).

[解] 令 $x+1=t^{qs}$.

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{p}{q}}-1}{(x+1)^{\frac{r}{s}}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{ps}-1}{t^{rq}-1},$$

由上题结论,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{p}{q}}-1}{(x+1)^{\frac{r}{s}}-1}=\frac{ps}{rq}.$$

152. 求下列极限: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1-\dfrac{x}{n}}{x^2}$ (其中 n 是自然数)。

[解] (1) 令 $\sqrt[n]{1+x}-1=t$, 则 $x=(t+1)^n-1$.

于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(t+1)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{c_n^1t+c_n^2t^2+\cdots+c_n^nt^n}=\frac{1}{n}.$$

(2) 同样, 令 $\sqrt[n]{1+x}-1=t$, 则 $x=(t+1)^n-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1-\dfrac{x}{n}}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\dfrac{1}{n}[(t+1)^n-1]}{[c_n^1t+c_n^2t^2+\cdots+c_n^nt^n]^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\dfrac{1}{n}[c_n^1t+c_n^2t^2+\cdots+c_n^nt^n]}{[c_n^1t+c_n^2t^2+\cdots+c_n^nt^n]^2}=\frac{-\dfrac{1}{n}c_n^2}{(c_n^1)^2}$$

$$=\frac{-\dfrac{n(n-1)}{2n}}{n^2}=-\frac{n-1}{2n^2}.$$

[说明] 本题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$ 的结论, 常可用来计算某些函数的极限,如:

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{1+f(x)}-1}{f(x)}=\dfrac{1}{n}$.

153. 求极限: (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1+\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$ （n 是正整数）.

［解］ (1) 令 $t=x-1$，则 $x\to1$ 时有 $t\to0$. 且利用第 152 题结论

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt[3]{1+t}-1)\cdots(\sqrt[n]{1+t}-1)}{t^{n-1}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}\cdots\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}=\frac{1}{n!}.$$

(2) 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$，有 $t\to0+0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$$

$$=\lim_{t\to0+0}\left(\sqrt[n]{\frac{(a_1t+1)}{t}\cdot\frac{(a_2t+1)}{t}\cdots\frac{(a_nt+1)}{t}}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0+0}\frac{\sqrt[n]{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_nt)}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+0}\frac{\sqrt[n]{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_nt)}-1}{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_nt)-1}$$

$$\cdot\lim_{t\to0+0}\frac{(1+a_1t)(1+a_2t)\cdots(1+a_nt)-1}{t}$$

$$=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

154. 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求证：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}\quad（m\text{ 是正整数}）.$$

［解］ $\because\ \lim\limits_{t\to0}P(x)=0$.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{P(x)}{x}$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\lim_{x\to0}\frac{a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

155. 设 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$. 求证: $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k}=0$.

[证] $\because\quad \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x}\cdot a_k=0$.

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k}=\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k}-\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k(\sqrt{x+k}-\sqrt{x})=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\cdot k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}.$$

于是 $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k}=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\cdot k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}=0$.

156. 就 k 的下列不同取值, 讨论 $\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}$(其中 $a\neq 0$):

(1) 正整数; (2) 负整数; (3) 零.

[解] (1) 当 k 为正整数时, 分子分母同时除以 x^k, 得

$$\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}=\frac{\left(a+\frac{1}{x}\right)^k}{1+\frac{A}{x^k}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{x}\right)^k}{1+\frac{A}{x^k}}=a^k.$$

(2) 当 k 为负整数时, 若 $A\neq 0$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}=0;$$

若 $A=0$, 分子分母同除以 x^k, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{x}\right)^k}{1}=a^k.$$

(3) 当 k 为零时,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^k}{x^k+A}=\frac{1}{1+A}.$$

157. 已知: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-kx-b)=0$. 求: k, b.

［解］ 由已知条件有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-kx-b}{x}=0,$$

此即 $$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1,$$

代入已知条件，得

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

∴ 当 $k=1$，$b=-\frac{1}{2}$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-kx-b)=0.$$

158. 求常数 a、b 的值，使 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}=4$.

［解］ 要使 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}$ 收敛，必须 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+a}-b=0$，

∴ $b=\sqrt{1+a}$. 于是，

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2\sqrt{1+a}}=4.$$

∴ $a=-\frac{63}{64}$，$b=\frac{1}{8}$.

159. 已知：$f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$，且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2,\quad \lim_{x\to2}f(x)=3.$$

求：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

［解］ $f(x)$的分子、分母同除以 x^2，

$$f(x)=\frac{ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}.$$

$$\because\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=2,$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\left(ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}\right)=2,$$

即可推得 $a=0$, $b=2$. 于是

$$f(x)=\frac{2x^2+cx+d}{x^2-x-2}.\quad \because\quad \lim_{x\to2}f(x)=3,\ \lim_{x\to2}x^2-x-2=0,$$

$$\therefore \text{必须}\quad \lim_{x\to2}(2x^2+cx+d)=8+2c+d=0,$$

即 $d=-8-2c$. 因此

$$f(x)=\frac{2x^2+cx-8-2c}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(2x+c+4)}{(x-2)(x+1)}.$$

$$\because\quad \lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+c+4)}{(x-2)(x+1)}=\frac{8+c}{3}=3,$$

$$\therefore\quad c=1,\ d=-10.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}.$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}=5.$$

160. 求极限 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

[解]　$\because x>0$, $\therefore$ $\dfrac{3^x}{5}<\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)<\dfrac{2\cdot3^x}{5}$.

只要 x 充分接近 0, 以上各项均小于 1. 由指数函数的单调性质得

$$3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{2\cdot3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

又
$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0,$$

由迫敛性, 得
$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0.$$

161. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{a^x}$　$(a>1,\ p>0)$.

[解]　设 $x>1$, 总存在正整数 k, $k\leqslant x<k+1$, 故

$$\frac{k^p}{a^{k+1}}<\frac{x^p}{a^x}<\frac{(k+1)^p}{a^k}.$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^p}{a^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^p}{a^{k+1}}\cdot a=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^p}{a^{k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^p}{a^k}\cdot\frac{1}{a}=0.$$

由追敛性，
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0\quad(a>1,\ p>0).$$

162. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}$.

［解］ 由 $0<\left|x\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}\right|\leqslant|x|$，而 $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$

由追敛性
$$\lim_{x\to0}x\sqrt{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}=0.$$

163. 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]$； (2) $\lim\limits_{x\to+0}\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}$；
(3) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ $(a,\ b>0)$.

［解］ (1) $\because \frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，有
$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1.$$

当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，有
$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)\geqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant1.$$

$$\because\ \lim_{x\to0}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=1,$$

$\therefore$ 由追敛性，得
$$\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

(2) 取 $0<x<a$，有 $0<\frac{x}{a}<1$，$\left[\frac{x}{a}\right]=0$.

$$\therefore\ \lim_{x\to+0}\left[\frac{x}{a}\right]\cdot\frac{b}{x}=\lim_{x\to+0}0\cdot\frac{b}{x}=0.$$

(3) 取 $0<x<b$，有 $\frac{b}{x}>1$，$0<\frac{b}{x}-1\leqslant\left[\frac{b}{x}\right]\leqslant\frac{b}{x}$，

$$\left(\frac{b}{x}-1\right)\frac{x}{a}\leqslant\left[\frac{b}{x}\right]\cdot\frac{x}{a}\leqslant\frac{b}{x}\cdot\frac{x}{a}=\frac{b}{a}\quad(a,\ b>0).$$

而
$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{b}{x}-1\right)\cdot\frac{x}{a}=\frac{b}{a}.$$

由追敛性
$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}.$$

164. 求下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\sin\beta x}\quad(\alpha,\ \beta\neq0)$；

(2) $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin(\alpha^n)}{\sin^m\alpha}\quad$ (m、n 是正整数)；(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{x\sin2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

［解］ (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin(\alpha^n)}{\sin^m\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin(\alpha^n)}{\alpha^n}\cdot\frac{\alpha^m}{\sin^m\alpha}\cdot\frac{\alpha^n}{\alpha^m}$，

$$\therefore\quad\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha^n}{\sin^m\alpha}=\begin{cases}0, & n>m\\ 1, & n=m\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{x\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sin2x}=\frac{3}{4}.$$

(4) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x\cdot\operatorname{tg}x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin x\cdot\operatorname{tg}x}\cdot x=0.$$

165. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{\sin^2px}\quad(p\neq0)$.

［解］ 若 $m=\pm n$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{\sin^2px}=0$，

若 $m\neq\pm n$，则

$$\frac{\cos mx-\cos nx}{\sin^2 px}=\frac{2\sin\frac{m+n}{2}x\cdot\sin\frac{n-m}{2}x}{\sin^2 px}$$

$$=\frac{2\sin\frac{m+n}{2}x\cdot\sin\frac{n-m}{2}x\cdot\frac{(n^2-m^2)}{4}x^2}{\frac{m+n}{2}x\cdot\frac{n-m}{2}x\cdot\sin^2 px},$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{\sin^2 px}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{m+n}{2}x}{\frac{m+n}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{n-m}{2}x}{\frac{n-m}{2}x}$$

$$\cdot\frac{\frac{(n^2-m^2)}{4p^2}\cdot(px)^2}{\sin^2 px}=2\cdot\frac{n^2-m^2}{4p^2}=\frac{n^2-m^2}{2p^2}.$$

166. 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

［解］ (1) 利用 $\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B=\dfrac{\sin(B-A)}{\sin A\cdot\sin B}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\cdot\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}-\frac{\sin(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\sin x}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 a}\quad(a\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

(2) 由上题同样方法变形：

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\{[\operatorname{ctg}(a+2x)-\operatorname{ctg}(a+x)]-[\operatorname{ctg}(a+x)-\operatorname{ctg}a]\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{\sin[(a+x)-(a+2x)]}{\sin(a+2x)\cdot\sin(a+x)}-\frac{\sin[a-(a+x)]}{\sin(a+x)\cdot\sin a}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{\sin(a+x)}\cdot\frac{[\sin(a+2x)-\sin a]}{\sin(a+2x)\cdot\sin a}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin(a+x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\cos(a+x)}{\sin(a+2x)\sin a}$$

$$=\frac{2\cos a}{\sin^3 a}\quad(a\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

167. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

[解一] $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}$$

$$+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}.$$

[解二] $$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt[3]{\cos x}\cdot(\sqrt[6]{\cos x}-1)}{\sin^2 x}$$

∵ 令 $\sqrt[6]{\cos x}=t$, 则 $\cos^2 x=t^{12}$, $\sin^2 t=1-t^{12}$. 且 $x\to0$, $t\to1$.

$$\therefore\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\sqrt[3]{\cos x}\cdot\lim_{t\to1}\frac{t-1}{1-t^{12}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{-1}{1+t+t^2+\cdots+t^{11}}=-\frac{1}{12}.$$

168. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

[解] $$\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{x^2\cdot(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{x\sin x}{x^2}}$$

$$\because \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{x\sin x}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

169. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$; (2) $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$;

[解] (1) $\sin(a+x)-\sin(a-x)=2\sin x\cos a$,

而
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)[1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta],$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)=\operatorname{tg}2x\cdot[1+\operatorname{tg}(a+x)\cdot\operatorname{tg}(a-x)].$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos a}{\operatorname{tg}2x\cdot[1+\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)]}$$
$$=\cos^3 a.$$

(2)
$$\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}.$$

若 $\beta\neq 0$, 则

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\lim_{\alpha\to\beta}\frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{2\cos\beta\sin\beta}{2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{2\beta}.$$

若 $\beta=0$, 则

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}=1.$$

170. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; (2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\dfrac{x-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

[解] (1) 令 $1-x=t$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(1-t)\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}t}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

(2) 令 $x-a=t$.

$$\lim_{x\to a}\left(\sin\frac{x-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right)=\lim_{t\to 0}\left[\sin\frac{t}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(a+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\sin\frac{t}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2a}t\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)\cdot\frac{\frac{\pi}{2a}t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}t}\cdot\frac{\frac{t}{2}}{\frac{\pi}{2a}t}=-\frac{a}{\pi}$$

(3) 令 $x-\frac{\pi}{2}=t$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x\cdot\sin x}{\cos x}-\frac{\pi}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cdot\cos t-\pi}{-\sin t}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{2t\cdot\cos t}{\sin t}\right)=-2.$$

171. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\arcsin x}$;

[解] (1) 令 $\arcsin x=t$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}.$$

(2) 令 $\arcsin x=t$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\arcsin x}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t-t}{2\sin t+t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\sin t}{t}-1}{\frac{2\sin t}{t}+1}=\frac{1}{3}.$$

172. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-5}{x^3+3}\right)^{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-5}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+3x+5}\right)^{x^2+3x+1}$.

[解] (1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-5}{x^3+3}\right)^{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}}\right)^{x^3}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x^3}\right)^{-\frac{x^3}{5}}\right]^{-5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3}}\right]^{3}}$$

$$=\frac{e^{-5}}{e^3}=e^{-8}.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right]^{-a}}=e^{2a}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{3x}}{1-\frac{4}{3x}}\right)^{2x-5}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-5}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}\cdot\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-\frac{3x}{4}}\right]^{-\frac{8}{3}}\cdot\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-5}},$$

$\because$ $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-5}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-5}=1,$$

$\therefore$ $$原式=\frac{e^{\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{8}{3}}}=e^4.$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2+3x+5}\right)^{x^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{x^2+3x}}{1+\frac{5}{x^2+3x}}\right)^{x^2+3x+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x^2+3x}\right)^{\frac{x^2+3x}{4}}\right]^4\cdot\left(1+\frac{4}{x^2+3x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x^2+3x}\right)^{\frac{x^2+3x}{5}}\right]^5\cdot\left(1+\frac{5}{x^2+3x}\right)}=e^{-1}.$$

［说明］ 此类题也可直接用如下的方法求解:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-5}{x^3+3}\right)^{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{x^3+3}\right)^{x^3+3}\cdot\left(1-\frac{8}{x^3+3}\right)^{-3}=e^{-8}.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x-a}\cdot\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{a}=e^{2a}.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x-4}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right]^4\cdot\left(1+\frac{6}{3x-4}\right)^{-\frac{7}{3}}=e^4.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2+3x+5}\right)^{x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+3x+5}\right)^{x^2+3x+5}$

$\cdot\left(1-\frac{1}{x^2+3x+5}\right)^{-4}=e^{-1}.$

173. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sec x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$.

［解］ (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}=e.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(\sec^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}=e.$

(3) $$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sec x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1-\cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}\right]^{-1}}=e^2.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{2}\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}.$

174. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

［解］ 利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 以及函数极限与数列极限的关系，得

$$\lim_{n\to\infty}3^n\cdot\sin\frac{\pi}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin x}{x}=\pi.$$

175. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，其中 a、$b>0$.

［解］ 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0)$. 由函数极限和数列极限的关系，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln b.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right]^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}\right\}^{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{\frac{2}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{\frac{2}{n}}}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

176. 已知：$a_n,\ b_n>0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}a_n^n=a,\quad \lim_{n\to\infty}b_n^n=b,$$

$a,\ b>0,\ p,\ q>0$，且 $p+q=1$. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)^n=a^pb^q$.

［证］ 由函数极限和数列极限的关系，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-1}{\ln x_n}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}=1.$$

于是可以推断在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ 的条件下，

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n-1)=\ln x \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty} x_n^n=x$$

是等价的. 又已知 $\lim_{n\to\infty} a_n^n=a$, $\lim_{n\to\infty} b_n^n=b$.

由上面证明,可推断

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n-1)=\ln a,\quad \lim_{n\to\infty} n(b_n-1)=\ln b.$$

取
$$x_n=pa_n+qb_n$$

$$n(x_n-1)=n[pa_n+qb_n-1]=pn(a_n-1)+qn(b_n-1).$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n(x_n-1)=p\ln a+q\ln b=\ln a^pb^q.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} x_n^n=\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)=a^p\cdot b^q.$$

177. 设 a_0 是任意常数, $a_{n+1}=\sin a_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$.

［解］ 先证 $\{a_n\}$ 收敛. 不妨设 $a_0=a$, $0<a<\pi$. 显然 $a_n>0(n=0, 1, 2, \cdots)$. 设 $f(x)=x-\sin x$. 当 $0<x_1-x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(x_1-x_2)-(\sin x_1-\sin x_2)\\&=(x_1-x_2)-2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\\&>(x_1-x_2)-2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\\&=2\left[\frac{1}{2}(x_1-x_2)-\sin\frac{(x_1-x_2)}{2}\right]>0.\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 单调增加,由 $f(0)=0$, $a_n-a_{n+1}=a_n-\sin a_n=f(a_n)>0$. 得数列 $\{a_n\}$ 是单调减少, 而且下界为零,故 $\{a_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$, 那末 $L=\sin L$, 即得 $L=0$.

当然对 a_0 取 $a+2k\pi$, $a\in(0, \pi)$ 时均有此结论. 同样 $a\in(-\pi, 0)$ 时证法亦如此.

下面考虑 na_n^2 的极限值. 当 $a_0\neq k\pi$ 时,由函数极限和数列极限的关系,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\csc^2 a_n-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{3}.$$

如 $y_n=\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\frac{1}{3}$. 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k^2}-\frac{1}{a_{k-1}^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na_n^2}-\frac{1}{na_0^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}na_n^2=3\quad(a_0\neq k\pi).$$

若 $a_0=k\pi$，则
$$\lim_{n\to+\infty}na_n^2=0.$$

§3. 无穷小量(无穷大量)的阶

178. 当 $x\to0$ 时，确定下列无穷小量的阶：

(1) $x^3+1000x^2$;　　(2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$;

(3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$;　　(4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

［解］ (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+1000x^2}{x^2}=1000$. $\therefore$ $x^3+1000x^2$ 是 x 的二阶无穷小($x\to0$).

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$. $\therefore$ $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小($x\to0$).

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{1+\sqrt{x}}=1$. $\therefore$ $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$ 是 x 的等价无穷小($x\to0$).

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{7x^{10}}{x^3+1}}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{7}{x^3+1}=7$. $\therefore$ $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$ 是 x 的 10 阶无穷小($x\to0$).

179. 当 $x\to0$ 时，确定下列无穷小量的阶：

(1) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$;　　(2) $\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$　$(x>0)$;

(3) $e^{\sqrt{x}}-1\quad(x>0)$; (4) $e^{\sin x}-1$;

(5) $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$; (6) $\sqrt{1-x^2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

[解] (1) ∵ 由于

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1=\frac{(1+\sqrt[3]{x})-1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}+1},$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}+1}=\frac{1}{3}.$$

即 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ 是 x 的 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小$(x\to0)$.

(2) $\because\ \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+2}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+0}\left[\frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+2}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-1\right]=\lim_{x\to+0}\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+2}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-1\right)$$

$$=-1.$$

$\therefore\ \sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小$(x\to+0)$.

(3) ∵ 令 $e^{\sqrt{x}}=t$, $\sqrt{x}=\ln t$.

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to1+0}\frac{t-1}{\ln t}=\lim_{t\to1+0}\frac{1}{\ln[1+(t-1)]^{\frac{1}{t-1}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

$\therefore\ e^{\sqrt{x}}$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小$(x\to+0)$.

(4) 令 $\sin x=t$.

$$\because\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\therefore\ e^{\sin x}-1$ 与 x 是等价无穷小$(x\to0)$.

(5) $\because\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x\sin x})}{\sqrt{x\sin x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x\sin x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\ln[1+\sqrt{x\sin x}]^{\frac{1}{\sqrt{x\sin x}}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x}=1,$$

$\therefore$ $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ 与 x 是等价无穷小($x\to0$).

(6) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{1-x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$\therefore$ $\sqrt{1-x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ 与 x 是同阶无穷小($x\to0$).

180. 当 $x\to0$ 时,确定下列无穷小量的阶:

(1) $\sin(\sqrt{1+x}-1)$; (2) $e^{x^2}-\cos x$;

(3) $\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$; (4) $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$.

[解] (1) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $\sin(\sqrt{1+x}-1)$ 是 x 的同阶无穷小($x\to0$).

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ $e^{x^2}-\cos x$ 是 x 的 2 阶无穷小($x\to0$).

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$-\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

$\because$ $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$\therefore$ $$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^{\frac{4}{3}}-\lim_{x\to0}2\left[\frac{e^x-1}{x}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=\lim_{x\to0}x^{\frac{4}{3}}\cdot\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}-2=-2.$$

$\therefore\ \ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e-1)^2}$ 是 x 的 $\frac{2}{3}$ 阶无穷小($x\to 0$).

(4) 令 $\sqrt{4-x^2}-2=t^2$, $x^2=4-(t^2+2)^2$.

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\sqrt{4-x^2}-2)}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{4-(t^2+2)^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}\cdot\lim_{t\to 0}\left(-\frac{t^2}{t^4+4t^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t^2+4}\right)=-\frac{1}{4}.$$

$\therefore\ \arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$ 是 x 的 2 阶无穷小($x\to 0$).

181. 当 $x\to 1$, 确定下列无穷小量的阶:

(1) $(x-1)^3\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;　　(2) $(x-1)^3\cdot\sin\frac{1}{x}$.

[解] (1) $\because$ $\left|\dfrac{(x-1)^3\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^3}\right|=\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|$,

$$1\leqslant\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 3,$$

$\therefore\ (x-1)^3\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ 是 $(x-1)$ 的三阶无穷小($x\to 1$).

(2) $\because$ $\left|\dfrac{(x-1)^3\sin\frac{1}{x}}{(x-1)^3}\right|=\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, 而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ 在 $x=\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{2\pi}$, …时为零, $\therefore$ 当 $x\to 1$ 时函数 $(x-1)^3\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小量, 但与 $(x-1)^3$ 不可比较大小, 然而却有

$$\left|(x-1)^3\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x-1|^3.$$

182. 当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时, 求证 $\sec x-\operatorname{tg}x$ 和 $\pi-2x$ 是同阶无穷小.

[证] $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\operatorname{tg}x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)\cdot\cos x}$.

令 $\frac{\pi}{2}-x=t$,

$$\therefore\quad 原式=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2t\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{2t\cdot\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}t^2}\cdot\frac{t}{\sin t}=\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ $\sec x-\mathrm{tg}\,x$ 与 $\pi-2x$ 是同阶无穷小 $\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$.

183．当 $x\to1$ 时，求证：(1) $1-x$ 和 $a(1-\sqrt[k]{x})$ 是同阶无穷小($a\neq0$, k 是正整数)；(2) a 为何值时，$1-x$ 和 $a(1-\sqrt[k]{x})$ 是等价无穷小.

［解］ 令 $x^{\frac{1}{k}}=t$. 则

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{a(1-\sqrt[k]{x})}=\lim_{t\to0}\frac{1-t^k}{a(1-t)}=\frac{k}{a}.$$

$\therefore$ $1-x$ 和 $a(1-\sqrt[k]{x})$ 是同阶无穷小($x\to1$).

且当 $\frac{k}{a}=1$, 即 $a=k$ 时, $1-x\sim a(1-\sqrt[k]{x})$ $(x\to1)$.

184．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m、n 是自然数).

［解］ (1) 按牛顿二项式展开，有

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(c_n^2m^2-c_m^2n^2)x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(c_n^2m^2-c_m^2n^2+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\frac{nm(n-m)}{2}.$$

(2) 设 $x=1+t$. 则当 $x\to1$, $t\to0$. 有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim_{t\to0}\left[\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{n}{nt+c_n^2t^2+o(t^2)}-\frac{m}{mt+c_m^2t^2+o(t^2)}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(nc_m^2-mc_n^2)t^2+o(t^2)}{nmt^2+o(t^2)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(nc_m^2-mc_n^2)+\frac{o(t^2)}{t^2}}{nm+\frac{o(t^2)}{t^2}}$$

$$=\frac{nc_m^2-mc_n^2}{mn}=\frac{1}{2}(m-n).$$

［说明］ 本题运用舍弃高阶无穷小的原则. 设 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 当 $x\to x_0$ 时是无穷小量, 并且其中 $f_s(x)$ 比一切其它 $f_i(x)$ 是较低阶的无穷小. 于是有 $F(x)=\sum_{i=1}^{k}f_i(x)=f_s(x)+o(f_s(x))$. 若 $G(x)$ 是当 $x\to x_0$时的无穷小量. 显然 $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_s(x)+o(f_s(x))}{G(x)}$.

考虑到
$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{f_s(x)}=1,$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_s(x)}{G(x)}\cdot\frac{F(x)}{f_s(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_s(x)}{G(x)}.$$

这种舍弃高阶无穷小的原则, 在计算有关于无穷小函数商与乘积的极限时, 常常有用. 也称为等价无穷小代换.

185. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$;　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\arcsin x)^3-1}{e^{\operatorname{tg}x}-1}$.

［解］ (1) 利用等价无穷小代换:

$$\operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\quad(x\to 0).$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 利用等价无穷小代换: $(1+x)^3-1\sim 3x$,

$$(1+\arcsin x)^3-1\sim 3\arcsin x,\quad 且\quad \arcsin x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x\quad(x\to 0).$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+\arcsin x)^3-1}{e^{\operatorname{tg}x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3.$$

186. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{e^{\sin^3 x}-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^{-3x^2})\sin^2 x}{x^4}$.

［解］ (1) 利用等价无穷小代换：$\operatorname{tg} x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$,

$$e^x-1\sim x \quad (x\to 0).$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{e^{\sin^3 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 利用等价无穷小代换：$1-e^x\sim -x\ (x\to 0)$.

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{-3x^2})\cdot\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot\sin^2 x}{x^4}=3.$$

187. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\ln(1+x+x^2)}$.

［解］ (1) 利用等价无穷小代换：$\ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x$,

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \quad (x\to 0).$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

(2) 利用等价无穷小代换：

$$\sqrt{1+(x^2+x)}-1\sim\frac{x^2+x}{2},$$

$$\ln[1+(x^2+x)]\sim x^2+x \quad (x\to 0).$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\ln(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+x}{2}}{x^2+x}=\frac{1}{2}.$$

188. 当 $x\to+\infty$ 时，确定下列函数无穷大的阶数：

(1) $\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$； (2) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$； (3) $\sqrt{x+\sqrt{x^3}}$

［解］ (1) $\because\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^{-\frac{5}{6}}}{1}=1$,

$\therefore\ \sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$ 是 x 的 $\dfrac{3}{2}$ 阶无穷大($x\to+\infty$).

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}=1$.

$\therefore \sqrt{x+\sqrt{x}}$ 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷大 $(x\to+\infty)$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}{x^{\frac{3}{4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+1}=1$.

$\therefore \sqrt{x+\sqrt{x^3}}$ 是 x 的 $\dfrac{3}{4}$ 阶无穷大 $(x\to+\infty)$.

189. 当 $x\to1$ 时，确定下列函数关于 $\dfrac{1}{x-1}$ 无穷大的阶数:

(1) $\dfrac{x}{x^3-1}$; (2) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (3) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; (4) $\dfrac{1}{\ln x}$.

[解] (1) $\because$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x}{x^3-1}}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}}{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \dfrac{x}{x^3-1}$ 是 $\dfrac{1}{x-1}$ 的同阶无穷大 $(x\to1)$.

(2) $\because$ $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{2}$.

$\therefore \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 是 $\dfrac{1}{x-1}$ 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷大 $(x\to1-0)$.

(3) $\because$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{\sin\pi x}}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sin\pi(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)}\cdot\dfrac{(-1)}{\pi}$

$$=-\frac{1}{\pi}.$$

$\therefore \dfrac{1}{\sin\pi x}$ 是 $\dfrac{1}{x-1}$ 的同阶无穷大 $(x\to1)$.

(4) ∵ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}}$

$=1$.

∴ $\dfrac{1}{\ln x}$ 是 $\dfrac{1}{x-1}$ 的等价无穷大($x\to1$).

190. 求证当 x 充分大时，有下列不等式:

(1) $x^3-7x^2+100<0.01x^4$;　　(2) $\ln^{10}(x+10)<x^{0.1}$.

[解] (1) ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-7x^2+100}{0.01x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{100}{x^4}}{0.01}=0$.

∴ 当 x 充分大时，$x^3-7x^2+100>0$, $0.01x^4>0$, 由函数极限的不等式性质，有 $\dfrac{x^3-7x^2+100}{0.01x^4}<\varepsilon=1$, 即 $x^3-7x^2+100<0.01x^4$.

(2) ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}(x+10)}{x^{0.1}}=0$.

∴ 当 x 充分大时，$\ln^{10}(x+10)>0$, $x^{0.1}>0$, 由函数极限的不等式性质，有 $\dfrac{\ln^{10}(x+10)}{x^{0.1}}<\varepsilon=1$, 即 $\ln^{10}(x+10)<x^{0.1}$.

第二章　函数的连续性

1．函数连续的概念

(1) 函数在 x_0 点处连续　对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

(2) 函数在 x_0 点的左连续与右连续.

若
$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0),$$
则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处右连续.

若
$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0),$$
则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点处左连续.

函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 既右连续又左连续.

(3) 函数在 (a,b) 内连续　若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(4) 函数在 $[a,b]$ 上连续　若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称函数 f 在闭区间上连续.

2．函数的间断点

(1) 第一类间断点　若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在，但两者不相等，则称 x_0 为第一类间断点.

(2) 第二类间断点　若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 中至少有一个

不存在，则称 x_0 为第二类间断点.

(3) 可去间断点 若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在且相等，但不等于 $f(x_0)$ 或者 $f(x)$ 在 x_0 无定义，则称 x_0 是可去间断点.

3. 函数连续的柯西准则

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续的充要条件是，对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $f(x)$ 的定义域内任意两点 x' 和 x''，当 $|x'-x_0|<\delta$，$|x''-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

4. 连续函数的运算

(1) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则它们的和、差、积、商 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 都在 x_0 连续，但对商的情况还要求 $g(x_0)\neq 0$.

(2) 复合函数的连续性 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f(\varphi(x))$，又设 φ 在点 x_0 连续，$u_0=\varphi(x_0)$，f 在 u_0 连续，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 连续.

5. 函数的一致连续

(1) 对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对某区间内任意两点 x'，x''，当满足 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 则称函数 f 在此区间一致连续.

(2) 康托定理 闭区间连续函数必一致连续.

§1. 函数连续的概念

191. 求证下列函数在定义域内连续:

(1) $f(x)=2x^2+3x+4$; (2) $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$.

［证］ (1) $f(x)=2x^2+3x+4$ 的定义域为一切实数. 设 x_0 为任意一点，对任给 $\varepsilon>0$,

$$\because\quad |(2x^2+3x+4)-(2x_0^2+3x_0+4)|=|(2x^2-2x_0^2)+(3x-3x_0)|$$
$$\leqslant 2|x+x_0|\cdot|x-x_0|+3|x-x_0|.$$

若取 $\delta_1=\dfrac{|x_0|}{2}$, $|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$, 则有

$$|x+x_0|=|x-x_0+2x_0|\leqslant|x-x_0|+2|x_0|<\frac{5}{2}|x_0|.$$

从而

$$2|x+x_0|\cdot|x-x_0|+3|x-x_0|<5|x_0|\cdot|x-x_0|+3|x-x_0|$$
$$=(5|x_0|+3)\cdot|x-x_0|,$$

解不等式 $(5|x_0|+3)|x-x_0|<\varepsilon$ 得

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{5|x_0|+3}.$$

于是取
$$\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\ \frac{\varepsilon}{5|x_0|+3}\right\},$$

当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|(2x^2+3x+4)-(2x_0^2+3x_0+4)|<\varepsilon$.

即 $f(x)=2x^2+3x+4$ 在定义域内连续.

(2) $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 的定义域为 $x\neq-\dfrac{4}{3}$ 的一切实数. 设 x_0 为定义域内任意一点.

对于任给 $\varepsilon>0$,

$$\because\quad \left|\frac{x+2}{3x+4}-\frac{x_0+2}{3x_0+4}\right|=\left|\frac{2(x-x_0)}{(3x_0+4)(3x+4)}\right|,$$

若取 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\left|x_0-\dfrac{4}{3}\right|$, $|x-x_0|<\dfrac{1}{2}\left|x_0-\dfrac{4}{3}\right|$, 则

$$|3x+4|=3\left|x+\frac{4}{3}\right|=3\left|\frac{4}{3}-x_0+x_0-x\right|$$
$$>3\left[\left|\frac{4}{3}-x_0\right|-|x-x_0|\right]>\frac{3}{2}\left|\frac{4}{3}-x_0\right|$$

$$\therefore\quad \frac{1}{|3x+4|}<\frac{2}{3\left|\dfrac{4}{3}-x_0\right|}=\frac{2}{|4-3x_0|}.$$

解不等式
$$\left|\frac{2(x-x_0)}{(3x_0+4)(3x+4)}\right|<\frac{4|x-x_0|}{|3x_0+4|\cdot|4-3x_0|}<\varepsilon,$$

得
$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon|16-9x_0^2|}{4},$$

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon|16-9x_0^2|}{4},\ \frac{1}{2}\left|x_0-\frac{4}{3}\right|\right\}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有
$$\left|\frac{x+2}{3x+4}-\frac{x_0+2}{3x_0+4}\right|<\varepsilon,$$

即 $g(x)=\frac{x+2}{3x+4}$ 在定义域内连续.

192．求证下列函数在定义域内连续：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$；(2) $f(x)=\frac{1}{x}$.

［证］　(1) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 的定义域为一切实数．设 x_0 为任意一点．对任给 $\varepsilon>0$，由
$$|\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x_0+1}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x_0+1)}+\sqrt[3]{(x_0+1)^2}}$$
$$<\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{(x_0+1)^2}}<\varepsilon,$$

即
$$|x-x_0|<\sqrt[3]{(x_0+1)^2}\cdot\varepsilon.$$

取 $\delta=\sqrt[3]{(x_0+1)^2}\cdot\varepsilon$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有
$$|\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x_0+1}|<\varepsilon,$$

即 $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 在定义域内连续.

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$，定义域为 $x\neq0$ 的一切实数．设 x_0 为定义域内任意一点．对任给 $\varepsilon>0$，
$$\because\quad\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|},$$

若取 $\delta_1=\frac{|x_0|}{2}$，$|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$，则
$$|x|=|x_0+x-x_0|>|x_0|-|x-x_0|>\frac{|x_0|}{2}.$$

于是，由 $\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{|x-x_0|}{\frac{|x_0|^2}{2}}<\varepsilon$，得 $|x-x_0|<\frac{x_0^2}{2}\varepsilon$.

取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\ \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$，即

$f(x)=\frac{1}{x}$ 在定义域内连续.

193. 求证函数 $f(x)=\ln x$ 在定义域内连续.

[证] $f(x)=\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 设 $x_0>0$, 对任给 $\varepsilon>0$, 解不等式

$$|\ln x-\ln x_0|=\left|\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right|<\varepsilon.$$

于是 $-\varepsilon<\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)<\varepsilon$, 由对数函数单调性, 得

$$e^{-\varepsilon}<1+\frac{x-x_0}{x_0}<e^{\varepsilon}, \quad \text{即} \quad x_0(e^{-\varepsilon}-1)<x-x_0<x_0(e^{\varepsilon}-1).$$

取 $\delta=\min\{x_0(1-e^{-\varepsilon}), x_0(e^{\varepsilon}-1)\}$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|=|\ln x-\ln x_0|<\varepsilon.$$

即 $f(x)=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 连续.

194. 设函数 $f(x)=x+0.01[x]$. 证明对于每一个 $\varepsilon>0.01$, 总存在 $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$, 使得 $|x'-x|<\delta$ 时, $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$. 而对于 $0<\varepsilon\leqslant 0.01$ 时, 并非对一切 x 都满足上述不等关系. 求出函数的间断点.

[解] ∵ 对任何数 x 与 x' 都可表示为 $x=n+r$, $x'=n'+r'$, 其中 $0\leqslant r<1$, $0\leqslant r'<1$, n、n' 是整数.

$$|x-x'|=|n+r-n'-r'|\geqslant|n-n'|-|r-r'|\geqslant|[x]-[x']|-1.$$

故

$$|[x]-[x']|<|x-x'|+1.$$

对于每一个 $\varepsilon>0.01$. 由不等式

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x')|&=|x+0.01[x]-x'-0.01[x']|\\&\leqslant|x-x'|+0.01|[x]-[x']|\\&\leqslant|x-x'|+0.01(|x-x'|+1)\\&=1.01|x-x'|+0.01<\varepsilon.\end{aligned}$$

解得 $|x-x'|<\frac{\varepsilon-0.01}{1.01}$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon-0.01}{1.01}$, 当 $|x-x'|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, 命题成立.

当 $0<\varepsilon\leqslant 0.01$ 时, 若取 $x=n$, $x'=n-\frac{1}{k}$, 其中 $k=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1(0<\delta<1)$.

则 $$[x]=n,\ [x']=n-1,\ |x-x'|=\frac{1}{k}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\delta}\right]+1}<\delta.$$

然而

$$|f(x)-f(x')|=\left|n+0.01[n]-\left(n-\frac{1}{k}+0.01\left[n-\frac{1}{k}\right]\right)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{k}+0.01\right|>\varepsilon.$$

∴ 当 $x=n(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$时，不满足$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$，故它们是函数的间断点．

若 $x=n+r,\ x'=n+r'(0<r<1、0<r'<1)$，则对任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$．当 $|x-x'|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x')|=|n+r+0.01[n+r]-(n+r'+0.01[n+r'])|=|r-r'|<\varepsilon$．

∴ 函数在$(n,\ n+1)(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$这些区间内都连续．于是函数的间断点为 $x=n(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$．

195．找出下列函数的间断点，并说明属于第几类间断点？若是可去间断点，则将其补为连续函数．

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$；(2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$；(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；(5) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$．

［解］(1) 有理分式函数，使分母为零的点是它的间断点．∴ $x=1$ 是间断点．按极限的运算性质：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3},$$

∴ $x=1$ 是可去间断点．若定义

$$f(1)=\frac{2}{3},\text{ 即 } f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}, & x\neq1,\\ \dfrac{2}{3}, & x=1,\end{cases}$$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 也连续．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ 定义域为 $x>0,\ x\neq1$．当 $x=1$ 时分母为零，∴ $x=1$ 是间断点．

$$\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\ln x}=+\infty,\quad \lim_{x\to1-0}\frac{1}{\ln x}=-\infty,$$

∴ $x=1$ 是第二类间断点.

(3) 当 $x=k$(k 取整数)时,有 $\sin\pi x=0$.

∴ $x=k$(k 取整数)是函数的间断点.

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{1}{\sin\pi x}=\infty$ (k 取整数), ∴ $x=k$(k 取整数)是第二类间断点.

(4) 当 $x=0$ 时分母为零. ∴ $x=0$ 是函数的间断点. 又

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

∴ $x=0$ 是第一类间断点.

(5) $x=1$, 0 是函数的间断点.

(i) $$\lim_{x\to+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=-\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=+\infty,$$

∴ $x=0$ 是函数的第二类间断点.

(ii) $$\lim_{x\to1+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1,\quad \lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

∴ $x=1$ 是函数的第一类间断点.

196. 找出下列函数的间断点,并说明属于第几类间断点:

(1) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$; (2) $y=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1}$ $(a>1)$.

[解] (1) $x=0$ 是 $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

∴ $x=0$ 是第一类间断点.

(2) $x=0$ 是间断点.

$$\lim_{x\to+0}a^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}a^{\frac{1}{x}}=0,$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1}=1,\quad \lim_{x\to-0}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{a^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

∴ $x=0$ 是第一类间断点.

197．找出下列函数的间断点，并说明属于第几类间断点：

(1) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$　(2) $y=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$

［解］ (1) ∵ $\lim\limits_{x\to+0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，∴ $x=0$ 是第二类间断点。

(2) ∵ 在 $x\neq0$ 时左右极限都不存在．∴ x 取非零的任何实数，均是函数的第二类间断点．$x=0$ 是它的连续点．

［说明］ (1) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

只要取
$$x_n'=\frac{1}{2n\pi}\quad 和\quad x_n''=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},$$

当 $n\to+\infty$ 时

$$\lim_{n\to+\infty}x_n'=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}x_n''=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=0.$$

但是
$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=0;\quad \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n''}=1.$$

根据函数极限和数列极限的关系，$\lim\limits_{x\to+0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

(2)
$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

对任何非零实数 x_0，总存在一有理数数列 x_n'，$x_n'\to x_0$，还存在一无理数数列 x_n''，$x_n''\to x_0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}x_n'=x_0,\ \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=\lim_{n\to\infty}(-x_n'')=-x_0,$$

而 $x_0\neq-x_0$，根据函数极限与数列极限的关系，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在。

∴ 任何非零的实数，都是第二类间断点．

198．研究复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 与 $g(x)=1+x^2$；

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 与 $g(x)=x(1-x^2)$；

(3) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 与 $g(x)=1+x-[x]$.

[解] (1) $f\circ g=\operatorname{sgn}(1+x^2)\equiv 1$, ∴ 它在$(-\infty, +\infty)$内连续.

$$g\circ f=1+(\operatorname{sgn}x)^2=\begin{cases}2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ 2, & x<0.\end{cases}$$

∴ $x=0$ 是函数的可去间断点.

$$\text{(2)}\quad f\circ g=\operatorname{sgn}[x(1-x^2)]=\begin{cases}1, & -\infty<x<-1,\\ -1, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1,\\ -1, & 1<x<\infty,\\ 0, & \text{其余}\ (x=0,\ x=\pm 1).\end{cases}$$

∴ $x=0$, ± 1 是函数的第一类间断点.

$g\circ f=\operatorname{sgn} x\cdot(1-\operatorname{sgn}^2 x)\equiv 0$, ∴ 它在$(-\infty, +\infty)$内连续.

(3) ∵ $x=K+t$ $0\leqslant t<1$, K 为整数.

∴ $f\circ g=\operatorname{sgn}(1+x-[x])=\operatorname{sgn}(1+K+t-K)\equiv 1$, $f\circ g$ 在$(-\infty, +\infty)$内连续.

$g\circ f=1+\operatorname{sgn} x-[\operatorname{sgn} x]\equiv 1$, $g\circ f$ 在$(-\infty, +\infty)$内连续.

199. 研究函数的连续性,并说明理由:

$$f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

[解] 若 $\{x_n\}$ 为有理数数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. 则

$$\lim_{x_n\to x_0} f(x)=\lim_{x_n\to x_0}\sin \pi x_n=\sin \pi x_0,$$

若 $\{x_n\}$ 为无理数数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. 则 $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x)=0$.

可见在 $x_0=0$, ± 1, ± 2, …时, 函数连续. 在其余点处函数间断, 且为第二类间断点.

200. 研究函数 $f(x)=[x]\sin \pi x$ 的连续性,并说明理由.

[解] 当 $n<x<n+1$ 时 (n 是整数), $[x]=n$, ∴ $y=[x]\sin \pi x=n\sin \pi x$, 由正弦函数的连续性, 显然当 $n<x<n+1$ 时函数连续.

当 $x=n$ 时, 研究 $n-\dfrac{1}{2}<x<n+\dfrac{1}{2}$ (n 取自然数)的情况.

$0\leqslant n-1<[x]<n$,

$$\therefore\quad 0\leqslant(n-1)|\sin\pi x|\leqslant[x]|\sin\pi x|\leqslant n|\sin\pi x|,$$

$$\lim_{x\to n} n|\sin\pi x|=0,\ \lim_{x\to n}(n-1)|\sin\pi x|=0,$$

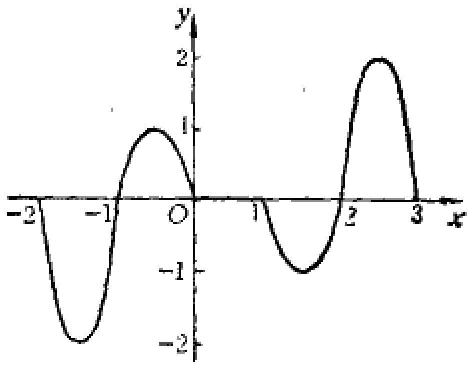
由迫敛性，得

$$\lim_{x\to n}[x]|\sin\pi x|=0.$$

则 $\lim_{x\to n}[x]\sin\pi x=f(n)=0$.

$\therefore$ $[x]\sin\pi x$ 在 $x=n$(n 是自然数)时连续.

同理可证 x 取零与负整数点处亦连续.



$\therefore y=[x]\sin\pi x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，函数图象如图所示.

201. 求证 $\chi(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\{\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\}$ 处处间断($\chi(x)$ 为狄利克雷函数).

［证］　若 $x=\dfrac{p}{q}$, p、q 为互质的自然数.则总有 $m>q$. 于是

$$m!x=m!\cdot\frac{p}{q}=1\cdot2\cdot3\cdots(q-1)(q+1)\cdots m\cdot p$$

$\because$ $m!x$ 必为偶数，$\therefore$ $\cos\pi m!x=1$, $\chi(x)=1$.

若 x 为无理数，则 $m!x$ 为无理数. $\therefore$ $|\cos\pi m!x|<1$. 得

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0,$$

故 $\chi(x)=0$. 因此

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

任取 x_0, $\{x_n'\}$ 为有理数数列，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi(x_n')=1$.

$\{x_n''\}$ 为无理数数列，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi(x_n'')=0$. $\therefore$ χ 在 x_0 间断.

再由 x_0 的任意性得狄利克雷函数处处间断.

202. 研究函数 $f(x)=x\cdot\chi(x)$ 的连续性($\chi(x)$ 是狄利克雷函数，参见上一题).

［解］　任取 $x_0\neq0$. 若 $\{x_n'\}$ 为有理数数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} x_n' \cdot 1 = x_0.$$

若 $\{x_n''\}$ 为无理数数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} x_n'' \cdot 0 = 0.$$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处间断．假如 $x_0=0$，则显然有

$$0 \leqslant |f(x)-f(0)| = |f(x)| \leqslant |x|.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

$\therefore f(x) = x\cdot\chi(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续．

203．已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ 3-ax^2, & x>1. \end{cases}$ 求 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续．

［解］

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3-ax^2) = 3-a,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x+1) = 2.$$

函数在 $x=1$ 连续的充要条件是既左连续，又右连续，即 $f(1+0)=f(1-0)=f(1)$．$\therefore 3-a=2$，$a=1$．当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续．

204．设 $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ A\sin x+B, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x\geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

求 A、B 的值，使函数在定义域上连续．

［解］ 易知函数在 $\left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 内是连续．当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \cos x = 0,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} A\sin x + B = A+B,$$

$\therefore$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，只有满足 $A+B=0$ 函数才连续．

当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} A\sin x+B=-A+B,$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-0} -2\sin x=2,$$

∴ 在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，只有满足 $B-A=2$ 函数才连续．解得 $B=1,\ A=-1$.

∴ 当 $B=1,\ A=-1$ 时，函数在定义域内连续．

205．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}, & x\neq1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

求 a、b 的值，使函数在 $x=1$ 处连续．

［解］　由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=f(1)=1$，得

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}+b)=0,\quad \therefore\quad b=-\sqrt{1+a}.$$

再由

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})\cdot(x+1)}=\frac{1}{4\sqrt{1+a}}=1,$$

得 $a=-\frac{15}{16}$．∴ 当 $a=-\frac{15}{16}$，$b=-\frac{1}{4}$ 时，函数在 $x=1$ 处连续．

206．设对任给 $\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$ 上连续，问：(1) $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内是否连续？(2) $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是否连续？

［解］　(1) 对任何给定的 $x_0\in(a,\ b)$，总存在 $\varepsilon>0$，使 $a+\varepsilon<x_0<b-\varepsilon$，已知 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$ 连续，∴ $f(x)$ 在 x_0 连续．再由 x_0 的任意性得 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 连续．

(2) 不一定连续．例如

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ x, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1,\end{cases}$$

对任何 $\varepsilon>0$, f 在$[\varepsilon, 1-\varepsilon]$上连续，但它在$[0, 1]$不连续.

207. 若函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 连续，而函数 $g(x)$在点 $x=x_0$ 虽有定义但不连续，则函数 (1) $f(x)+g(x)$; (2) $f(x)\cdot g(x)$在点 $x=x_0$ 的连续性如何?

［解］ (1) 函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 $x=x_0$ 是不连续的，这是因在点 $x=x_0$ 处，若 $F(x)$连续，则 $g(x)=F(x)-f(x)$也连续，此与已知矛盾.

(2) 若 $f(x_0)\neq0$, 则 $G(x)=f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 是不连续的，因在点 $x=x_0$ 处，若 $G(x)$连续，则由 $g(x)=\dfrac{G(x)}{f(x)}$ 也连续，此与假设矛盾.

而若 $f(x_0)=0$, 则 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 的连续性不确定. 例如，设 $f(x)=0$,

$$g(x)=\begin{cases}1, & (x>0),\\ 0, & (x=0),\\ -1, & (x<0),\end{cases}$$

则对任何x, $f(x)g(x)=0$, $\therefore f\cdot g$ 在点 $x=0$ 处连续. 另设 $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, 虽然 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$, 但是 $G(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f\cdot g$ 在点 $x=0$ 处间断.

208. 若函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 $x=x_0$ 都有定义但都不连续，则函数 (1) $f(x)+g(x)$; (2) $f(x)\cdot g(x)$在点 $x=x_0$ 是否必不连续，举出适当的例子.

［解］ 在点 $x=x_0$ 处的连续性不确定. 例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0.\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=0$ 都不连续，而 (1) $f(x)+g(x)=0$; (2) $f(x)\cdot g(x)=-1$, $\therefore f(x)+g(x)$和 $f(x)\cdot g(x)$都在点 $x=0$ 连续.

又如设　$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0,\end{cases}$

则 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=0$ 都不连续.

209. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则 $|f(x)|$ 也在 (a, b) 内连续. 反之则未必.

［证］ 设 x_0 为 (a, b) 上任一点. 对任给 $\varepsilon>0$，$\because f(x)$ 在 x_0 连续，$\therefore$ 存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

此外又有　$||f(x)|-|f(x_0)||<|f(x)-f(x_0)|$.

这样便得到对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon$，即 $|f(x)|$ 在 x_0 连续. $\therefore$ $|f(x)|$ 在 (a, b) 内连续.

反之，设　$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 取}(0, 1)\text{内有理数},\\ -1, & x \text{ 取}(0, 1)\text{内无理数},\end{cases}$

则 $|f(x)|\equiv 1$，$|f|$ 在 $(0, 1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不连续.

210. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 内连续，设

$$F(x)=\max_{x\in(a,b)}\{f(x),\ g(x)\}\text{ 与 }G(x)=\min_{x\in(a,b)}\{f(x),\ g(x)\},$$

试证 $F(x)$，$G(x)$ 在 (a, b) 内皆连续.

［证］

$$\because\quad F(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$G(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

若 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a, b) 连续，则由连续函数性质 $f(x)+g(x)$ 和 $|f(x)-g(x)|$ 都在 (a, b) 内连续.

于是 $F(x)$，$G(x)$ 在 (a, b) 内连续.

211. 黎曼函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & \text{当 } x=\dfrac{q}{p},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$

p、q 为互质自然数，求证：(1) 函数 R 在 $(0, 1)$ 内任何点存在

极限；(2) 函数 R 在(0, 1)内的任何无理点连续；(3) 函数 R 在(0, 1)内任何有理点间断.

［证］ (1) 先证明如下事实：对于任给 $\varepsilon>0$，满足 $R(x)>\varepsilon$ 的点 $x\in(0,1)$的集合是一个有限集.

显然(0, 1)内一切无理点 x，都有 $R(x)=0<\varepsilon$. 故(0, 1)内一切无理点不满足 $R(x)>\varepsilon$.

当 $\varepsilon>1$ 时，由 $R(x)$ 值域可知，(0, 1)内没有点满足 $R(x)>\varepsilon$.

对于任给 $0<\varepsilon<1$，总存在自然数 P，满足 $P=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 注意到小于 P 的自然数 p 仅有 $P-1$ 个，$p<P=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$，$\frac{1}{p}\geqslant\varepsilon$. 说明满足 $\frac{1}{p}>\varepsilon$ 的自然数 p 只有 $P-1$ 个. 于是(0, 1)内形如 $\frac{q}{p}$ 的既约分数也只会是有限个. 所以(0, 1)内满足 $R(x)>\varepsilon$ 的有理点只有有限个.

总之，对于任给 $\varepsilon>0$，满足 $R(x)>\varepsilon$ 的点 $x\in(0,1)$ 的集合是一个有限集.

其次证明对于任意 $x_0\in(0,1)$，$R(x)$在 x_0 处收敛.

对于任给 $\varepsilon>0$，因为仅有有限个点满足 $R(x)>\varepsilon$，不妨设为 x_1、x_2、…、x_k. 使 $R(x_i)\geqslant\varepsilon\ (i=1, 2, \cdots, k)$. 如果 $x_0\neq x_i\ (i=1, 2, \cdots, k)$. 则取 $\delta=\min\{|x_0-x_1|、|x_0-x_2|、\cdots、|x_0-x_k|\}$；如果 x_0 等于某个 x_j，则取 $\delta=\min\{|x_0-x_1|, \cdots, |x_0-x_{j-1}|, |x_0-x_{j+1}|, \cdots, |x_0-x_k|\}$. 于是

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|R(x)|<\varepsilon$.

∴ 由函数极限的定义，对任意 $x_0\in(0,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

(2) 当 x_0 是(0, 1)内的无理点时：

(i) $R(x_0)=0$(由定义)；

(ii) 由(1)中讨论 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)=0$.

∴ 由函数在 x_0 处连续的定义可得，(0, 1)内一切无理点均连续.

(3) 当 x_0 是(0, 1)内的有理点时：

(i) $x_0=\frac{q}{p}$，p、q 是互质的自然数. 则 $R(x_0)=\frac{1}{p}$.

(ii) 由(1)中讨论 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0\neq R(x_0)$.

由函数在 x_0 处间断的定义可知，(0, 1)内一切有理点均不连续.

§2. 连续函数的性质

212. 若函数 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (A 为常数)，则函数在 $a\leqslant x<+\infty$ 有界.

［证］ $\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\therefore$ 取 $\varepsilon_0=1$，存在 X_0，当 $x>X_0$ 时，$|f(x)-A|<1$.

$\therefore\quad |f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

在$[a, X_0]$上，由闭区间上连续函数有界，即存在 M_0，使 $|f(x)|<M_0$，于是，取 $M=\max\{M_0, 1+|A|\}$，则对一切 $x\geqslant a$，有$|f(x)|<M$，即函数 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$ 有界.

213. 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续. 证明：(1) 若对$[a, b]$上的一切有理数 r，有 $f(r)=0$，则 $f(x)\equiv0$；(2) 若对$[a, b]$上任意的有理数 $r_1>r_2$，有 $f(r_1)>f(r_2)$，则 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加.

［证］ (1) 设 x_0 是$[a, b]$上任一无理数，则存在有理数数列$\{r_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$. 再由函数 $f(x)$ 的连续性，得 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=0$.

由 x_0 的任意性，$\therefore f(x)\equiv0\quad x\in(-\infty, +\infty)$.

(2) 设 x_1, x_2 是$[a, b]$上任意两点，$x_1<x_2$，则存在两列有理数 α_n, β_n，使 α_n 单调减少收敛于 x_1；β_n 单调增加收敛于 x_2，并且 $\alpha_1<\beta_1$. 再由函数 $f(x)$的连续性，得

$$f(x_1)=\lim_{n\to\infty}f(\alpha_n)\leqslant f(\alpha_1)<f(\beta_1)\leqslant\lim_{n\to\infty}f(\beta_n)=f(x_2).$$

由 x_1、x_2 的任意性，得 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加.

214. 设函数 $f(x)$在(a, b)连续，$f(a+0)$和$f(b-0)$都存在并且异号，求证：存在 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

［证］ 作
$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

则函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续并且 $F(a)$ 和 $F(b)$ 异号，由介值定理，存在

$\xi\in(a, b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$.

215. 设函数 $f(x)$在(a, b)连续，$f(a+0)$和 $f(b-0)$都存在. 求证：$f(x)$在(a, b)内有界. 又问 f 是否在(a, b)内有最大值和最小值.

［证］ 作
$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & a<x<b, \\ f(b-0), & x=b. \end{cases}$$

则函数 $F(x)$在$[a, b]$上连续，从而 $F(x)$在$[a, b]$有界. ∴ f 在 (a, b) 有界.

但这时 $f(x)$可能在(a, b)内没有最大值和最小值，例如 $f(x)=x$，$0<x<1$. $f(+0)$和 $f(1-0)$都存在，但 $f(x)$在$(0, 1)$内没有最大值也没有最小值. 而 $f(x)=\sin x$，$0<x<2\pi$，$f(+0)$和 $f(2\pi-0)$都存在，但 $f(x)$在$(0, 1)$最大值和最小值都存在.

216. 证明 若函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且函数值域为$[a, b]$，则至少存在 $x_0\in[a, b]$，使 $f(x_0)=x_0$.

［证］ 由已知 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$x\in[a, b]$. 令 $g(x)=f(x)-x$，函数 $g(x)$在$[a, b]$上连续，$g(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$g(b)=f(b)-b\leqslant 0$.

∴ 由连续函数的介值定理，存在 $x_0\in[a, b]$，使 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$.

217. 设函数 $f(x)$满足：(1) 在$[a, b]$上有定义，且值域为$[a, b]$，(2) $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ $(x, y\in[a, b])$，又定义数列 $\{x_n\}$：$x_1\in[a, b]$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$ $(n=1, 2, \cdots)$. 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$，且 $x_0=f(x_0)$.

［证］ 由条件(2)得 $f(x)$在$[a, b]$连续，再由条件(1)和上一题知道存在 $x_0\in[a, b]$，使 $x_0=f(x_0)$. 此外，由条件(2)又可得出 x_0 是唯一的，否则设 $x_0'\in[a, b]$ 也满足 $x_0'=f(x_0')$，那么 $|x_0-x_0'|=|f(x_0)-f(x_0')|<|x_0-x_0'|$，矛盾.

(1) 对数列 $\{x_n\}$，若取 $x_1=x_0$，则 $x_n=x_0(n=1, 2, \cdots)$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad 且 \quad x_0 = f(x_0).$$

结论成立。

(2) 若 $x_0 > x_1$，先由数学归纳法证明 $x_n < x_0 (n=1, 2, \cdots)$。

当 $n=1$ 时，由假设得成立。

当 $n=k$ 时，如果有 $x_k < x_0$。则当 $n=k+1$ 时，由已知条件以及 $x_0 = f(x_0)$，有

$$|f(x_k) - x_0| = |f(x_k) - f(x_0)| < |x_k - x_0|,$$

此外

$$x_{k+1} - x_0 = \frac{1}{2}(x_k + f(x_k) - 2x_0) = \frac{1}{2}[(x_k - x_0) + (f(x_k) - f(x_0))],$$

因为

$$\begin{aligned}
&[(x_k - x_0) + f(x_k) - f(x_0)] \cdot (x_k - x_0) \\
&= (f(x_k) - f(x_0))(x_k - x_0) + (x_k - x_0)^2 \\
&\geqslant -|f(x_k) - f(x_0)| \cdot |x_k - x_0| + (x_k - x_0)^2 \\
&= |x_k - x_0| \cdot (|x_k - x_0| - |f(x_k) - f(x_0)|) > 0,
\end{aligned}$$

$\therefore [(x_k - x_0) + f(x_k) - f(x_0)]$ 与 $(x_k - x_0)$ 同号。

即由 $x_k < x_0$ 得 $x_{k+1} < x_0$。

$$\therefore \quad x_n < x_0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

再证明 $\{x_n\}$ 单调增加。

$$\because \quad x_{n+1} - x_0 = \frac{1}{2}[(x_n - x_0) + (f(x_n) - f(x_0))],$$

$$\therefore \quad |x_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{2}[|x_n - x_0| + |f(x_n) - f(x_0)|] < |x_n - x_0|,$$

即 $x_0 - x_{n+1} < x_0 - x_n$，得 $x_{n+1} > x_n \quad (n=1, 2, \cdots)$。

由于 $\{x_n\}$ 单调增加，有上界 x_0。$\therefore \{x_n\}$ 收敛，设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = K.$$

又

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)),$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$，得 $K = \frac{1}{2}(K + f(K))$，$K = f(K)$，再由 x_0 是唯一的，$\therefore K = x_0$。

(3) 同理可证 $x_0 < x_1$ 的情况。

218. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且值域为 $[a, b]$，又设存在

常数 $q(0<q<1)$, 使得对$[a, b]$上任何两点 x, y 有$|f(x)-f(y)|\leqslant q|x-y|$. 求证: $f(x)$ 在$[a, b]$上有唯一的不动点 x_0: $x_0=f(x_0)$. x_0 的求法如下: 任取 $x_1\in[a, b]$, 作数列 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1, 2, 3, \cdots)$, 则$\{x_n\}$收敛并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

[证] 由 $|f(x)-f(y)|\leqslant q|x-y|$, 立即得出$f(x)$在$[a, b]$连续. 任取 $x_1\in[a, b]$有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant q|x_n-x_{n-1}|$$
$$=q|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\leqslant\cdots\leqslant q^{n-1}|x_2-x_1|.$$

再估计任意两项 x_{n+p} 和 x_n 的差:

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$
$$\leqslant(q^{n+p-2}+q^{n+p-3}+\cdots+q^{n-1})|x_2-x_1|$$
$$=q^{n-1}(q^{p-1}+q^{p-2}+\cdots+q+1)|x_2-x_1|$$
$$=q^{n-1}\cdot\frac{1-q^p}{1-q}|x_2-x_1|<q^{n-1}\cdot\frac{|x_2-x_1|}{1-q}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}\dfrac{|x_2-x_1|}{1-q}=0$, 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 并且对一切自然数 P, 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

由柯西准则, $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 再由 $x_{n+1}=f(x_n)$, 两端取关于 $n\to\infty$ 的极限, 得 $x_0=f(x_0)$.

再证明 x_0 的唯一性, 设另外又有 $x_0'\in[a, b]$使 $x_0'=f(x_0')$, 由 $|x_0-x_0'|=|f(x_0)-f(x_0')|\leqslant q|x_0-x_0'|$, $0<q<1$, 得出 $x_0=x_0'$.

219. 设 $f(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 2a$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 求证: 在区间$[0, a]$上至少存在某个 x_0, 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

[证] 若 $f(a)=f(0)$, 则取 $x_0=a$, 由 $f(0)=f(2a)$得 $f(a)=f(2a)$.
$\therefore f(x_0)=f(x_0+a)$ 成立.

若 $f(a)>f(0)$, 作 $g(x)=f(x)-f(x+a)$, $g(x)$ 是连续函数, 以及 $g(0)=f(0)-f(a)<0$, $g(a)=f(a)-f(a+a)=f(a)-f(0)>0$. 由连续函数的介值定理, 存在 $x_0\in(0, a)$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

同理可得在 $f(a)<f(0)$ 时也成立.

220. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a<c<d<b$, 且 $K=f(c)+$

$f(d)$，求证：(1) 存在 $x_0\in(a, b)$，使 $K=2f(x_0)$；(2) 存在 $x_0\in(a, b)$，使 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(x_0)$.

[证]　(1) 若 $f(c)=f(d)$，则 $K=2f(c)$. 取 $x_0=c$，$2f(x_0)=2f(c)=K$. 结论成立.

若 $f(c)\neq f(d)$，不妨设 $f(c)>f(d)$，则 $K=f(c)+f(d)>2f(d)$，$K=f(c)+f(d)<2f(c)$.

令 $g(x)=K-2f(x)$. $g(c)=K-2f(c)<0$，$g(d)=K-2f(d)>0$.

由连续函数的介值定理，存在 $x_0\in(c, d)$，使 $g(x_0)=0$.

即
$$2f(x_0)=K.$$

(2) 若 $f(c)=f(d)$，显然结论成立.

若 $f(c)\neq f(d)$，不妨设 $f(c)>f(d)$. 令

$$g(x)=mf(c)+nf(d)-(m+n)f(x),$$
$$g(c)=mf(c)+nf(d)-(m+n)f(c)<0,$$
$$g(d)=mf(c)+nf(d)-(m+n)f(d)>0.$$

$\therefore$ 存在 $x_0\in(c, d)$，使 $g(x_0)=0$. 即 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(x_0)$.

221. 设 $0<a<1$，$b>0$，求证方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不大于 $a+b$ 的正的实数解.

[证]　设 $f(x)=x-a\sin x-b$. 显然，$f(x)$ 在 R 上连续.

$\because f(0)=-b<0$，又

$$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b$$
$$=a-a\sin(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0.$$

① 若 $\sin(a+b)=1$，则 $a+b$ 是方程的解. ② 若 $\sin(a+b)\neq 1$，则 $f(a+b)>0$，由介值定理，在 $(0, a+b)$ 内必有 ξ，使 $f(\xi)=0$.

即方程至少有一个不大于 $(a+b)$ 的正实数解.

222. 求证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正实数解.

[证]　设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$.

$\because f(1)=2-1>0$，又 $f(0)=-1<0$.

由介值定理，在 $(0, 1)$ 内必存在 ξ，使 $f(\xi)=0$.

即 $x\cdot 2^x=1$ 在 $(0, 1)$ 内方程至少有一实数解.

223. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<$

b, 则有 $\xi\in(a, b)$, 满足

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

［证］ 设 $f(x_k)=\max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$,

$f(x_s)=\min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$.

则 $$f(x_s)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant f(x_k).$$

∵ $f(x)$在$[x_1, x_n]$连续, 且 x_s, x_k 在区间$[a, b]$内, 由连续函数的介值定理, 存在 $\xi\in(a, b)$, 使 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

224. 设多项式函数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 求证: (1) 当 n 为奇数时, 方程 $P(x)=0$ 至少有一个实根; (2) 当 n 为偶数时, 若至少存在 $x=x_0$, 使 $P(x_0)$与 a_0 异号, 则方程 $P(x)=0$ 至少有二个不相等的实根.

［证］ (1) 已知多项式函数在$(-\infty, +\infty)$上是连续函数. 且 $n=2k+1$. 不妨设 $a_0>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty.$$

于是, 由函数极限的性质, 存在 $c>0$, 使 $P(c)>0$ 与 $P(-c)<0$. 再由介值定理得, 奇次多项式函数 $P(x)$ 在$(-c, c)$内, 至少存在一点 ξ, 使 $P(\xi)=0$.

(2) 若 $n=2k$. 不妨设 $a_0>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=+\infty.$$

由已知, 存在 $x=x_0$, 使 $P(x_0)<0$. 于是, 由函数极限的性质, 存在 $c>0$, 使 $x_0\in(-c, c)$, 且有 $P(c)>0$, $P(-c)>0$. 再由介值定理得, 偶次多项式函数 $P(x)$在$(-c, x_0)$内至少存在一点 ξ_1, 使 $P(\xi_1)=0$; 同理在(x_0, c)内也至少存在一点 ξ_2, 使 $P(\xi_2)=0$. 因此, 若有 $P(x_0)$与 a_0 异号, 则偶次多项式函数至少有二个不相等的实根.

225. 已知方程 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$, $a_i>0$ $(i=1, 2, 3)$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 求证在$(\lambda_1, \lambda_2)$和$(\lambda_2, \lambda_3)$内各有一个实

数解.

[证] 设 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$,

则 $f(x)$在(λ_1, λ_2), (λ_2, λ_3)内是连续函数. 当 $x\to\lambda_1+0$ 时 $f(x)\to+\infty$, 当 $x\to\lambda_2-0$ 时 $f(x)\to-\infty$, 由介值定理, 在 (λ_1, λ_2) 内必存在 ξ_1, 使 $f(\xi_1)=0$.

即
$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$
在(λ_1, λ_2)内有一实数解.

同理, 可推得方程在(λ_2, λ_3)内也必有一实数解.

226. 设函数 $f(x)$是$[a, b]$上的单调函数, 并且能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$之间的一切值, 求证: $f(x)$在$[a, b]$连续.

[证] 设 $f(x)$单调增加, 有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$, $x\in[a, b]$. 采用反证法, 设 $f(x)$ 在 $x_0\in[a, b]$ 处不连续. 不妨设 $x_0\in(a, b)$, (如果 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 证明相仿). 因为 $f(x)$ 单调有界, 故下面两个极限都存在:
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\beta, \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\alpha,$$
并且 $f(a)\leqslant\alpha<\beta\leqslant f(b)$. 这时取 c 满足 $\alpha<c<\beta$, 并且 $c\neq f(x_0)$, 那末在(a, b)内将不存在 ξ, 使 $f(\xi)=c$. 这与已知矛盾.

$\therefore f(x)$ 在$[a, b]$连续.

227. 设 $f(x)$是周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 求证 $f(x)\equiv0$.

[证] 由已知条件, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时, $|f(x)|<\varepsilon$, 再由 $f(x)$是周期函数, 所以对一切 x, 有$|f(x)|<\varepsilon$, 而 ε 是任意的, 所以 $f(x)\equiv0$.

228. 设 $f(x)$与 $g(x)$是连续周期函数, 且
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$
求证 $f(x)=g(x)$

[证] 设 T_f 和 T_g 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期. 下面证明 T_g 也是 $f(x)$ 的周期.

$$\begin{aligned}|f(x+T_g)-f(x)| &= |f(x+nT_f+T_g)-f(x+nT_f)| \\ &\leqslant |f(x+nT_f+T_g)-g(x+nT_f+T_g)| \\ &\quad +|g(x+nT_f+T_g)-f(x+nT_f)| \\ &= |f(x+nT_f+T_g)-g(x+nT_f+T_g)| \\ &\quad +|g(x+nT_f)-f(x+nT_f)|.\end{aligned}$$

当 n 充分大时，由已知条件上式将会小于预先给定的任意的 $\varepsilon>0$，这样便证明了 T_g 也是 $f(x)$ 的周期.

对任意 x，　$|f(x)-g(x)|=|f(x+nT_g)-g(x+nT_g)|$.

当 n 充分大时，由已知条件，上式将小于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，这表明 $f(x)=g(x)$.

§3. 一 致 连 续

229. 从定义出发证明 $f(x)=x^2+2x-1$ 在 $[-1, 6]$ 上一致连续.

［证］ 任给 $\varepsilon>0$，对于 x', $x''\in[-1, 6]$，由不等式

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')| &= |x'^2+2x'-x''^2-2x''| \\ &\leqslant |x'+x''|\cdot|x'-x''|+2|x'-x''| \\ &\leqslant 12|x'-x''|+2|x'-x''|<\varepsilon,\end{aligned}$$

解得 $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{14}$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{14}$，对任何 x', $x''\in[-1, 6]$，当 $|x'-x''|<\delta$，有

$$|f(x')-f(x'')|=|x'^2+2x'-x''^2-2x''|<\varepsilon.$$

∴ $f(x)=x^2+2x-1$ 在$[-1, 6]$上一致连续.

230. 从定义出发证明 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上一致连续.

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant 2\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2}<\varepsilon,$$

∴ 取 $\delta=\varepsilon$，对于任意 x_1, $x_2\in(-\infty, +\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$，∴ $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上一致连续.

231. 从定义出发证明 $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一

致连续.

[证] 任给 $\varepsilon>0$，对于 x'、$x''\in(-\infty, +\infty)$，由

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|x'+\sin x'-x''-\sin x''|\\&\leqslant|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\\&\leqslant|x'-x''|+2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\\&\leqslant 2|x'-x''|<\varepsilon.\end{aligned}$$

$\therefore$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|=|x'+\sin x'-x''-\sin x''|<\varepsilon.$$

$\therefore$ $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

232. **从定义出发证明 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上一致连续.**

[分析] 对任给 $\varepsilon>0$，取 $c=\varepsilon^3$，在 $[0, c]$、$\left[\frac{c}{2}, 1\right]$ 上讨论 $f(x)$ 的一致连续，然后便可得出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致连续.

[证] (1) 任给 $\varepsilon>0$，取 $c=\varepsilon^3$，对任意 x'、$x''\in[0, c]$，有

$$|f(x')-f(x'')|=|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}|\leqslant\sqrt[3]{x'}+\sqrt[3]{x''}<2\sqrt[3]{c}=2\varepsilon.$$

(2) 在 $\left[\frac{c}{2}, 1\right]$ 上，任给 $\varepsilon>0$，对区间上任意二点 x'、x''，由

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt[3]{x'^2}+\sqrt[3]{x'x''}+\sqrt[3]{x''^2}}\\&<\frac{|x'-x''|}{\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2}\right)^2}}<\varepsilon\end{aligned}$$

解得
$$|x'-x''|<\sqrt[3]{\left(\frac{c}{2}\right)^2}\varepsilon,$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon^3}{\sqrt[3]{4}}$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

由(1)、(2)讨论可得：任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon^3}{\sqrt[3]{4}}$，当 x'、$x''\in[0, 1]$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<2\varepsilon$. 即 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上一致连续.

233. **讨论 $f(x)=x^2$ 在 $(-K, K)$ $(K>0)$，与 $(-\infty, +\infty)$**

内的一致连续性.

［解］ (1) 在$(-K, K)$内. ∵ $f(x)=x^2$在$[-K, K]$上是连续函数，故由康托定理，$f(x)=x^2$在$[-K, K]$上一致连续，∴ 函数在$(-K, K)$内一致连续.

(2) 在$(-\infty, +\infty)$内. 由一致连续定义的否定说法：

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$\delta>0$，取

$$x'=\frac{1}{\delta},\quad x''=x'+\frac{\delta}{2},\quad |x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta.$$

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|x'^2-x''^2|=|x'+x''|\cdot|x'-x''|\\&=\left(\frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)\cdot\frac{\delta}{2}=1+\frac{\delta^2}{4}>\varepsilon_0\end{aligned}$$

∴ $f(x)=x^2$在$(-\infty, +\infty)$非一致连续.

234. 求证连续的有界函数$y=\sin x^2$在$(-\infty, +\infty)$上非一致连续.

［证］ 由一致连续的否定说法：取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$\delta>0$，总存在

$$x_n'=\sqrt{n\pi},\quad x_n''=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}.$$

当$n>\frac{\pi}{\delta^2}$时，有

$$\begin{aligned}|x_n'-x_n''|&=\left|\sqrt{n\pi}-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|\\&=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}<\frac{\pi}{\sqrt{n\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{n}}<\delta\end{aligned}$$

但是，$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|\sin n\pi-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

∴ $f(x)=\sin x^2$在$(-\infty, +\infty)$上非一致连续.

235. 证明函数$f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$在开区间$(0, 1)$内连续且有界，但它在$(0, 1)$内非一致连续.

［证］ 由于 $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ 是初等函数，所以在(0, 1)内连续；且显然有

$$\left|e^x\cos\frac{1}{x}\right|<e \quad (0<x<1).$$

∴ 函数在开区间内有界.

由一致连续定义的否定说法：取 $\varepsilon_0=1$，对任意 $\delta>0$，取 $x_n'=\frac{1}{2n\pi}$，$x_n''=\frac{1}{(2n+1)\pi}$；只要 $n>\frac{1}{\delta}$，总有

$$|x_n'-x_n''|=\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{(2n+1)\pi}<\frac{1}{2n\pi}<\frac{1}{n}<\delta.$$

但是

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|e^{\frac{1}{2n\pi}}\cdot\cos(2n\pi)-e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\cos(2n+1)\pi|$$
$$=e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}>2>\varepsilon_0.$$

∴ $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ 在(0, 1)内非一致收敛.

236. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内满足李普希斯条件 $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$（$K$ 为常数），其中 x, y 是 (a, b) 内任意两点，求证 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续.

［证］ 对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$，对于任意 $x, y\in(a, b)$，当 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|<K\cdot\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon$.

∴ $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

237. 从定义出发证明：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，$f(x)$ 在 $[b, c]$ 上一致连续，则 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上一致连续.

［证］ ∵ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续，∴ 对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得 x'、$x''\in[a, b]$，$|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

又由 $f(x)$ 在 $[b, c]$ 上一致连续，∴ 存在 $\delta_2>0$，使得 x'、$x''\in[b, c]$，$|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

于是对上述任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $x', x''\in[a, c]$，$|x'-x''|<\delta$ 时，有三种情形可能发生：(1) $x', x''\in[a, b]$；(2) $x', x''\in[b, c]$；(3) $x'\in[a, b]$，$x''\in[b, c]$. 在(1)，(2)的情形下显然有 $|f(x')-f(x'')|$

$<\varepsilon$, 在(3)的情形下有$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(b)|+|f(b)-f(x'')|<2\varepsilon$. 因此不论那种情形都有下列结论：对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$x'$, $x''\in[a, c]$且$|x'-x''|<\delta$时有$|f(x')-f(x'')|<2\varepsilon$, 即$f(x)$在$[a, c]$一致连续.

238. 若$f(x)$在$[a, +\infty)$连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=K$, 则函数$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

[证] $\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=K$, $\therefore$ 对任给$\varepsilon>0$, 存在$X>0$, 当任意$x', x''\geqslant X$时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

又$f(x)$在$[a, +\infty)$连续, 则必在$[a, X]$连续. 由闭区间连续函数性质, $f(x)$在$[a, X]$上一致连续, $\therefore$ 对上述$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$, 当$x_1, x_2\in[a, X]$, $|x_1-x_2|<\delta_1$时, 有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

于是在$[a, +\infty)$上, 对上述任给$\varepsilon>0$, 取$\delta=\delta_1$, 当$x_1, x_2\in[a, +\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta$时, 则必有$|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$.

即$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

239. 若$f(x)$在$[a, +\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx]=0$(其中$b$是常数), 则$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

[证] 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx]=0$.

$\therefore$ 对任给$\varepsilon>0$, 存在X, 当$x\geqslant X$时, 有

$$|f(x)-bx|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取$\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{3(|b|+1)}$, 对任意$x_1, x_2\in[X, +\infty)$, 只要$|x_1-x_2|<\delta_1$, 有

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|[f(x_1)-bx_1]-[f(x_2)-bx_2]+b(x_1-x_2)|\\&<|f(x_1)-bx_1|+|f(x_2)-bx_2|+|b(x_1-x_2)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

又$f(x)$在$[a, X]$上也连续, $\therefore f(x)$在$[a, X]$上一致连续. 对上述任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta_2>0$, 当$x_1, x_2\in[a, X]$, $|x_1-x_2|<\delta_2$时, 有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

∴ 对上述任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 x_1、$x_2\in[a, +\infty)$, 且 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$.

∴ $f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

240. 若$f(x)$在(a, b)内连续,则$f(x)$在(a, b)一致连续的充要条件是$f(a+0)$和$f(b-0)$都存在.

［证］ 必要性: 已知函数$f(x)$在(a, b)内一致连续. 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 x'、$x''\in(a, b)$, $|x'-x''|<\delta$ 时便有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 由此可得当 $0<x'-a<\frac{\delta}{2}$, $0<x''-a<\frac{\delta}{2}$ 时,有

$$|x'-x''|=|(x'-a)+(a-x'')|\leqslant|x'-a|+|x''-a|<\delta,$$

其中 x', $x''\in(a, b)$. 于是,得 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

根据函数极限柯西准则, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$存在. 同理可证 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$也存在.

充分性: 补充定义 $f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$.

则 $f(x)$在$[a, b]$连续, ∴ $f(x)$在$[a, b]$上一致连续. 即得 $f(x)$在(a, b)一致连续.

［说明］ 值得注意的是, 当函数 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续时, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 就不一定存在. 例如 $f(x)=x+\sin x$, 在 $(-\infty, +\infty)$一致连续(证明见第231题), 但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$都不存在.

241. 设函数$f(x)$在(a, b)内一致连续,则$f(x)$在(a, b)内有界.

［证］ 由上一题得 $f(a+0)$和 $f(b-0)$都存在,作

$$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a, \\ f(x), & a<x<b, \\ f(b-0), & x=b. \end{cases}$$

则 $F(x)$在$[a, b]$连续, 从而 $F(x)$ 在$[a, b]$上有界, 故 $f(x)$在(a, b)内有界.

［说明］ 如果(a, b)改为$(a, +\infty)$, 结论未必成立. 例如 $f(x)=x$, 在 $(a, +\infty)$一致连续,但却无界.

242. 设 $f(x)$, $g(x)$在区间(a, b)一致连续. 求证: (1) $f(x)$

$+g(x)$在(a, b)一致连续；(2) $f(x)g(x)$在(a, b)一致连续. 又如果(a, b)改为无限区间$(a, +\infty)$，问(1)和(2)是否仍成立.

[证] (1) 由已知条件,对任给$\varepsilon>0$, 总存在$\delta_1>0$, 使当$|x'-x''|<\delta_1$ x'、$x''\in(a, b)$时,有$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$.

同时又存在$\delta_2>0$, 使当$|x'-x''|<\delta_2$, x'、$x''\in(a, b)$时,有

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当$|x'-x''|<\delta, x'$、$x''\in(a,b)$时,$|f(x')+g(x'')-(f(x'')+g(x''))|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$.

$\therefore f(x)+g(x)$ 在(a, b)一致连续.

(2) 由上题结论,$f(x)$, $g(x)$都在(a, b)有界,设$|f(x)|\leqslant M$, $|g(x)|\leqslant N(a<x<b)$.

$\therefore$ 对任给$\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, ($\delta_1$和$\delta_2$, 见(1)), 当$|x'-x''|<\delta$, x'、$x''\in(a, b)$时,

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|f(x')g(x')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant|f(x')|\cdot|g(x')-g(x'')|+|g(x'')|\cdot|f(x')-f(x'')|\\&<(M+N)\varepsilon.\end{aligned}$$

$\therefore f(x)g(x)$在(a, b)一致连续.

当(a, b)改为$(a, +\infty)$时, $f(x)+g(x)$ 在$(a, +\infty)$仍旧一致连续, 证明与(1)相仿. 但$f(x)g(x)$在$(a, +\infty)$就不一定一致连续, 如取$f(x)=x$, $g(x)=x$, 则$f(x)g(x)=x^2$, 在$(a, +\infty)$就非一致连续.

243. 证明函数$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$在$(-1, 0)$及$(0, 1)$内分别一致连续,但是$f(x)$在$(-1, 0)\cup(0, 1)$非一致连续.

[证] (1) 在$(-1, 0)$内.

$$\because \lim_{x\to-1+0}\frac{|\sin x|}{x}=-\sin 1, \quad \lim_{x\to 0-0}\frac{|\sin x|}{x}=-1.$$

又$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$在$(-1, 0)$内连续, $\therefore$ 由第240题所证结论, 函数在$(-1, 0)$内一致连续.

(2) 在(0, 1)内.

$$\because \quad \lim_{x\to 1-0}\frac{|\sin x|}{x}=\sin 1, \quad \lim_{x\to 0+0}\frac{|\sin x|}{x}=1.$$

又 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在(0, 1)内连续，∴ 同理可得 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在(0, 1)内一致连续.

(3) 在$(-1, 0)\cup(0, 1)$内. 取 $x_n=\dfrac{1}{n}$, $x_n'=-\dfrac{1}{n}$, 显然有 $|x_n-x_n'|\to 0$, 但

$$|f(x_n)-f(x_n')|=2\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 2\ (n\to\infty),$$

由一致连续定义的否定说法：取 $\varepsilon_0=1$, 对任意的 $\delta>0$, 总存在 x_n 和 x_n', 满足 $|x_n-x_n'|<\delta$ 但 $|f(x_n)-f(x_n')|>\varepsilon_0=1$. 即 $f(x)$ 在$(-1, 0)\cup(0, 1)$非一致连续.

第三章　导数与微分

1. 导数

若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与自变量的增量 Δx 之比，当 $\Delta x\to 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

存在，则称函数在 x 可导．其极限值称 $f(x)$ 在 x 的导数．记作：$f'(x)$、y'_x 或 $\frac{dy}{dx}$．

导数的几何意义　函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线存在，切线的斜率是 $f'(x_0)$．切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$．

导数的物理意义　设质点沿直线运动的规律是 $x=s(t)$．则在时刻 t 质点的运动速度是 $s'(t)$．

分别称

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad 和\quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

是函数 $f(x)$ 在 x 的右导数和左导数(若它们存在)，记作 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$．$f(x)$ 在 x 可导当且仅当 $f(x)$ 在 x 的左右导数都存在并且 $f'_+(x)=f'_-(x)$．

2. 求导法则

若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 x 都可导，则：

(1) 和差法则

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x).$$

(2) 乘法法则

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

(3) 除法法则

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0).$$

3. 初等函数的导数

(1) $(c)'=0$. (2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

(3) $(a^x)'=a^x\ln a\quad (a>0,\ a\neq 1)$.

(4) $(e^x)'=e^x$.

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad (a>0,\ a\neq 1)$.

(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. (7) $(\sin x)'=\cos x$.

(8) $(\cos x)'=-\sin x$. (9) $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$.

(10) $(\operatorname{ctg} x)'=-\csc^2 x$. (11) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(13) $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(14) $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

4. 复合函数导数

设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，又设 $u=\varphi(x)$ 在 x 有导数，而 $y=f(u)$ 在相应的点 u 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 可导，且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$，或记作 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

复合函数的求导法则可推广到有限个函数构成复合函数的情况.

5．反函数导数

设函数 $y=f(x)$ 在 x 的某个邻域内连续，严格单调，且在 x 可导（$f'(x)\neq 0$）．则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 y 可导（$y=f(x)$），且 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

6．参数方程导数

设参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha<t<\beta),$$

其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则 $y'_x=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$.

7．隐函数导数

设由方程 $F(x, y)=0$ 确定了可导的隐函数 $y=y(x)$，则此隐函数的导数可以从下列方程求得：$\dfrac{d}{dx}[F(x, y)]=0$.

在求导过程中必须注意 y 是 x 的函数.

8．高阶导数

(1) 函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数 $[f^{(n-1)}(x)]'$ 称为 $y=f(x)$ 的 n 阶导数．记作 $f^{(n)}(x)$ $(n=2, 3, \cdots)$.

(2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导数，则

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}.$$

称为莱布尼茨公式.

9．微分

设函数 $y=f(x)$ 在 x 的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 有下列关系 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$．其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称 $y=f(x)$ 在 x 可微．$A\Delta x$ 称为函数在 x 的微分，记作 $dy=A\Delta x$ 或 $df(x)=A\Delta x$．记 $\Delta x=dx$ 则有 $dy=A\,dx$.

函数在 x 可微的充要条件是在 x 可导，这时 $A=f'(x)$，$dy=f'(x)dx$. 若函数 f 在 x 处有 n 阶导数，则其 n 阶微分是 $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$. 其中 $d^ny=d[d^{n-1}y]$ $(n=2, 3, \cdots)$.

10. 中值定理

(1) 罗尔定理　设 a. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. b. $f(x)$ 在 (a, b) 可导. c. $f(a)=f(b)$. 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 拉格朗日定理　设 a. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. b. $f(x)$ 在 (a, b) 可导. 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ 或 } f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a).$$

(3) 柯西定理　设 a. $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. b. $f(x)$、$g(x)$ 在 (a, b) 可导. c. $g'(x)$ 在 (a, b) 内不为零. 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

(4) 泰勒定理　$f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间内具有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n.$$

其中 $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x、x_0 之间. R_n 称拉格朗日余项.

11. 洛必达法则

(1) 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足：a. 在 $(x_0-\delta, x_0)$，$(x_0, x_0+\delta)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$. b. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. c. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=K$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

(2) 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足：a. 在 $(x_0-\delta, x_0)$，$(x_0, x_0+\delta)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$，b. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. c. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

又当 $x_0=\infty$ 时，有相仿结论.

12. 函数的极值、最大(小)值

(1) 必要条件　函数 $f(x)$ 只能在驻点及不可导点处取得极值.

(2) 判定定理Ⅰ　若函数 f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导，并且

$$f'(x)\begin{cases} >0 \quad (\text{或}<0) \quad \text{当 } x\in(x_0-\delta, x_0), \\ <0 \quad (\text{或}>0) \quad \text{当 } x\in(x_0, x_0+\delta). \end{cases}$$

则 f 在 x_0 点取极大值(或极小值).

(3) 判定定理Ⅱ　若函数 $f(x)$ 存在二阶导数，x_0 为驻点. 则当 $f''(x_0)>0$，$f(x)$ 在 x_0 点取得极小值；当 $f''(x_0)<0$，$f(x)$ 在 x_0 取得极大值.

(4) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的驻点或不可导点(设它们是有限多个). 则在 $[a, b]$ 上

$$f_{\max}=\max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)\};$$
$$f_{\min}=\min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

13. 函数图象性质

(1) 凸性　如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内存在二阶导数 $f''(x)$，若 $f''(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内下凸；若 $f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内上凸.

(2) 拐点　如函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$、$(x_0, x_0+\delta)$ 两邻域内的二阶导数异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 称函数 $f(x)$ 的拐点.

(3) 渐近线　垂直渐近线　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为

$f(x)$的垂直渐近线.

水平渐近线　若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

斜渐近线　若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$．则 $y=kx+b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线.

14．曲率

函数$f(x)$在(x, y)点的曲率为 $K=\left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|$.

曲率中心为 $\begin{cases}\xi=x-\dfrac{1+(y')^2}{y''}\cdot y', \\ \eta=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}.\end{cases}$

在给定参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$时，

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

在给定极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$时，$K=\frac{|\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''|}{[\rho^2+(\rho')^2]^{\frac{3}{2}}}$.

§1．函数的导数

(1) 导数的概念

244．设函数 $y=\sqrt{x}$，求：(1) 在 $x=2$ 处，当 $\Delta x=0.1$，$\Delta x=0.01$ 时函数的平均变化率；(2) 在 $x=2$ 处函数的变化率.

［解］ (1) 函数在 $x=2$ 处，当 $\Delta x=0.1$，$\Delta x=0.01$ 时的平均变化率分别为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2+0.1}-\sqrt{2}}{0.1}\approx 0.3492,$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2+0.01}-\sqrt{2}}{0.01}\approx 0.3531.$$

(2) 函数在 $x=2$ 处的变化率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0.3536.$$

245. 设 $y=ax^2+bx+c$, 求：(1) 从 $x_1=1$ 到 $x_2=3$ 函数的平均变化率；(2) 在 $x=2$ 处函数的变化率；(3) 当 x 为何值时，函数在 x 处的变化率等于从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

［解］ (1) 从 $x_1=1$ 到 $x_2=3$ 函数的平均变化率为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(a\cdot 3^2+b\cdot 3+c)-(a\cdot 1^2+b\cdot 1+c)}{2}$$

$$=4a+b.$$

(2) 在 $x=2$ 处函数的变化率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[a(2+\Delta x)^2+b(2+\Delta x)+c]-(a\cdot 2^2+b\cdot 2+c)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4a\Delta x+b\Delta x+a\Delta x^2}{\Delta x}=4a+b.$$

(3) 函数在 x 处的变化率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-(ax^2+bx+c)}{\Delta x}=2ax+b.$$

从 x_1 到 x_2 函数的平均变化率为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)+b,$$

$$2ax+b=a(x_2+x_1)+b,\quad \therefore\quad x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

当 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 的变化率与从 x_1 到 x_2 的平均变化率相等.

［说明］ 函数在 x 处的变化率是曲线 $y=f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 点的切线斜率，而函数从 x_1 到 x_2 的平均变化率是曲线过 $(x_1, f(x_1))$、$(x_2, f(x_2))$ 两点的割线斜率．对二次函数来说，平行于过 $(x_1, f(x_1))$、$(x_2, f(x_2))$ 的割线的切线，其切点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$，本题指出了切点的一种求法．

246．从可导的定义出发，考察下列函数在指定点的导数：

(1) $y=|\sin x|$，$x=0$ 处； (2) $y=x|\sin x|$，$x=0$ 处．

［分析］ 由函数在 x_0 点可导的充要条件 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ 知在下列情况下函数在 x_0 处不可导：(1) 在 x_0 处函数左、右导数至少有一个不存在；(2) 在 x_0 处函数左、右导数存在，但不相等．

［解］ (1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

$\because f'_+(0)\neq f'_-(0)$，$\therefore y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导．

(2) $g(x)=\begin{cases}x\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -x\sin x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$

$$g'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}=0,$$

$$g'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}=0.$$

$\because g'_+(0)=g'_-(0)$，$\therefore y=x|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导，且 $g'(0)=0$．

247．求下列函数在 $x=1$ 处的左、右导数：

(1) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$； (2) $g(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$．

［解］ (1) $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}-0}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}=+\infty,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}-0}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=+\infty.$$

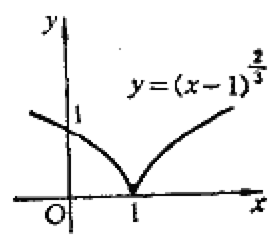
(2) $$g'_+(1)=\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}-0}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=+\infty,$$

$$g'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}-0}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=-\infty.$$

［说明］ (1) 虽然 $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=1$ 处左、右导数均趋正无穷，但是曲线 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在该点的切线存在，且平行于 y 轴.



(2) $g(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=1$ 处左、右导数也趋无穷，但符号不同，这时曲线 $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 在该点无切线. 称该点为“尖点”(如右图).

248. 设 $f(x)=(x^2-c^2)\cdot g(x)$，$g(x)$ 在 $x=c$ 处连续. 求：$f'(c)$.

［解］ 已知 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=g(c)$，

$$\therefore\quad f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x^2-c^2)\cdot g(x)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}(x+c)\cdot g(x)=2c\cdot g(c).$$

249. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 处均可导，且 $f(0)=g(0)=0$，$g'(0)\neq0$. 求证：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

［证］ $\because f(0)=g(0)=0$，若 $x\neq0$，则有：

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

250. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant c,\\ ax+b, & x<c.\end{cases}$ 问：a, b 取何值时，$f(x)$ 在 c 处可导.

［分析］ 讨论分段函数在分点处的导数，常利用函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导的充要条件：$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

［解］ 若 $f(x)$ 在 c 处可导，则 $f(x)$ 在 c 处必连续，即

$$\lim_{x\to c-0}f(x)=\lim_{x\to c+0}f(x)=f(c), \quad \therefore \quad ac+b=c^2.$$

又：
$$f'_+(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{x^2-c^2}{x-c}=2c,$$

$$f'_-(c)=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{ax+b-c^2}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c-0}\frac{ax+b-(ac+b)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{a(x-c)}{x-c}=a.$$

∴ 要使 f 在 $x=c$ 处可导，必须 $a=2c$ 及 $ac+b=c^2$.

∴ 当 $a=2c$, $b=-c^2$ 时，$f(x)$ 在 $x=c$ 处可导.

251. 若 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant c,\\ ax+b, & x>c.\end{cases}$ 问：a、b 取何值时，$f(x)$ 在 c 处可导.

［解］ 若 $f(x)$ 在 c 处可导，则 $f(x)$ 在 c 处必连续，即

$$\lim_{x\to c-0}f(x)=\lim_{x\to c+0}f(x)=f(c). \quad \therefore \quad b=\sin c-ac.$$

又：
$$f'_-(c)=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{\sin x-\sin c}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c-0}\frac{2\sin\dfrac{x-c}{2}\cdot\cos\dfrac{x+c}{2}}{x-c}=\cos c,$$

$$f'_+(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{ax+b-\sin c}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c+0}\frac{ax-ac}{x-c}=a.$$

由 $f'_+(c)=f'_-(c)$，得 $a=\cos c$. ∴ 要使 $f(x)$ 在 $x=c$ 处可导，必须 $a=\cos c$ 及 $b=\sin c-ac$.

∴ 当 $a=\cos c$, $b=\sin c-c\cos c$ 时，$f(x)$ 在 $x=c$ 处可导.

252. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 A，求：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$; (2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a)}{t}$;

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}$.

［解］ (1) ∵ $f(x)$ 在 $x=a$ 的导数为 A，即：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=A,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=A.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)-f(a)]+[f(a)-f(a-\Delta x)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=2A.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a)}{2t}\cdot 2=2A.$

(3)
$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{[f(a+\alpha t)-f(a)]+[f(a)-f(a+\beta t)]}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+\alpha t)-f(a)}{\alpha\cdot t}\cdot\alpha-\lim_{t\to 0}\frac{f(a+\beta t)-f(a)}{\beta t}\cdot\beta\\&=(\alpha-\beta)A.\end{aligned}$$

253. 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求证：

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

［证］ ∵ $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，∴ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{af(x)-af(a)}{x-a}=f(a)-af'(a).\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

254. 若偶函数$f(x)$可导，则$f(x)$的导函数为奇函数.

［证］ 设x_0为区间内任意一点，

$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x_0-\Delta x)]-f(-x_0)}{\Delta x}.$$

由于$f(x)$是偶函数，满足：$f[-(x_0-\Delta x)]=f(x_0-\Delta x)$及$f(-x_0)=f(x_0)$，故

$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$=-f'(x_0).$$

$\because f'(-x_0)=-f'(x_0)$，由$x_0$是区间内任意一点，$\therefore f'(x)$是奇函数.

［说明］ 同理可知奇函数的导函数是偶函数.

255. 设函数$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在. 求证：$f'(0)=0$.

［证］ $\because f(x)$是偶函数，$\therefore f(\Delta x)=f(-\Delta x)$.

又$\because f'(0)$存在，

$$\therefore \quad f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0) \qquad \cdots①$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to -0}-\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-f'_-(0) \qquad \cdots②$$

由①、②得：$f'_-(0)=-f'_-(0)$，即$f'_-(0)=0$.

$\therefore f'(0)=0$.

256. 设$f(x)$在$x=a$处可导，试用导数的定义，求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)a^3-f(a)x^3}{a^2-x^2}$.

［解］ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)a^3-f(a)x^3}{a^2-x^2}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)a^3-f(a)a^3+f(a)a^3-f(a)x^3}{a^2-x^2}$$

$$=\lim_{x\to a}-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{a^3}{x+a}+\lim_{x\to a}\frac{a-x}{a-x}\cdot\frac{f(a)\cdot(a^2+ax+x^2)}{a+x}$$

$$=-\frac{a^2}{2}f'(a)+\frac{3a}{2}f(a).$$

257. 若 $f(x)$ 在 x 处可导，且 n 为自然数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$. 反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ 存在，是否可以断言 $f(x)$ 在 x 处可导？

［证］ 按导数定义，$f(x)$ 在 x 处可导即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. 今取 $\Delta x=\frac{1}{n}$，则有：

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x).$$

反之不成立. 例如设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \quad 或 \quad \frac{1}{n},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\\ 1, & x\neq 0,\ \frac{1}{n}.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]=0$，但 f 在 $x=0$ 不连续故不可导.

(2) 求导法则和基本公式

258. 求下列各函数的导数(其中 x, t, z, v 是变量)：

(1) $y=2x^3+\frac{2}{x^3}+\ln x$;　　(2) $y=\frac{5-t}{(1-t)(1+t^2)}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

(3) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}+\frac{\ln x}{4}$;　　(4) $y=\frac{2\csc z}{1+z^2}$;

(5) $y=-2v\cdot\log_a v\cdot\cos v$;　　(6) $y=\frac{4}{1+t+t^2}$.

［解］ (1) $y'=6x^2-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x}$.

(2) $y'=\frac{-2t^3+16t^2-10t+4}{(1-t)^2(1+t^2)^2}$.

(3) $y'=\frac{x\cdot\sec^2 x-3\operatorname{tg} x}{x^4}+\frac{1}{4x}$.

(4) $y'=\frac{-2\csc z\cdot\operatorname{ctg} z\cdot(1+z^2)-4z\cdot\csc z}{(1+z^2)^2}$.

(5) $y'=2\left(\log_a v\cdot\cos v+\frac{\cos v}{\ln a}-v\cdot\log_a v\cdot\sin v\right)$.

(6) $y'=\frac{-4(1+2t)}{(1+t+t^2)^2}$.

259. 求 $\frac{ax^3+bx+c}{(a+b)x}$ 的导数.

[解一] $\left[\frac{ax^3+bx+c}{(a+b)x}\right]'=\frac{(3ax^2+b)\cdot x-(ax^3+bx+c)}{(a+b)x^2}=\frac{2ax^3-c}{(a+b)x^2}$.

[解二] $\left[\frac{ax^3+bx+c}{(a+b)x}\right]'=\left(\frac{a}{a+b}x^2+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{x}\right)'$

$$=\frac{2a}{a+b}x-\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

260. 求下列函数的导数：(1) $\frac{2^x-3^{2x+1}}{5^{x-1}}$； (2) $e^x a^{2x+1}$.

[分析] (1) 可将原式按指数运算的性质变形，再求导.

[解] (1) $\left(\frac{2^x-3^{2x+1}}{5^{x-1}}\right)'=\left[5\left(\frac{2}{5}\right)^x-15\left(\frac{9}{5}\right)^x\right]'$

$$=5\cdot(0.4^x)'-15\cdot(1.8^x)'$$

$$=5\cdot0.4^x\cdot\ln0.4-15\cdot1.8^x\cdot\ln1.8.$$

(2) $[e^x\cdot a^{2x+1}]'=a\cdot[(e\cdot a^2)^x]'=a\cdot(ea^2)^x\cdot\ln(e\cdot a^2)$.

261. 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{2\sin x\cos x-\cos x}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}$;

(2) $y=(1-\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x$.

[解] (1) $\because\ \frac{2\sin x\cos x-\cos x}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos x(2\sin x-1)}{\sin x(2\sin x-1)}=\operatorname{ctg} x$,

$\therefore\ y'=\left(\frac{2\sin x\cos x-\cos x}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}\right)'=(\operatorname{ctg} x)'=-\csc^2 x$.

(2) $\because\ (1-\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x=(1-\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x\cdot\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x=1$,

$\therefore\ y'=[(1-\operatorname{tg}^4 x)\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x]'=0$.

〔说明〕 求导数时应注意对函数进行适当恒等变形化简，以减少运算量. 本题是采用三角恒等变形.

262. 求证：$y=f(x)$ $(f(x)>0)$ 与 $y=f(x)\sin ax$, 在交点处，导数值相等. 其中函数 $f(x)$ 可导 $(a\neq 0)$.

〔证〕 解方程组 $\begin{cases} y=f(x), \\ y=f(x)\cdot\sin ax. \end{cases}$

得 $f(x)\cdot(1-\sin ax)=0$, 因 $f(x)>0$, 所以得 $1-\sin ax=0$.

解得交点的横坐标为 $x_0=\frac{2k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

$y=f(x)$，则 $y'_x=f'(x)$. $y'_x|_{x=x_0}=f'\left(\frac{2k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)$.

$y=f(x)\sin ax$, 则 $y'_x=f'(x)\sin ax+af(x)\cos ax$, 同样有 $y'_x|_{x=x_0}=f'\left(\frac{2k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}\right)$. 即在交点处两者导数相等.

263. 求：$y=\operatorname{sh}x$, $y=\operatorname{ch}x$, $y=\operatorname{th}x$, $y=\operatorname{cth}x$ 的导数.

〔解〕 $(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\therefore$ $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$.

$$(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \therefore\quad (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x.$$

$$(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},\quad \therefore\quad (\operatorname{th}x)'=\operatorname{sech}^2x.$$

$$(\operatorname{cth}x)'=\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x},\quad \therefore\quad (\operatorname{cth}x)'=-\operatorname{csch}^2x.$$

〔说明〕 上面一类函数统称为双曲函数. 双曲函数在工程中是较有用的. 它有如下较常用的性质：$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$, $\operatorname{sech}^2x+\operatorname{th}^2x=1$, $\operatorname{cth}^2x-\operatorname{csch}^2x=1$.

此外，双曲正弦的反函数用 $\operatorname{Ar\,sh}x$ 表示，$\operatorname{Ar\,sh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；双曲余弦的反函数用 $\operatorname{Ar\,ch}x$ 表示，$\operatorname{Ar\,ch}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geqslant 1)$；双曲正切的反函数用 $\operatorname{Ar\,th}x$ 表示，$\operatorname{Ar\,th}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$；双曲余切的反函数用 $\operatorname{Ar\,cth}x$ 表示，$\operatorname{Ar\,cth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}$ $(|x|>1)$.

264. 求：$\operatorname{Ar\,sh}x$; $\operatorname{Ar\,ch}x$; $\operatorname{Ar\,th}x$; $\operatorname{Ar\,cth}x$ 的导数.

[解] $y=\mathrm{Arsh}\,x$, $x=\mathrm{sh}\,y$, 两边对 x 求导,则: $1=\mathrm{ch}\,y\cdot y'_x$.

$\therefore\quad y'_x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\quad\therefore\quad(\mathrm{Arsh}\,x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

$y=\mathrm{Arch}\,x$, $x=\mathrm{ch}\,y$, 两边对 x 求导,则: $1=\mathrm{sh}\,y\cdot y'_x$.

$$\therefore\quad y'_x=\frac{1}{\mathrm{sh}\,y}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\therefore\quad(\mathrm{Arch}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad(x\geqslant 1).$$

$y=\mathrm{Arth}\,x$, $x=\mathrm{th}\,y$, 两边对 x 求导,则: $1=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2y}\cdot y'_x$.

$$\therefore\quad y'_x=\frac{1}{1-\mathrm{th}^2y}=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad(\mathrm{Arth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}\quad(|x|<1).$$

$y=\mathrm{Arcth}\,x$, $x=\mathrm{cth}\,y$, 两边对 x 求导,则: $1=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2y}\cdot y'_x$.

$$\therefore\quad y'_x=\frac{1}{-(\mathrm{cth}^2y-1)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$\therefore\quad(\mathrm{Arcth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}\quad(|x|>1).$$

265. 已知: $y=\mathrm{Arth}\,x-\mathrm{Arcth}\,\dfrac{1}{x}$, 求: y'_x.

[解] 按反双曲函数的求导公式:

$$y'_x=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^2}=0.$$

[说明] 事实上经计算可得: $\mathrm{Arth}\,x=\mathrm{Arcth}\dfrac{1}{x}$.

266. 已知: α 为多项式 $P(x)$ 的两重根. 求证: α 亦为 $P'(x)$ 的根.

[证] 已知 α 为多项式 $P(x)$ 的两重根, 则 $P(x)$ 必有 $(x-\alpha)^2$ 因子, 即

$$P(x)=(x-\alpha)^2\cdot Q(x)\quad(Q(x)\neq 0).$$

$$P'(x)=(x-\alpha)\cdot[2Q(x)-(x-\alpha)\cdot Q'(x)].$$

$$P'(\alpha)=0.\quad\therefore\quad\alpha\text{ 为 }P'(x)\text{ 的根.}$$

267. 求多项式 $f(x)=x^3+ax+b$ 有重根的条件($a\neq0$).

[解] $f'(x)=3x^2+a$. 要使 $f(x)$ 有重根, 不妨设重根为 x_0, 则须有:

$$\begin{cases} f(x_0)=0, \\ f'(x_0)=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_0^3+ax_0+b=0 & \cdots① \\ 3x_0^2+a=0 & \cdots②, \end{cases}$$

①×3－②×x_0: $3ax_0+3b-ax_0=0$, $2ax_0+3b=0$, $x_0=-\dfrac{3b}{2a}$.

代入②得: $4a^3+27b^2=0$. ∴ 当 $f(x)=x^3+ax+b$ 的系数满足 $4a^3+27b^2=0$ 时, 多项式有重根.

268. 已知: $f(x)=x^n-ax-b$, 其中 $n>2$, 若 α 是 $f(x)=0$ 的重根, 且 a, b 为非零的有理数. 求证: α 是 $f(x)$ 的有理根.

[证] $f(x)=x^n-ax-b$. $f'(x)=nx^{n-1}-a$. 已知 α 是 $f(x)$ 的重根, 则: $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$.

$$\therefore \begin{cases} \alpha^n-a\alpha-b=0 & \cdots① \\ n\alpha^{n-1}-a=0 & \cdots②, \end{cases}$$

①×n－②×α: $n\alpha^n-an\alpha-nb-n\alpha^n+a\alpha=0$,

$$\alpha=\frac{nb}{(1-n)\cdot a} \quad (a\neq0,\ b\neq0).$$

由 a、b 是非零有理数, 得 α 是 $f(x)=0$ 的有理根.

269. 已知: $\{a_n\}$ 是等差数列: $a_1, a_1+d, \cdots, a_1+(n-1)d, \cdots$. 求证:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]\cdot q^k$$
$$=\frac{a_1q+(d-a_1)q^2-a_{n+1}q^{n+1}+a_nq^{n+2}}{(1-q)^2} \quad (q\neq1).$$

[证] 由 $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k\right)'=\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}\right)'=\dfrac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}$.

得
$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)x^k=x^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)x^{k-2}=x^2\left(\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\right)'$$
$$=\frac{(n-1)x^{n+2}-nx^{n+1}+x^2}{(1-x)^2}.$$

令 $x=q$. 则

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)dq^k=\frac{(n-1)dq^{n+2}-ndq^{n+1}+dq^2}{(1-q)^2} \quad \cdots①$$

又
$$\sum_{k=1}^{n}a_1q^k=\frac{a_1q(1-q^n)}{1-q} \quad \cdots②$$

①+②，　∴ $\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]q^k$

$$=\frac{a_1q+(d-a_1)q^2-a_{n+1}q^{n+1}+a_nq^{n+2}}{(1-q)^2} \quad (q\neq 1).$$

［说明］ 由本题很容易推得等差数列与等比数列对应项乘积构成的数列前 n 项和，如

$$S_n=q+2q^2+\cdots+nq^n=\frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2} \quad (q\neq 1).$$

270. 求证：

$$1^2\cdot q^0+2^2\cdot q^1+\cdots+n^2\cdot q^{n-1}$$
$$=\frac{1+q-(n+1)^2q^n+(2n^2+2n-1)q^{n+1}-n^2q^{n+2}}{(1-q)^3}.$$

［证］ 设　$F(x)=\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot x^k\right)'$.

由上题得：
$$\sum_{k=1}^{n}kx^k=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \quad (x\neq 1).$$

$$\therefore\ F(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}kx^k\right)'=\left[\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\right]'$$
$$=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

令 $x=q$，得

$$1^2\cdot q^0+2^2\cdot q^1+\cdots+n^2\cdot q^{n-1}$$
$$=\frac{1+q-(n+1)^2q^n+(2n^2+2n-1)q^{n+1}-n^2q^{n+2}}{(1-q)^3} \quad (q\neq 1).$$

271. 求：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n+\cdots$前 n 项和.

［解］ $[(1+x)^n]'=[1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n]'$

$$=C_n^1+2C_n^2x+\cdots+nC_n^nx^{n-1}.$$

得 $$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k x^{k-1} \quad \cdots①$$

当 $x=1$ 时，便得 $C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

当 $x=-1$ 时，便得 $C_n^1-2C_n^2+\cdots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$.

［说明］ 当 x 取常数 q，就可得组合数数列每一项与等比数列每一对应项乘积所构成数列的前 n 项和．如 $x=2$，得 $C_n^1\cdot 2^0+2C_n^2\cdot 2^1+3C_n^3\cdot 2^2+\cdots+nC_n^n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 3^{n-1}$ 等等．

272．求证：$\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}$.

［证］ $\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$.

由上题： $$\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k=n\cdot 2^{n-1}.$$

令 $$F(x)=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k\cdot x^{k-2}=\left[\sum_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}\right]'=\left[\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k\right]''$$
$$=[(1+x)^n-1]''=n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

于是当 $x=1$ 时，$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=n(n-1)2^{n-2}$.

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}.$$

(3) 复合函数的导数

273．求 $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]$ 的导数．

［分析］ 求复合函数的导数，应注意复合函数是由哪几个函数复合而成的．例如 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 可以看作 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=\varphi(x)$ 三个函数复合而成．为了方便，复合函数求导数时，不必都写出中间变量，只要由外层到内层，一层一层逐层求导，不漏层，可以简化运算．

［解一］ $y=\ln u$, $u=\ln v$, $v=\ln x$.

$$\therefore\quad y'_x=\{\ln[\ln(\ln x)]\}'=(\ln u)'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

[解二]　$$\{\ln[\ln(\ln x)]\}'=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot[\ln(\ln x)]'$$
$$=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'$$
$$=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

274. 求下列函数的导数:

(1) $y=\sin[\cos^2(x^4+x^3)]$;　　(2) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$;

(3) $y=\operatorname{arctg}[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^2$.

[解]　(1) 逐层对中间变量求导

$$y'=\{\sin[\cos^2(x^4+x^3)]\}'$$
$$=\cos[\cos^2(x^4+x^3)]\cdot[\cos^2(x^4+x^3)]'$$
$$=\cos[\cos^2(x^4+x^3)]\cdot2\cos(x^4+x^3)\cdot[\cos(x^4+x^3)]'$$
$$=\cos[\cos^2(x^4+x^3)]\cdot2\cos(x^4+x^3)\cdot[-\sin(x^4+x^3)]\cdot(x^4+x^3)'$$
$$=\cos[\cos^2(x^4+x^3)]\cdot2\cos(x^4+x^3)\cdot[-\sin(x^4+x^3)]\cdot(4x^3+3x^2)$$
$$=-2(4x^3+3x^2)\cdot\cos[\cos^2(x^4+x^3)]\cdot\cos(x^4+x^3)\cdot\sin(x^4+x^3).$$

(2) $$y'=\left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'$$
$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

(3) $$y'=\{\operatorname{arctg}[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^2\}'$$
$$=\frac{1}{1+[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^4}\cdot\{[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^2\}'$$
$$=\frac{1}{1+[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^4}\cdot2\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)$$
$$\cdot[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]'$$
$$=\frac{2\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)}{1+[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^4}\cdot\frac{1}{1+x^2-\operatorname{ctg}x}\cdot(1+x^2-\operatorname{ctg}x)'$$
$$=\frac{2(2x+\csc^2x)\cdot\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)}{\{1+[\ln(1+x^2-\operatorname{ctg}x)]^4\}\cdot(1+x^2-\operatorname{ctg}x)}.$$

275. 求 $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$ 的导

数.

[解] $\left[\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right]'$

$$=\left[\frac{1}{12}(\ln(x^4-x^2+1)-2\ln(x^2+1))\right]'$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1}-\frac{4x}{x^2+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\cdot\left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{6x(x^2-1)}{x^6+1}+\frac{2x}{4(x^4-x^2+1)}=\frac{x^3}{1+x^6}.$$

[说明] 涉及对数函数求导，适当注意使用对数运算的性质，进行恒等变形，以减少运算量.

276. 求 $y=\operatorname{arc\,tg}(\sec x+\operatorname{tg} x)$的导数.

[解一] $[\operatorname{arctg}(\sec x+\operatorname{tg} x)]'$

$$=\frac{(\sec x+\operatorname{tg} x)'}{1+(\sec x+\operatorname{tg} x)^2}=\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x+\sec^2 x}{1+(\sec x+\operatorname{tg} x)^2}$$

$$=\frac{\sec x(\operatorname{tg} x+\sec x)}{1+\sec^2 x+2\sec x\cdot\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\frac{\sec x(\operatorname{tg} x+\sec x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)+\sec^2 x+2\sec x\operatorname{tg} x}=\frac{1}{2}.$$

[解二] 由三角恒等式 $\sec x+\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$,

得 $\operatorname{arctg}(\sec x+\operatorname{tg} x)=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\quad\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\right).$

$$\therefore\quad[\operatorname{arctg}(\sec x+\operatorname{tg} x)]'=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}.$$

277. 求 $(\arccos x)^2\cdot\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{4}\right]$的导数.

[解] 令 $u=\arccos x$.

$$\left\{(\arccos x)^2\cdot\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{4}\right]\right\}'_x$$

$$=\left[u^2\cdot\left(\ln^2 u-\ln u+\frac{1}{4}\right)\right]'_u\cdot(\arccos x)'_x$$

$$=\left[2u\cdot\left(\ln u-\frac{1}{2}\right)^2+u\cdot(2\ln u-1)\right]\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=u\cdot\left(\ln u-\frac{1}{2}\right)\cdot(2\ln u-1+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=-\frac{2\arccos x\cdot\left(\ln^2\arccos x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

［说明］ 求导时，仔细地观察函数的形状，适当选取中间变量，利用复合函数的求导法则，就可以减少求导的运算量，如本题令 $u=\arccos x$.

278. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(2) $y=\ln(\operatorname{tg} x+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x})$.

［解］ (1) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 令 $\operatorname{tg} x=u$, $y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$. 由(1)的结论及复合函数求导法

则 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot(\operatorname{tg} x)'=|\cos x|\cdot\sec^2 x$.

$$\therefore\quad y'=|\sec x|.$$

279. 求 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

［解］ 令 $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{x+\sqrt{x}}=v$,

则 $$(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}})'=(\sqrt{x+v})'=\frac{1}{2\sqrt{x+v}}\cdot(x+v)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot[1+(\sqrt{x+u})']$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+u}}\cdot(x+u)'\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

280. 求下列函数的导数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$;

(2) $y=\sqrt[3]{\sin(2x+1)+\sqrt[3]{\sin(2x+1)}}$.

［解］ (1) 增设中间变量, 令 $u=x+\sqrt[3]{x}$, 则 $y=u^{\frac{1}{3}}$. 按复合函数求导法则:

$$y'_x=(u^{\frac{1}{3}})'_u\cdot u'_x=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot(x+x^{\frac{1}{3}})'_x=\frac{1}{3}(x+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

$$\therefore\quad y'_x=\frac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{9\sqrt[3]{[x\cdot(x+\sqrt[3]{x})]^2}}.$$

(2) 令 $\sin(2x+1)=t$, $t+\sqrt[3]{t}=u$. 按复合函数求导法则及(1)中的结论:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=\frac{1}{3}(t+t^{\frac{1}{3}})^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+3t^{-\frac{2}{3}})\cdot 2\cdot\cos(2x+1).$$

$$\therefore\quad y'_x=\frac{2\cos(2x+1)\cdot[3\sqrt[3]{\sin^2(2x+1)}+1]}{9\sqrt[3]{\sin(2x+1)\cdot[\sin(2x+1)+\sqrt[3]{\sin(2x+1)}]^2}}.$$

281. 求 $\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\cdot\operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})$ 的导数.

［解］ 令 $u=a^x$.

$$\therefore\quad \left[\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\cdot\operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})\right]'_x$$

$$=\left[\frac{u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}\operatorname{arc\,ctg}u^{-1}\right]'_u\cdot(a^x)'_x$$

$$=\left[\frac{u}{1+u^2}-\frac{2}{1+u^2}\operatorname{arc\,ctg}u^{-1}+\operatorname{arc\,ctg}u^{-1}\right]'_u\cdot(a^x)'_x$$

$$=\left[\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}+\frac{4u}{(1+u^2)^2}\operatorname{arc\,ctg}u^{-1}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(1+u^2)^2}+\frac{1}{1+u^2}\right]\cdot a^x\cdot\ln a$$

$$=\frac{4u}{(1+u^2)^2}\operatorname{arc\,ctg}u^{-1}\cdot a^x\cdot\ln a=\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\cdot\operatorname{arc\,ctg}a^{-x}.$$

282. 求 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的导数.

[解一] $y'=\dfrac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}$

$$=\frac{2(x-1)[(x-1)-(2x-1)]}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

[解二] $y=\dfrac{2(x-1)+1}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$$\therefore\quad y'=-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}.$$

283. 求下列函数的导数:

(1) $y=\dfrac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}$; (2) $y=(t^{\frac{1}{2}}-2)\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}$.

(1) [解一] $y'_x=\dfrac{\frac{3}{2}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot x^3-3x^2(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}$

$$=\frac{3[(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x^2-(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}]}{x^4}$$

$$=\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}[x^2-(x^2-a^2)]}{x^4}=\frac{3a^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^4}.$$

[解二] $y=\dfrac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}=\left[1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$.

按复合函数求导,

$$\therefore\quad y'_x=\frac{3}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[-2\cdot\left(\frac{a}{x}\right)\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{3a^2}{x^3}\cdot\left[1-\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{3a^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^4}.$$

(2) [解一] $y'_t=(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+(t^{\frac{1}{2}}-2)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(t^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}(t^{\frac{1}{2}}-2)+(t^{\frac{1}{2}}+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{4(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

[解二] $y=(t^{\frac{1}{2}}-2)\cdot\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}=(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}-3(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}$.

由复合函数求导,

$$\therefore\quad y'_t=\frac{3}{2}\cdot(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(t^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4(t^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

284. 求 $y=\dfrac{1+\cos kx}{1-\cos kx}$ 的导数.

[解一] $\left(\dfrac{1+\cos kx}{1-\cos kx}\right)'$

$$=\frac{-k\sin kx(1-\cos kx)-k\sin kx(1+\cos kx)}{(1-\cos kx)^2}$$

$$=\frac{-2k\sin kx}{(1-\cos kx)^2}.$$

[解二] $\because\quad \dfrac{1+\cos kx}{1-\cos kx}=\operatorname{ctg}^2\dfrac{kx}{2}$,

$$\therefore\quad \left(\frac{1+\cos kx}{1-\cos kx}\right)'=\left(\operatorname{ctg}^2\frac{kx}{2}\right)'=-k\operatorname{ctg}\frac{kx}{2}\cdot\csc^2\frac{kx}{2}.$$

285. 求 $a^{\log_b x}$ 的导数.

[解一] 利用复合函数求导公式,得

$$(a^{\log_b x})'=a^{\log_b x}\cdot\ln a\cdot(\log_b x)'=a^{\log_b x}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{x}\cdot\log_b e=\frac{a^{\log_b x}\cdot\log_b a}{x}.$$

[解二] 利用对数恒等式 $a^{\log_b N}=N^{\log_b a}$, 得

$$(a^{\log_b x})'=(x^{\log_b a})'=\log_b a\cdot x^{\log_b\frac{a}{b}}.$$

[说明] 求形如 $f(x)=a^{\log_b\varphi(x)}$ 的导数,通过恒等变形, 再求导, 显得方便些:

$$[a^{\log_b\varphi(x)}]'=[\varphi(x)^{\log_b a}]'=\log_b a\cdot[\varphi(x)^{\log_b\frac{a}{b}}]\cdot\varphi'(x)$$

$$=\log_b a\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot f(x).$$

286. 求 $e^{\log_a\arcsin\frac{x+1}{2}}$ 的导数.

[解] 仿上题的方法求导,得 $\left(e^{\log_a\arcsin\frac{x+1}{2}}\right)'$

$$=\left[\left(\arcsin\frac{x+1}{2}\right)^{\log_a e}\right]'=\log_a e\cdot\frac{\left(\arcsin\dfrac{x+1}{2}\right)'}{\arcsin\dfrac{x+1}{2}}\cdot e^{\log_a\arcsin\frac{x+1}{2}}$$

$$=\log_a e\cdot\frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}\cdot\arcsin\frac{x+1}{2}}\cdot e^{\log_a\arcsin\frac{x+1}{2}}.$$

287. 求 $f(x)=\sqrt[4]{5x+\sqrt[3]{x+1}}$ 的导数.

［解］ $[\sqrt[4]{5x+\sqrt[3]{x+1}}]'=\{[5x+(x+1)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{4}}\}'$

$$=\frac{1}{4}[5x+(x+1)^{\frac{1}{3}}]^{-\frac{3}{4}}\cdot[5x+(x+1)^{\frac{1}{3}}]'$$

$$=\frac{1}{4}[5x+(x+1)^{\frac{1}{3}}]^{-\frac{3}{4}}\cdot\left[5+\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right].$$

［说明］ 将根式化为幂的形式，是求导过程中常用的方法。

288. 求 $y=\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x}}}$ 的导数.

［解］ $[\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x}}}]'=[\sin^{\frac{7}{8}}x]'=\frac{7}{8}\sin^{-\frac{1}{8}}x\cdot\cos x.$

289. 求 $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ 的导数.

［解］ 对 $f(x)$ 恒等变形

$$f(x)=\ln\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\ln(1-\sqrt{1-x^2})-\ln x.$$

$$f'(x)=[\ln(1-\sqrt{1-x^2})-\ln x]'=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

290. 求 $\ln(\sqrt{x^2+3}-5)+\ln(\sqrt{x^2+3}+5)$ 的导数.

［分析］ 采用对数公式 $\ln N_1+\ln N_2=\ln(N_1\cdot N_2)$ 作恒等变换.

［解］ $[\ln(\sqrt{x^2+3}-5)+\ln(\sqrt{x^2+3}+5)]'=[\ln(x^2+3-25)]'$

$$=[\ln(x^2-22)]'=\frac{2x}{x^2-22}.$$

291. 求下列函数的导数:

(1) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$;　　(2) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$.

［解］ (1) $y'_x=2\sin x\cos xf'(\sin^2x)-2\sin x\cos xf'(\cos^2x)$

$$=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)].$$

(2) $y'_x=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}[f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x)]$.

292. 若函数$f(x)$在区间内任意一点x处可导,且$f(x)\neq0$,则$[\ln|f(x)|]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

〔证〕 当$f(x)>0$时, $\ln|f(x)|=\ln f(x)$.

$$[\ln|f(x)|]'=[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

当$f(x)<0$时, $\ln|f(x)|=\ln(-f(x))$.

$$[\ln|f(x)|]'=[\ln(-f(x))]'=\frac{-f'(x)}{-f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\therefore\quad [\ln|f(x)|]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

293. 求 $\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$ 的导数.

〔分析〕 形如 $f(x)=\ln\dfrac{f_1(x)\cdots f_k(x)}{g_1(x)\cdots g_s(x)}$ $\left(\dfrac{f_1(x)\cdots f_k(x)}{g_1(x)\cdots g_s(x)}>0\right)$ 函数的导数,常先变形:

$f(x)=(\ln|f_1(x)|+\cdots+\ln|f_k(x)|)-(\ln|g_1(x)|+\cdots+\ln|g_s(x)|)$,

再用上题$[\ln|f(x)|]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$结论求导.

〔解〕 $$\left(\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\right)'=\left[\frac{1}{4}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)\right]'$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\frac{1-x^2}{2(x^2+x+1)(x^2-x+1)}.$$

〔说明〕 同样对形如$f(x)=\ln[f_1^{\alpha_1}(x)\cdot f_2^{\alpha_2}(x)\cdots\cdots f_k^{\alpha_k}(x)]$的函数求导,也可用相同方法.

294. 求 $\ln\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$ 的导数.

〔解〕 $$\left[\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right]'=[\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1})]'$$

$$-[\ln|x|]'=\frac{2x+\dfrac{4x^3+6x}{2\sqrt{x^4+3x^2+1}}}{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\begin{Bmatrix}2x^2\sqrt{x^4+3x^2+1}+2x^4+3x^2-(x^2+1)\\+\sqrt{x^4+3x^2+1}\end{Bmatrix}\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x\cdot(x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1})\cdot\sqrt{x^4+3x^2+1}}$$

$$=\frac{(x^2-1)\sqrt{x^4+3x^2+1}+(x^2-1)(x^2+1)}{x(x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1})\sqrt{x^4+3x^2+1}}=\frac{x^2-1}{x\cdot\sqrt{x^4+3x^2+1}}.$$

295. 求 $y=\sqrt{6}\ \ln\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}$ 的导数.

［解］ $\left[\sqrt{6}\ \ln\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right]'$

$$=[\sqrt{6}\ln|\sqrt{3}x-\sqrt{2}|]'-[\sqrt{6}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{2}|]'$$

$$=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}-\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}=\frac{12}{3x^2-2}.$$

296. 求 $\dfrac{(1-x^2)\cdot e^{3x-1}\cdot\cos x}{(\arccos x)^3}$ 的导数.

［分析］ 对形如 $F(x)=\dfrac{f_1^{\gamma_1}(x)\cdots f_k^{\gamma_k}(x)}{g_1^{\beta_1}(x)\cdots g_s^{\beta_s}(x)}$ 的函数求导，一般采用对数求导法较方便.

［解］ $f(x)=\dfrac{(1-x^2)e^{3x-1}\cdot\cos x}{(\arccos x)^3}$.

$$|f(x)|=\frac{|1-x^2|\cdot e^{3x-1}\cdot|\cos x|}{|\arccos x|^3}.$$

两边取对数:

$$\ln|f(x)|=\ln|1-x^2|+\ln e^{3x-1}+\ln|\cos x|-\ln|\arccos x|^3.$$

两边求导:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-2x}{1-x^2}+3+\frac{(-\sin x)}{\cos x}-3\cdot\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}.$$

$$f'(x)=\frac{(1-x^2)\cdot e^{3x-1}\cdot\cos x}{(\arccos x)^3}\cdot\left[\frac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg}x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right].$$

297. 求 $f(x)=(x-a)^\alpha\cdot(x-b)^\beta\cdot(x-c)^\gamma\cdot(x-d)^\delta$ 的导数.

［分析］ 在因子较多的情况下，采用对数求导法较为方便.

[解] $$f'(x)=f(x)\cdot\left\{\frac{[(x-a)^{\alpha}]'}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{[(x-b)^{\beta}]'}{(x-b)^{\beta}}+\frac{[(x-c)^{\gamma}]'}{(x-c)^{\gamma}}+\frac{[(x-d)^{\delta}]'}{(x-d)^{\delta}}\right\}$$

$$=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot(x-c)^{\gamma}\cdot(x-d)^{\delta}\cdot\left[\frac{\alpha(x-a)^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\beta(x-b)^{\beta-1}}{(x-b)^{\beta}}+\frac{\gamma(x-c)^{\gamma-1}}{(x-c)^{\gamma}}+\frac{\delta(x-d)^{\delta-1}}{(x-d)^{\delta}}\right]$$

$$=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot(x-c)^{\gamma}\cdot(x-d)^{\delta}\cdot\left(\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\frac{\gamma}{x-c}+\frac{\delta}{x-d}\right).$$

298. 求 $\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$ 的导数.

[解] 采用对数求导法:

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$$

两边取绝对值

$$|f(x)|=\sqrt[3]{\frac{|x|\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^2}},$$

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}[\ln|x|+\ln(x^2+1)-2\ln|x^2-1|].$$

等式两边求导:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right),$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}f(x)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right),$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right).$$

299. 求$(\mathrm{tg}\,x)^{\sin x}$ 的导数.

[分析] $y=u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$是幂指函数,无现成求导公式可循,一般可采用下列方法:

$$[u(x)^{v(x)}]'=[e^{v(x)\ln u(x)}]'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right]$$

$$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right].$$

［解］ $[(\operatorname{tg} x)^{\sin x}]'=(e^{\sin x \ln \operatorname{tg} x})'=e^{\sin x \ln \operatorname{tg} x}(\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x)'$

$$=(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x+\sec x).$$

300．求 $x^{(\ln x)^n}$ 的导数．

［解］ $[x^{(\ln x)^n}]'=[e^{(\ln x)^n \cdot \ln x}]'=e^{(\ln x)^{n+1}} \cdot (n+1)(\ln x)^n \cdot \frac{1}{x}$

$$=(n+1) \cdot (\ln x)^n \cdot x^{(\ln x)^n-1}.$$

301．求 $y=(\ln x)^{e^x}$ 的导数 $(x>1)$．

［解］ $[(\ln x)^{e^x}]'=[e^{e^x \ln(\ln x)}]'=e^{e^x \ln(\ln x)} \cdot \left[e^x \ln(\ln x)+\frac{e^x}{x \ln x}\right]$

$$=e^x \cdot (\ln x)^{e^x} \cdot \left[\ln(\ln x)+\frac{1}{x \ln x}\right].$$

302．求 $f(x)=x+x^x+x^{x^x}$ 的导数 $(x>0)$．

［解］ 设 $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^x$, $f_3(x)=x^{x^x}$，则 $f=f_1+f_2+f_3$.

$f_1'(x)=1$,

$f_2'(x)=(x^x)'=(e^{x \ln x})'=e^{x \ln x} \cdot (\ln x+1)=x^x \cdot (1+\ln x)$,

$f_3'(x)=x^{x^x} \cdot [x^x(1+\ln x) \cdot \ln x+x^{x-1}]$,

$\therefore$ $f'(x)=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}[x^x(1+\ln x)\ln x+x^{x-1}]$.

303．求下列函数的导数：(1) $y=|x|$；(2) $y=x|x|$．

［解］ (1) $y=f(x)=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

$$\therefore \quad y'=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

当 $x=0$ 时，由 $f(0+\Delta x)=|\Delta x|=\begin{cases} \Delta x & \Delta x>0, \\ -\Delta x & \Delta x<0. \end{cases}$ 得

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$\therefore$ 在 $x=0$ 处不可导．所以 $y'=\frac{|x|}{x}$ 或写成 $y'=\operatorname{sgn} x\,(x \neq 0)$.

(2) $y=x|x|$ 此为两函数 x 与 $|x|$ 的乘积．按乘积的求导法则与(1)的结论：当 $x \neq 0$ 时，$y'=(x|x|)'=|x|+x \cdot (|x|)'=|x|+x \cdot \frac{|x|}{x}=2|x|$,

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，$y'|_{x=0}=0$.

即：
$$y'=2|x|.$$

［说明］ $y=|x|$，$y'=\operatorname{sgn} x(x\neq 0)$，这一结论常可用于形如$|f(x)|$的函数，在非零点的导数．令 $u=f(x)$，则$(|f(x)|)'=(|u|)'\cdot u'_x$．按复合函数求导法则，有$(|f(x)|)'=f'(x)\cdot\operatorname{sgn} f(x)\ (f(x)\neq 0)$.

304．已知函数$f(x)$在(a, b)上可导，求：$y=|f(x)|$的导数．

［解］ (1) 若$f(x)\neq 0$．由上题的说明，有
$$(|f(x)|)'=f'(x)\cdot\operatorname{sgn} f(x).$$

(2) 若$f(x_0)=0$.

(i) 如$f'(x_0)=0$，则$(|f(x)|)'|_{x=x_0}=0$．兹证明如下：

显然$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

如$f'(x_0)=0$，即$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=0$.

则得$\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{x-x_0}\right|=0$．且$\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0}$是有界变量，

$$\therefore\quad (|f(x)|)'|_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|\cdot\frac{|x-x_0|}{x-x_0}=0.$$

即
$$(|f(x)|)'|_{x=x_0}=0.$$

(ii) 如$f'(x_0)\neq 0$，不妨设$f'(x_0)=k\ (k\neq 0)$.

$$\because\quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0}=1,\quad \lim_{x\to x_0-0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0}=-1.$$

$\therefore$ $|f(x)|$在x_0处的右导数：

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|\cdot\frac{|x-x_0|}{x-x_0}$$
$$=|k|.$$

$|f(x)|$在x_0处的左导数：

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|\frac{|x-x_0|}{x-x_0}$$
$$=-|k|.$$

$\therefore$ $(|f(x)|)'|_{x=x_0}$不存在.

[说明] 本题说明了一类形如$|f(x)|$的函数的求导方法. 一般在$f(x)\neq 0$处, 有结论$(|f(x)|)'=f'(x)\operatorname{sgn} f(x)$. 在$f(x)$的零点处, 若$f(x_0)=0$, 且$f'(x_0)=0$, 则有$(|f(x)|)'|_{x=x_0}=0$. 否则就不可导.

此外, 还可有结论, 如果$|f(x)|$在x_0处导数为零, 且$f(x_0)=0$, 则$f'(x_0)$存在, 且有$f'(x_0)=0$.

上面结论证明如下: 若$(|f(x)|)'|_{x=x_0}=0$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=0.$$

于是 $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}\cdot\frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

$\because$ $\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$是有界变量, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=0$,

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{|f(x)|}\cdot\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=0$, 即$f'(x_0)=0$.

305. 求$y=|(x-1)(x+1)^3|$的导数.

[解] 令$(x-1)(x+1)^3=u$,

(1) 当$u\neq 0$时(即$x\neq\pm 1$),

$$[|(x-1)(x+1)^3|]'=[|u|]'\cdot[(x-1)(x+1)^3]'$$
$$=\frac{|(x-1)(x+1)^3|}{(x-1)(x+1)^3}\cdot(x+1)^2(4x-2)=\frac{|x^2-1|}{x-1}\cdot(x+1)(4x-2).$$

(2) 若$x=1$, $f(1)=0$,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{|(x-1)(x+1)^3|}{x-1}=8,$$
$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{|(x-1)(x+1)^3|}{x-1}=-8,$$

$\therefore$ $f(x)$在$x=1$处不可导.

(3) 若$x=-1$, $f(-1)=0$,

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{|(x-1)(x+1)^3|}{x+1}=0,$$

$\therefore$ $f(x)$在$x=-1$处可导, $f'(-1)=0$.

[说明] 由上题结论: $[(x-1)(x+1)^3]'=(x+1)^2(4x-2)$.

当$x=-1$时, 导数为零, 故$|(x-1)(x+1)^3|$在$x=-1$处也可导, 导数为零. 当$x=1$时, 导数为8, 故$|(x-1)(x+1)^3|$在$x=1$处不可导.

显然, 这样解法比从定义出发可简单些.

306. 求证 $f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的任何邻域内有不可导点，但在 $x=0$ 处可导.

［证］ (1) 在 $x=0$ 的任何邻域内总可以找到 $x_n=\dfrac{2}{4n+1}$ $(n=\pm 1,\cdots)$ 的点. 作 $g(x)=\begin{cases}x^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 显然 $g(x_n)=0$,

$g'(x_n)=\left(x^2\cos\dfrac{\pi}{x}\right)'\Big|_{x=x_n}=2x\cos\dfrac{\pi}{x}-\pi\sin\dfrac{\pi}{x}\Big|_{x=x_n}\neq 0$, $f(x)=|g(x)|$.

∴ 由上题得 $f(x)$ 在 x_n 处不可导，即在 x_0 的任何邻域内总有不可导点.

(2) 当 $x=0$, 有 $f(0)=0$, 而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|}{x}=0$, ∴ $f(x)$在 $x=0$ 处可导.

307. 求 $y=|\sin^3 x|$ 的导数.

［解］ (1) $x\neq k\pi$ 时，则

$$[|\sin^3 x|]'=\frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x}\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x=3|\sin x|\cdot\sin x\cdot\cos x.$$

(2) $x=k\pi$ 时，由第 304 题结论，令 $u=\sin^3 x$, $u'=(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x$, $u'|_{x=k\pi}=0$, ∴ $|\sin^3 x|'|_{x=k\pi}=0$.

总之， $$[|\sin^3 x|]'=3|\sin x|\cdot\sin x\cdot\cos x.$$

308. 设 $f_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为可导函数. 求证：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix},$$

并利用结果求:

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

的一阶导数.

[证一] 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{d}{dx}f_{11}(x)=f'_{11}(x)$，右边 $=f'_{11}(x)$. 显然成立。

假设 $n=k-1$ 时成立，那末当 $n=k$ 时，由行列式性质

$$A(x)=f_{11}(x)\cdot A_{11}(x)+f_{12}(x)\cdot A_{12}(x)+\cdots+f_{1k}(x)\cdot A_{1k}(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}f_{1i}(x)\cdot A_{1i}(x)$$

其中 $A_{ij}(x)$ 是 $f_{ij}(x)$ 的代数余子式。故有:

$$A'(x)=\sum_{i=1}^{k}f'_{1i}(x)\cdot A_{1i}(x)+\sum_{i=1}^{k}f_{1i}(x)\cdot A'_{1i}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}f'_{1i}(x)A_{1i}(x)+\sum_{i=1}^{k}f_{1i}(x)\cdot\sum_{j=2}^{k}\begin{vmatrix} f_{2,1}(x) & \cdots & f_{2,i-1}(x) & f_{2,i+1}(x) & \cdots & f_{2,k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{j,1}(x) & \cdots & f'_{j,i-1}(x) & f'_{j,i+1}(x) & \cdots & f'_{j,k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k,1}(x) & \cdots & f_{k,i-1}(x) & f_{k,i+1}(x) & \cdots & f_{k,k}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}f'_{1i}(x)\cdot A_{1i}(x)+\sum_{j=2}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{j1}(x) & \cdots & f'_{jk}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

由数学归纳法可证对一切 n，结论成立。

[证二] 利用导数的定义以及行列式的性质，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\begin{vmatrix} f_{11}(x+\Delta x) & f_{12}(x+\Delta x) & \cdots & f_{1n}(x+\Delta x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k1}(x+\Delta x) & f_{k2}(x+\Delta x) & \cdots & f_{kn}(x+\Delta x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x+\Delta x) & f_{n2}(x+\Delta x) & \cdots & f_{nn}(x+\Delta x)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{1}{\Delta x}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k-11}(x) & f_{k-12}(x) & \cdots & f_{k-1n}(x)\\ f_{k1}(x+\Delta x)-f_{k1}(x) & f_{k2}(x+\Delta x)-f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x+\Delta x)-f_{kn}(x)\\ f_{k+11}(x+\Delta x) & f_{k+12}(x+\Delta x) & \cdots & f_{k+1n}(x+\Delta x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x+\Delta x) & f_{n2}(x+\Delta x) & \cdots & f_{nn}(x+\Delta x)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

∴ 结论成立.

$$F'(x)=\left(\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ -3 & x & 3\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}\right)'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ -3 & x & 3\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & x+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ -3 & x & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3x^2+15.$$

309. 证明：函数 $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$ 满足关系式 $xy'+1=e^y$.

［证］ $y'=[-\ln(1+x)]'=-\dfrac{1}{1+x}\quad(x>-1)$.

将 $y'=-\dfrac{1}{1+x}$ 代入关系式左边，得：

$$\text{左边}=x\cdot\left(-\frac{1}{1+x}\right)+1=\frac{1+x}{1+x}-\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+x}=e^{\ln\frac{1}{1+x}}=e^y.$$

∴ 左边=右边.

310. 证明：$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ 满足关系式 $2y=xy'+\ln y'$.

［证］ $y'=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'+\left(\dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}\right)'+\left[\dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]'$

$$=x+\frac{1+2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}=x+\frac{2(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}=x+\sqrt{1+x^2}.$$

将上述导数代入关系式右端

$$xy'+\ln y'=x(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right]=2y.$$

∴ 左边=右边.

(4) 反函数的导数

311 求 $y=\arcsin\dfrac{\pi}{x}+\arccos\dfrac{2\pi}{x}$ 的导数.

［解］ $\left(\arcsin\dfrac{\pi}{x}\right)'=\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\pi}{x}\right)^2}}=-\dfrac{\pi}{x^2\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{x^4}}}$

$$=-\frac{\pi}{|x|\cdot\sqrt{x^2-\pi^2}}.$$

同理 $\left(\arccos\dfrac{2\pi}{x}\right)'=\dfrac{2\pi}{|x|\cdot\sqrt{x^2-4\pi^2}}.$

$$\therefore\quad \left(\arcsin\frac{\pi}{x}+\arccos\frac{2\pi}{x}\right)'=-\frac{\pi}{|x|\sqrt{x^2-\pi^2}}+\frac{2\pi}{|x|\cdot\sqrt{x^2-4\pi^2}}.$$

312. 求证：$(\operatorname{arc\,sec} x)'=\dfrac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

［证］ 设 $y=\operatorname{arc\,sec} x$，则 $x=\sec y$，$x'_y=\sec y\cdot\operatorname{tg} y$. 即

$$x'_y=\begin{cases}\sec y\cdot\sqrt{\sec^2 y-1}, & 0<y<\dfrac{\pi}{2},\\ \sec y\cdot(-\sqrt{\sec^2 y-1}), & \dfrac{\pi}{2}<y<\pi.\end{cases}$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sec y\cdot\sqrt{\sec^2 y-1}}, & 0<y<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{-1}{\sec y\cdot\sqrt{\sec^2 y-1}}, & \dfrac{\pi}{2}<y<\pi.\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & 1<x<+\infty,\\ \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & -\infty<x<-1.\end{cases}$$

于是，
$$(\operatorname{arc\,sec} x)'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\quad(|x|>1).$$

［说明］ 同理可推得

$$(\operatorname{arc\,csc} x)'=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\quad(|x|>1).$$

313. 已知：$y=\operatorname{arc\,csc}\dfrac{3x}{x-1}$. 求：$\dfrac{dy}{dx}$.

［解］ 由上题说明

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x}{x-1}\right)}{\left|\dfrac{3x}{x-1}\right|\sqrt{\left(\dfrac{3x}{x-1}\right)^2-1}}=-\frac{\dfrac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}}{\left|\dfrac{3x}{x-1}\right|\cdot\sqrt{\left(\dfrac{3x}{x-1}\right)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{|x|\sqrt{8x^2+2x-1}}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{8x^2+2x-1}}\quad\left(\left|\frac{3x}{x-1}\right|>1\right).$$

314. 求下列函数的导数：

(1) $y=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}$; (2) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{4+5\operatorname{tg}x}{3}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{m\sin x-n\cos x}{\sqrt{m^2+n^2}}$;

(4) $y=\arccos\dfrac{x-3}{3}-2\sqrt{\dfrac{6-x}{x}}$.

[解] (1) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}\right)}{1+\left(\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{ax}-e^{-ax}}\right)^2}$$

$$=-\frac{\dfrac{(e^{ax}-e^{-ax})(ae^{ax}-ae^{-ax})-(e^{ax}+e^{-ax})(ae^{ax}+ae^{-ax})}{(e^{ax}-e^{-ax})^2}}{\dfrac{(e^{ax}-e^{-ax})^2+(e^{ax}+e^{-ax})^2}{(e^{ax}-e^{-ax})^2}}$$

$$=\frac{4a}{2(e^{2ax}+e^{-2ax})}=\frac{2a}{e^{2ax}+e^{-2ax}}.$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{3}\cdot 5\sec^2 x}{1+\left(\dfrac{4+5\operatorname{tg}x}{3}\right)^2}=\frac{15\sec^2 x}{25+40\operatorname{tg}x+25\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\frac{3\sec^2 x}{5\sec^2 x+8\operatorname{tg}x}=\frac{3}{5+8\sin x\cos x}=\frac{3}{5+4\sin 2x}.$$

(3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}(m\cos x+n\sin x)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{m\sin x-n\cos x}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{m\cos x+n\sin x}{\sqrt{m^2+n^2-(m\sin x-n\cos x)^2}}$$

$$=\frac{m\cos x+n\sin x}{\sqrt{m^2+n^2-m^2\sin^2 x+2mn\sin x\cos x-n^2\cos^2 x}}$$

$$=\frac{m\cos x+n\sin x}{\sqrt{(m\cos x+n\sin x)^2}}$$

$=\operatorname{sgn}(m\cos x+n\sin x)$ $(m\cos x+n\sin x\neq 0)$.

(4) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{6-x}}\cdot\frac{-x-(6-x)}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(6-x)\cdot x}}+\frac{6}{x\sqrt{x\cdot(6-x)}}=\frac{6-x}{x\sqrt{x(6-x)}}$$

$$=\frac{\sqrt{x(6-x)}}{x^2}.$$

(5) 参数方程和极坐标方程的导数

315. 已知 参数方程 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t|.\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$.

[解] $\frac{dy}{dt}=10t+8|t|$, $\frac{dx}{dt}=2+\operatorname{sgn} t\quad(t\neq 0)$.

(i) 当 $t\neq 0$ 时,由参数方程求导法则,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{10t+8|t|}{2+\operatorname{sgn} t}.$$

(ii) 当 $t=0$ 时,由导数的定义:

$$\Delta y=y(\Delta t)-y(0)=5(\Delta t)^2+4\Delta t|\Delta t|,$$

$$\Delta x=x(\Delta t)-x(0)=2\Delta t+|\Delta t|.$$

$$\therefore\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{5(\Delta t)^2+4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t+|\Delta t|}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{5\Delta t+4|\Delta t|}{2+\frac{|\Delta t|}{\Delta t}}=0$$

参数方程在 $t=0$ 处亦可导.

综上所述 $$\frac{dy}{dx}=\frac{10t+8|t|}{2+\operatorname{sgn} t}.$$

[说明] (1) 在 $t=0$ 处,$\frac{dx}{dt}$ 不存在,所以该点处的导数不能直接按参数方程的求导法则计算,也不能断定在 $t=0$ 处不可导,需要从导数定义出发计算.

(2) 一般说对参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$ 求它在 t_0 处的导数,如果 $\varphi'(t_0)=$

0，那么必须按导数的定义，考察

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)},$$

若此极限存在，它就是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$.

316. 已知 参数方程 $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2+t+1.\end{cases}$ 求 y 关于 x 的导数，且讨论 $t=0$ 处的导数.

[解] $\frac{dy}{dt}=2t+1$, $\frac{dx}{dt}=3t^2$.

当 $t\neq 0$ 时，$\frac{dx}{dt}\neq 0$，满足参数方程求导的条件，

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2t+1}{3t^2}.$$

当 $t=0$ 时，$\frac{dx}{dt}=0$，不能应用参数方程的求导公式，必须按定义出发考虑：

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t}{t^3}=\infty.$$

所以在 $t=0$ 处 y 关于 x 不可导.

317. 已知：参数方程 $\begin{cases}x=t^3,\\ y=t^4+3t^3.\end{cases}$ 求：$\frac{dy}{dx}$.

[解] $\frac{dy}{dt}=4t^3+9t^2$, $\frac{dx}{dt}=3t^2$. 当 $t\neq 0$ 时，由参数方程求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4t+9}{3}.$$

当 $t=0$ 时，由导数的定义

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4+3t^3}{t^3}=3.$$

综上所述
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4t+9}{3}.$$

318. 已知 参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3\varphi,\\ y=b\sin^3\varphi.\end{cases}$ 求 y 关于 x 的导数.

[解] $\frac{dy}{d\varphi}=3b\sin^2\varphi\cos\varphi$, $\frac{dx}{d\varphi}=-3a\cos^2\varphi\sin\varphi$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi \quad \left(\varphi\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\right).$$

319. 已知参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ 求 y 关于 x 的导数.

［解］ $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \quad (t\neq-1).$$

［说明］ 当 $t=-1$ 时函数在该点处无定义.

320. 已知参数方程 $\begin{cases} x=-1+2t-t^2, \\ y=2-3t+t^3. \end{cases}$ 求 y 关于 x 的导数，并问在何点处的导数为零.

［解］ $\dfrac{dy}{dt}=-3+3t^2$, $\dfrac{dx}{dt}=2-2t$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}(1+t) \quad (t\neq1).$$

$y'_x=0$, $-\dfrac{3}{2}(1+t)=0$, 得 $t=-1$. 代入参数方程.得该点坐标为 $(-4, 4)$. $\therefore$ 在 $(-4, 4)$ 处, $y'_x=0$.

321. 试求 $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$ 对于 $\ln(1+x)$ 的导数 $(x>-1)$.

［分析］ 令 $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$, $z=\ln(1+x)$, 问题可以看作

$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases}$ (x 是参数), 求 y 关于 z 的导数.

［解］ $\because$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{1+x}$, $\therefore$ $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$ 对于 $\ln(1+x)$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx}\Big/\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

322. 试求 $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{a^3}{x^3}$ 对于 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$ 的导数 $(|x|<a)$.

［解］ 设 $y=\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{a^3}{x^3}$ 及 $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$, 所求的导数为 $\dfrac{dy}{dz}$. 因为

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x^3}{a^3}+\frac{a^3}{x^3}\right)'=\frac{3x^2}{a^3}-\frac{3a^3}{x^4}=\frac{3(x^6-a^6)}{a^3x^4}.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{ax^2},$$

所以

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}=\frac{3(x^6-a^6)}{a^3x^4}\cdot\frac{ax^2}{x^2-a^2}=3\left(\frac{x^2}{a^2}+1+\frac{a^2}{x^2}\right)\quad(|x|<a).$$

323. 已知曲线的极坐标方程为 $\rho=a\theta$（阿基米德螺线）. 求曲线在直角坐标中的 $\frac{dy}{dx}$.

［分析］ 曲线由 $\rho=\rho(\theta)$ 给出，由直角坐标与极坐标的关系，得

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cdot\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\cdot\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 是参数}).$$

按照参数方程的求导法则，即可得到 y 关于 x 的导数.

［解］ 将 $\rho=a\theta$ 用参数方程表示得 $\begin{cases}x=a\theta\cos\theta,\\ y=a\theta\sin\theta.\end{cases}$ 于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{a\sin\theta+a\theta\cos\theta}{a\cos\theta-a\theta\sin\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta+\theta}{1-\theta\operatorname{tg}\theta}.$$

324. 已知曲线的极坐标方程为 $\rho=\theta\sin\theta+\cos\theta$. 求它在直角坐标中的 $\frac{dy}{dx}$.

［解］ 将 $\rho=\theta\sin\theta+\cos\theta$ 用参数方程表示，得

$$\begin{cases}x=(\theta\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(\theta\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

$$\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta+(\theta\sin\theta+\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta-(\theta\sin\theta+\cos\theta)\cdot\sin\theta}$$

$$=\frac{\theta\cdot\sin2\theta+\cos^2\theta}{\theta\cdot\cos2\theta-\sin\theta\cos\theta}\quad\left(\theta\neq\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\theta\right).$$

325. 已知曲线的极坐标方程为 $\rho=a\sin3\theta$（三叶玫瑰线）. 求曲线在直角坐标中的 $\frac{dy}{dx}$.

［解］ 将 $\rho=a\sin3\theta$ 用参数方程表示，得

$$\begin{cases} x=a\sin 3\theta\cos\theta, \\ y=a\sin 3\theta\sin\theta. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{3a\cos 3\theta\cdot\sin\theta+a\sin 3\theta\cdot\cos\theta}{3a\cos 3\theta\cdot\cos\theta-a\sin 3\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}3\theta}{3-\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}3\theta} \quad (其中\ 3\cos 3\theta\cos\theta\neq\sin 3\theta\sin\theta).$$

326. 已知曲线的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta)$（心脏线）. 求曲线在直角坐标中的 $\frac{dy}{dx}$.

［解］ 将 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 用参数方程表示，得

$$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{a(1+\cos\theta)\cos\theta-a\sin\theta\sin\theta}{-a(1+\cos\theta)\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{a\cos\theta+a\cos 2\theta}{-a\sin\theta-a\sin 2\theta}.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta} \quad \left(\theta\neq 2k\pi、\theta\neq 2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ k\in J\right).$$

327. 已知曲线的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$（双纽线）. 求曲线在直角坐标中的 $\frac{dy}{dx}$.

［解］ 方程两边求关于 φ 的导数，由隐函数求导法则，得

$$2\rho\cdot\rho'_\varphi=-2a^2\sin 2\varphi, \qquad \rho'_\varphi=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{\rho}.$$

按极坐标方程的求导法则 $\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

得 $\quad x'_\varphi=\rho'_\varphi\cos\varphi-\rho\sin\varphi,\ y'_\varphi=\rho'_\varphi\sin\varphi+\rho\cos\varphi.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\rho'_\varphi\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'_\varphi\cos\varphi-\rho\sin\varphi}=\frac{-\dfrac{a^2\sin 2\varphi\sin\varphi}{\rho}+\rho\cos\varphi}{-\dfrac{a^2\sin 2\varphi\cos\varphi}{\rho}-\rho\sin\varphi}$$

$$=\frac{a^2\sin 2\varphi\sin\varphi-\rho^2\cos\varphi}{a^2\sin 2\varphi\cos\varphi+\rho^2\sin\varphi}=\frac{a^2\sin 2\varphi\sin\varphi-a^2\cos 2\varphi\cos\varphi}{a^2\sin 2\varphi\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sin 2\varphi\sin\varphi-\cos 2\varphi\cos\varphi}{\sin 2\varphi\cos\varphi+\cos 2\varphi\sin\varphi}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}3\varphi\quad(3\varphi\neq k\pi,\ k\in J).$$

(6) 隐函数的导数

328. 求由方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$所确定的$y$关于$x$的隐函数的导数$(x,\ y>0)$.

［分析］ 由方程$F(x,\ y)=0$所确定的函数关系叫隐函数. 对$F(x,\ y)=0$两边求关于x的导数，并注意y是x的函数，即可解得$y'(x)$.

［解］ 将$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(x,\ y>0)$两边对x求导，得：

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'_x}{2\sqrt{y}}=0.$$

$$\therefore\quad y'_x=-\sqrt{\frac{y}{x}}\quad(x,\ y>0).$$

329. 求由方程$2^x+2^y=2^{x+y}$ $(x>0)$确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

［解］ 方程两边对x求导

$$2^x\cdot\ln 2+2^y\cdot\ln 2\cdot y'_x=2^{x+y}\cdot\ln 2\cdot(1+y'_x),$$

$$(2^y\ln 2-2^{x+y}\ln 2)\cdot y'_x=2^{x+y}\ln 2-2^x\ln 2,$$

$$\therefore\quad y'_x=\frac{2^{x+y}-2^x}{2^y-2^{x+y}}\quad(x>0).$$

330. 求由方程$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

［解］ 方程两边对x求导

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x\cdot y'_x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+y\cdot y'_x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}\quad(x\neq 0).$$

331. 求由方程$\sin(xy)=x$确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

[解] 方程两边对 x 求导:

$$\cos(xy)\cdot(y+x\cdot y'_x)=1,$$

$$\therefore \quad y'_x=\frac{1}{x\cdot\cos(xy)}-\frac{y}{x}.$$

332. 求由方程 $x^3-axy+2ay^2=2a^3$ 确定的隐函数在 (a, a) 处的导数.

[解] 方程两边对 x 求导 $3x^2-ay-axy'_x+4ay\cdot y'_x=0$,

$$\therefore \quad y'_x=\frac{ay-3x^2}{4ay-ax}.$$

因此 (a, a) 处的导数为: $y'_x|_{(a,a)}=-\frac{2}{3}$.

333. 求由方程 $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[8]{y}=1$ 确定的隐函数在 $(4, 1)$ 处的导数.

[解] 方程两边对 x 求导

$$\frac{2}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}y^{-\frac{7}{8}}\cdot y'_x=0,$$

$$\therefore \quad y'_x=\frac{16\cdot y^{\frac{7}{8}}}{3(2x)^{\frac{2}{3}}}.$$

因此 $(4, 1)$ 处的导数为 $y'_x|_{(4,1)}=\frac{4}{3}$.

334. 求证由方程 $xy-\ln y=1$ 确定的隐函数 $(xy\neq 1)$, 满足 $y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0$.

[证] 方程两边对 x 求导

$$y+xy'-\frac{y'}{y}=0, \quad y'\cdot\frac{1-xy}{y}=y, \quad 即 \quad y'=\frac{y^2}{1-xy}$$

代入 $y^2+(xy-1)\cdot y'_x$, 得

$$y^2+(xy-1)\cdot y'_x=y^2+(xy-1)\cdot\frac{y^2}{1-xy}=0.$$

故方程确定的隐函数满足 $\quad y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0$.

§2. 导数的物理意义和几何意义

(1) 导数的物理意义

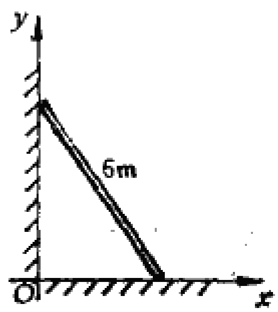
335. 已知抛物线 $y=x^2$，一动点 P 自原点沿 x 轴正方向向右移动，过 P 作 x 轴垂线交抛物线于 M 点，过 M 作 y 轴垂线交 y 轴于 Q 点，当 P 按 $OP=2t$（t 为时间）规律运动时，求 Q 点的运动速度大小.

［解］ Q 点的运动速度为 $\frac{dy}{dt}$，由 $x=2t$，$y=x^2$. 故按复合函数求导法则有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=2x\cdot 2=4x=8t.$$

∴ Q 点的运动速度大小为 $8t$.

336. 有一长度为 5 m 的梯子，紧靠在铅直的墙上，它的下端沿着地面以 3 m/s 的速度离开墙脚滑动，若 $t=0$ 时，梯子贴着墙壁（如图）：



(1) 求梯子上端在距地面 4 m 时的下滑速度；

(2) 何时梯子两端的滑动速度大小相同；

(3) 何时梯子上端的下滑速度的大小为 4 m/s.

［解］ (1) 设梯子的上、下端在时刻 t 与墙脚的距离分别为 $y(t)$、$x(t)$，梯子的长为 5 m，因此有

$$[x(t)]^2+[y(t)]^2=25.$$

等式两边求关于 t 的导数：$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$，$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$.

当上端距地面 4 m 时，下端距墙脚 3 m，且下端作 3 m/s 的匀速滑动：

$y=4$，$x=3$，$\frac{dx}{dt}=3$，

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{4}\cdot 3=-\frac{9}{4}\,(\text{m/s}).$$

梯子上端的下滑速度为 $-\frac{9}{4}$ m/s.

(2) 若梯子两端滑动速度的大小相等,

$$\because \quad \left|\frac{dy}{dt}\right|=3\text{ m/s}, \quad \therefore \quad 3=\left|-\frac{x}{y}3\right|,$$

得 $|x|=|y|$. 由 $x^2+y^2=25$, 解得 $x=\frac{5}{2}\sqrt{2}$(m).

梯子下端作匀速滑动, 速度、时间、路程满足

$$v_x\cdot t=x, \quad \frac{dx}{dt}\cdot t=x, \quad t=\frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{3}=\frac{5}{6}\sqrt{2}\text{(s)}.$$

当梯子下端离墙脚 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ m, 即经过 $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ s时, 梯子上下两端的运动速度大小相等.

(3) 由 $\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$, $-4=-\frac{x}{y}\cdot 3$, $4y-3x=0$.

解
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4y-3x=0 \end{cases}$$

得 $x=4$(m). 由 $\frac{dx}{dt}\cdot t=x$, 解得 $t=\frac{4}{3}$(s).

当第 $\frac{4}{3}$ s 时, 梯子上端的滑动速度大小为 4 m/s.

337. 一船受绳牵引靠岸, 绞盘位于比水面高 4 m 的岸边, 绳索的卷绕速度为 2 m/s. 问船距岸 8 米时靠岸的速度?

[解] 设船与岸的距离为 x, 绳长为 s. $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$. 由 $s^2=4^2+x^2$ 两边求关于 s 的导数, 得 $\frac{dx}{ds}=\frac{s}{x}$.

已知 $\frac{ds}{dt}=2$ m/s, $\therefore$ $\frac{dx}{dt}=2\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{2s}{x}$.

当 $x=8$, $s=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ m.

$$\therefore \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=8}=\frac{2\times 4\sqrt{5}}{8}=\sqrt{5}\text{ (m/s)}.$$

当距岸 8 m 处船靠岸的速度为 $\sqrt{5}$ m/s.

338. 以每秒钟 4 cm^3 的速度向轴截面为等边三角形的锥形

漏斗内注水.求当水深为 5cm 时，水面的上升速度.

［分析］ 水面高度 h 是时间 t 的函数：$h=h(t)$，漏斗内水的体积也是时间 t 的函数：$v=v(t)$. 已知漏斗内水的体积变化速度为 $4\,cm^3/s$，即 $\frac{dv}{dt}=4\,cm^3/s$，求水面上升速度 $\frac{dh}{dt}$.

［解］ 漏斗内水的体积与高度之间的关系为：$v=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

$$\because\quad r=\frac{\sqrt{3}}{3}h,\quad\therefore\quad v=\frac{1}{9}\pi h^3,\ h^3=\frac{9v}{\pi}.$$

两边求关于 t 的导数：

$$3h^2\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{9}{\pi}\cdot\frac{dv}{dt},\quad 得：\quad \frac{dh}{dt}=\frac{3}{\pi h^2}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

已知 $$\frac{dv}{dt}=4,\quad\therefore\quad\frac{dh}{dt}=\frac{12}{\pi h^2}.$$

当水深为 5cm 时，水面的上升速度 $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{12}{25\pi}$ cm/s.

339. 截面为倒置的等边三角形的水槽，水槽长 20m. 若以每秒 $3\,m^3$ 的速度向水槽注水，求水面高为 4m 时，水面的上升速度.

［分析］ 水面的高度与时间的关系为 $h=h(t)$，水面上升速度是 h 关于时间 t 的导数 $\frac{dh}{dt}$.

［解］ 由条件以每秒 $3\,m^3$ 速度向水槽注水，即水槽内水的体积关于时间的导数 $\frac{dv}{dt}=3(m^3/s)$. 设截面面积为 s，水槽内水的高度为 h. 由条件 $v=s\cdot l$，$\because v=\frac{20\sqrt{3}}{3}h^2$. 两边求关于 t 的导数：$\frac{dv}{dt}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\cdot h\cdot\frac{dh}{dt}$，

$\therefore\ \frac{dh}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{40h}\cdot\frac{dv}{dt}$.

当 $h=4$ m 时，

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=\frac{\sqrt{3}}{40\cdot 4}\cdot 3=\frac{3\sqrt{3}}{160}(m/s).$$

得水面高为 4m，水面上升的速度为 $\frac{3\sqrt{3}}{160}$ m/s.

340．一人过桥的速度为 4 km/h，同时一船在垂直于桥的河道上以 8 km/h 的速度在桥底下划过，此桥高 20 m，问：3 min 时人与船离去的速度．

［解］ 人与船之间距离，与时间有关．设为 $s(t)$．

$$\therefore\quad s(t)=\sqrt{20^2+\left(\frac{200}{3}t\right)^2+\left(\frac{400}{3}t\right)^2}=\sqrt{400+\frac{200000}{9}t^2}.$$

$$\therefore\quad s'(t)=\frac{\frac{200000}{9}t}{\sqrt{400+\frac{200000}{9}t^2}}.$$

则 $t=3$ min 时速度大小为 $s'(3)=\dfrac{200000}{3\sqrt{200400}}$ (m/min) ≈ 148.92(m/min)．

故当 3 min 时，人与船离去的速度为 148.92 m/min．

341．已知斜抛物体运动的轨迹由参数方程

$$\begin{cases}x=v_0\cos\theta\cdot t\\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)$$

给出，v_0 为物体运动的初速度，θ 为初始时物体运动方向与地面夹角．求：物体在时刻 t 的运动速率与方向．

［分析］ 物体水平方向的分速度为 x'_t，物体垂直方向的分速度为 y'_t，所以物体在时刻 t 的速度大小（速率）为 $v=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$．

物体的运动方向，即物体在时刻 t 速度的方向与地面夹角的正切即是 $\dfrac{dy}{dx}$，只要按参数方程求导，即可得到物体的运动方向．

［解］ (i) $x'(t)=v_0\cos\theta,\ y'(t)=v_0\sin\theta-gt\quad\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}\right)$.

$\therefore$ 物体在时刻 t 运动的速率为

$$v=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{v_0^2\cos^2\theta+v_0^2\sin^2\theta-2v_0gt\sin\theta+g^2t^2}$$
$$=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta+g^2t^2}.$$

(ii) 物体在时刻 t 运动方向与地面夹角的正切值：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{v_0\sin\theta-gt}{v_0\cos\theta}.$$

即时刻 t 物体运动方向与地面夹角的正切值为 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{v_0\sin\theta-gt}{v_0\cos\theta}$.

342. 在直线上有一个动点，它到原点的距离和时间满足关系：

$$s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2.$$

问在何时动点的速度为零？

［解］　$v(t)=\dfrac{ds}{dt}=t^3-12t^2+32t=t(t-4)(t-8)$.

∴ 当 $t=0$, 4, 8 时，速度为零.

343. 一物体重 3 kg 作直线运动，距离与时间满足关系：$s=1+t+t^2$（时间单位为 s, 距离单位为 cm）. 当物体在 5 s 末时，它的动能为多少？

［解］　动能 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$　而　$v(t)=\dfrac{ds}{dt}=1+2t$, ∴ $v(5)=11$(cm/s).

则　$$E=\frac{1}{2}\times3\times0.11^2=1.815\times10^{-2}(\mathrm{J}).$$

344. 从 $t=0$ 时开始，通过一导体的电量 Q 由公式 $Q=2t^2+3t+1$ 给出. 求第 5 s 末的电流强度 I.

［解］　电流强度 I 是导体的电量关于时间的变化率.

$$I(t)=\frac{d\theta}{dt}=4t+3,\quad 得\quad I(5)=23(\mathrm{A}).$$

答：第 5 s 末时，电流强度为 23 A.

(2) 导数的几何意义

345. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$, $x_2=3$ 的两点，问：在抛物线上哪一点的切线与过这两点的割线平行？并求出切线方程.

[分析] 曲线 $y=f(x)$ 在位于其上的点 $P(x_0, y_0)$ 处切线的斜率是导数 $f'(x_0)$，因此求过曲线上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

[解] 割线的斜率：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{9-1}{3-1}=4.$

抛物线 $y=x^2$ 导数：$y'=2x$. 切线与割线斜率相等，$\therefore 2x=4$, $x=2$. 即 $(2, 4)$ 处的导数与割线斜率相等.

切线方程：$y-4=4(x-2)$.

346. 求曲线 $x^2(x+y)=a^2(x-y)$ 上一点 $(0, 0)$ 处的切线方程.

[解] 对方程两边求关于 x 的导数：$3x^2+2xy+x^2y'_x=a^2-a^2y'_x$. 将 $x=0$, $y=0$ 代入，得 $a^2-a^2y'_x|_{(0,0)}=0$，解得 $y'_x|_{(0,0)}=1$.

$\therefore$ $(0, 0)$ 处的切线斜率为 $y'|_{(0,0)}=1$.

得切线方程为 $y=x$.

347. 若 M_0 为 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 上任意一点，求曲线过 $M_0(x_0, y_0)$ 的切线和法线方程.

[解] 对 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 两边求关于 x 的导数：

$$2y\cdot y'_x=\frac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2},\quad \therefore\quad y'_x=\frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}.$$

曲线上任意一点 $M_0(x_0, y_0)$ 处切线斜率为 $\dfrac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}$.

因此，切线方程为

$$y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0)\quad (x\neq 2a),$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)\quad (x_0\neq 3a).$$

348. 求曲线 $6y=2x^3+9x^2-12x+2$ 的切点坐标，使过切点的切线与曲线 $y^2+ay=2ax$ 上原点处的切线平行.

[解] 原点在曲线 $y^2+ay=2ax$ 上，按隐函数求导法：

$$2y\cdot y'_x+a\cdot y'_x=2a,\quad y'_x=\frac{2a}{2y+a},$$

$\therefore y'_x|_{(0,0)}=2$. 曲线 $y^2+ay=2ax$ 在原点处切线斜率为 2.

将 $6y=2x^3+9x^2-12x+2$ 两边关于 x 求导:

$$6y'_x=6x^2+18x-12.$$

由切线斜率为 2, 得 $y'_x=x^2+3x-2=2$, $x^2+3x-4=0$, 解得 $x=1$, $x=-4$.

将 $x=1$ 代入曲线方程得

$$6y=2\cdot1+9\cdot1-12+2.\quad\therefore\quad y=\frac{1}{6}.$$

将 $x=-4$ 代入曲线方程得

$$6y=-128+144+48+2.\quad\therefore\quad y=11.$$

故满足条件的两条切线的切点坐标为: $\left(1,\ \frac{1}{6}\right)$、$(-4,\ 11)$.

349. 求过(2, 2)点曲线 $y=x^3-2x^2+4$ 的切线方程.

[解] $P(2,\ 2)$不满足 $y=x^3-2x^2+4$, $\therefore P$ 点不在曲线上.

设 $Q(x_0,\ y_0)$是曲线上任意一点, 过 Q 的切线方程为:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\quad 其中\quad f'(x_0)=3x_0^2-4x_0.$$

切线过(2, 2), $\therefore 2-(x_0^3-2x_0^2+4)=(3x_0^2-4x_0)(2-x_0)$ 整理得:

$$x_0^3-4x_0^2+4x_0-1=0,\quad (x_0-1)(x_0^2-3x_0+1)=0$$

$$\therefore\quad x_0=1,\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

切点为 $(1,\ 3)$、$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 6+\sqrt{5}\right)$、$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ 6-\sqrt{5}\right)$.

将切点坐标代入切线方程:

$$l_1:\ y-3=-(x-1).$$

$$l_2:\ y-(6+\sqrt{5})=\frac{9+5\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$l_3:\ y-(6-\sqrt{5})=\frac{9-5\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

350. 求曲线 $y=e^x$ 过原点的切线及过切点的法线.

[解] $y=e^x$, $y'=e^x$, 且原点不在曲线上. 设$(x_0,\ y_0)$为 $y=e^x$ 上任意

一点，该点的切线斜率为 e^{x_0}. ∴ 过曲线上任意一点 (x_0, y_0) 的切线方程为:

$$y-y_0=e^{x_0}\cdot(x-x_0).$$

又切线过原点，则 $0-y_0=e^{x_0}(0-x_0)$，$e^{x_0}=e^{x_0}\cdot x_0$，解得 $x_0=1$，$y_0=e$.

因此过 $(1, e)$ 的切线方程为: $y-e=e(x-1)$. 法线斜率为 $-e^{-1}$，∴ 法线方程为: $y-e=-e^{-1}\cdot(x-1)$.

351. 曲线 C 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=3-t\end{cases}$ 给出，求过(3,2)、(−3, 3.5)两点的切线方程.

［解］ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{-1}{4t}$.

(3, 2)在曲线 C 上，对应的参数 $t=1$，故(3, 2)处切线的斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,2)}=-\frac{1}{4}.$$

∴ 过(3, 2)的切线方程为 $y-2=-\dfrac{1}{4}(x-3)$.

(−3, 3.5)不满足参数方程(即该点不在曲线 C 上). 设 $P(x_0, y_0)$ 为曲线 C 上的点，且该点处的切线方程为 $y-(3-t_0)=-\dfrac{1}{4t_0}(x-1-2t_0^2)$，因为(−3, 3.5)在切线上，故 $3.5-3+t_0=-\dfrac{1}{4t_0}(-3-1-2t_0^2)$；$t_0^2+t_0-2=0$，解得 $t_0=1, -2$. ∴ 切点为(3, 2)、(9, 5).

∴ 过(−3, 3.5)的切线方程为:

$$y-2=-\frac{1}{4}(x-3) \quad 和 \quad y-5=\frac{1}{8}(x-9).$$

352. 求抛物线 $y^2=ax$ 和 $x^2=8ay$ 相交的角度.

［分析］ $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在交点 $P(x_0, y_0)$ 处的夹角 θ 是两曲线交点处切线的夹角. 由

$$|\operatorname{tg}\theta|=\frac{|f_2'(x_0)-f_1'(x_0)|}{|1+f_2'(x_0)f_1'(x_0)|}$$

得 θ 的值，$\theta\in[0, \pi)$.

［解］
$$\begin{cases}y^2=ax & \cdots ①\\ x^2=8ay & \cdots ②\end{cases}$$

得两条抛物线的交点为(0, 0)、(4a, 2a)。由①式得$y'_x=\frac{a}{2y}$，由②式得$y'_x=\frac{x}{4a}$。

由
$$|\operatorname{tg}\theta|=\frac{\left|\frac{x}{4a}-\frac{a}{2y}\right|}{1+\frac{x}{4a}\cdot\frac{a}{2y}}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

得：(4a, 2a)处，$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$，$\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$；(0, 0)处，由该点处两曲线导数分别为0与∞，故夹角为$\frac{\pi}{2}$。

∴ $y^2=ax$和$x^2=8ay$相交于(4a, 2a)，其相交角度为$\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$、$\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{5}$，相交于(0, 0)处的角度为$\frac{\pi}{2}$。

353. 求抛物线$x^2=4ay$与箕舌线$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$的夹角($a>0$)。

[解] $\begin{cases}x^2=4ay & \cdots① \\ y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2} & \cdots②\end{cases}$

由①$x^2+4a^2=4ay+4a^2$代入②，整理，得$y=\frac{8a^3}{4a(a+y)}$，解$y(a+y)=2a^2$，得$y_1=a$，$y_2=-2a$(舍去)。交点为$A(2a, a)$、$B(-2a, a)$。

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2},\quad y'_x=-\frac{16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}.$$

箕舌线在点A的切线斜率为$k_1=-\frac{1}{2}$，在点B的切线斜率为$k'_1=\frac{1}{2}$。

$$x^2=4ay,\quad 2x=4ay'_x,\quad y'_x=\frac{x}{2a}.$$

抛物线在点A的切线斜率为$k_2=1$，在点B的切线斜率为$k'_2=-1$。

在A处的夹角α：
$$|\operatorname{tg}\alpha|=\frac{|k_2-k_1|}{|1+k_2k_1|}=3.\quad\therefore\quad \alpha=\operatorname{arc\,tg}3,\quad \pi-\operatorname{arc\,tg}3.$$

在B处的夹角β：
$$|\operatorname{tg}\beta|=\frac{|k'_2-k'_1|}{|1+k'_2k'_1|}=3,\quad\therefore\quad \beta=\operatorname{arc\,tg}3,\quad \pi-\operatorname{arc\,tg}3.$$

抛物线与箕舌线的夹角为：$\operatorname{arc\,tg}3$，$\pi-\operatorname{arc\,tg}3$。

354. 已知两曲线 C_1: $y=x^2$, C_2: $y=-2(x-3)^2$. 求两曲线的公切线方程.

[分析] 设 C_1: $y=f(x)=x^2$ 的切点横坐标为 x_1, C_2: $y=g(x)=-2(x-3)^2$ 的切点横坐标为 x_2. 则公切线满足过 $(x_2, g(x_2))$、$(x_1, f(x_1))$ 两点; 且满足在 $(x_2, g(x_2))$ 与在 $(x_1, f(x_2))$ 处的切线斜率相等.

[解] 设: 公切线切 C_1 于 (x_1, x_1^2), 切 C_2 于 $(x_2, -2(x_2-3)^2)$.

$$C_1:\ y=x^2,\ y'=2x.$$

∴ (x_1, x_2^2) 处的切线斜率为 $y'|_{x=x_1}=2x_1$.

$$C_2:\ y=-2(x-3)^2,\ y'=-4(x-3).$$

∴ $(x_2, -2(x_2-3)^2)$ 处的切线斜率为 $y'|_{x=x_2}=-4(x_2-3)$.

在 $(x_2, -2(x_2-3)^2)$ 的切线为:

$$y+2(x_2-3)^2=-4(x_2-3)(x-x_2) \qquad \cdots①$$

由于 C_2 在 $(x_2, -2(x_2-3)^2)$ 的切线过 (x_1, x_1^2), 故 (x_1, x_1^2) 满足①式, 有

$$x_1^2+2(x_2-3)^2=-4(x_2-3)(x_1-x_2) \qquad \cdots②$$

又 C_2 在 $(x_2, -2(x_2-3)^2)$ 的切线斜率等于 $2x_1$,

$$\therefore\quad -4(x_2-3)=2x_1 \qquad \cdots③$$

解 ③ 得 $x_1=-2x_2+6$ 代入 ② 式, 得:

$$4(x_2-3)^2+2(x_2-3)^2=-4(x_2-3)(-2x_2+6-x_2),$$

$$6(x_2-3)^2=-12(x_2-3)(2-x_2).$$

解得 $x_2=3$, $x_2=1$. ∴ c_2 处的切点为 $(3, 0)$、$(1, -8)$. 由曲线 c_2, $y=-2(x-3)^2$, $y'=-4(x-3)$.

∴ 切点 $(3, 0)$ 处斜率为 $y'|_{x_2=3}=0$; 切点 $(1, -8)$ 处斜率为 $y'|_{x_2=1}=8$.

于是, 由 ① 得公切线方程为 $y=0$, $y=8x-16$.

355. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 具有如下性质: (1) $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导; (2) $f(0)=g(0)=0$; (3) 在原点处, 两曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的切线互相垂直; (4) 有实数 a, b, c, d 使

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{ax+bf(x)}{cx+df(x)} \quad 和 \quad g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{ax+bg(x)}{cx+dg(x)}$$

同时成立, 则 $a=d$.

[解] ∵ $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

由条件(4)得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{ax+bf(x)}{cx+df(x)}=\lim_{x\to0}\frac{a+b\frac{f(x)}{x}}{c+d\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{a+b\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{c+d\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}=\frac{a+bf'(0)}{c+df'(0)},$$

即　$$d[f'(0)]^2+cf'(0)=a+bf'(0)$$

或　$$d[f'(0)]^2+(c-b)f'(0)-a=0 \qquad \cdots①$$

同理，$g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}$，$g'(0)=\frac{a+bg'(0)}{c+dg'(0)}$，

$$\therefore\ d[g'(0)]^2+(c-b)g'(0)-a=0.$$

由 $f'(0)$，$g'(0)$ 存在，且两曲线的切线互相垂直，$\therefore g'(0)=-\frac{1}{f'(0)}$.

$\therefore\ \frac{d}{[f'(0)]^2}-\frac{c-b}{f'(0)}-a=0$，　$d-(c-b)f'(0)-a[f'(0)]^2=0$　$\cdots②$

①+②得　$(d-a)[f'(0)]^2+(d-a)=0$，　$\therefore\ a=d$.

356. 已知函数 $f(x)=2x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图象都过点 $P(2,\ 0)$，且在点 P 处有公切线．求：a、b、c 及 $f(x)$、$g(x)$ 的解析式．

［分析］　若 $f(x)$、$g(x)$ 都过点 $(p,\ q)$，且在该点有公切线，则有 $f(p)=g(p)=q$，且 $f'(p)=g'(p)$，由此建立等量关系．

［解］　由 $f(x)$ 过点 $P(2,\ 0)$，得 $f(2)=2\cdot2^3+a\cdot2=0$．$\therefore a=-8$．因此，$f(x)=2x^3-8x$，$f'(x)=6x^2-8$，$f'(2)=16$．又由 $g(x)$ 也过点 $P(2,0)$，得 $g(2)=b\cdot4+c=0$．$\therefore c=-4b$．$g(x)=bx^2+c$，　$g'(x)=2bx$．由于 $f(x)$、$g(x)$ 在 $P(2,\ 0)$ 有公切线，$\therefore g'(2)=2\cdot b\cdot2=16$，得 $b=4$，$c=-16$.

$$\therefore\ f(x)=2x^3-8x,\quad g(x)=4x^2-16.$$

357. 由原点 O 引 $f(x)=x^3-3ax^2+bx(a\neq0)$ 的切线，切该三次曲线于 O 以外的点 $P_1(x_1,y_1)$，再由 P_1 引此曲线的切线，切曲

线于 P_1 外的点 $P_2(x_2, y_2)$，如此继续作下去，得到点列$\{P_n(x_n, y_n)\}$. 当 $n\to\infty$，求 P_n 的极限位置 P 的坐标.

[解]　$y=x^3-3ax^2+bx$,　$y'=3x^2-6ax+b$.

过曲线上 $P_1(x_1, y_1)$的切线方程为:

$$y-(x_1^3-3ax_1^2+bx_1)=(3x_1^2-6ax_1+b)\cdot(x-x_1)$$

由于$P_1(x_1, y_1)\neq O(0, 0)$，且切线过原点，因此原点坐标满足上述方程:

$$-x_1^3+3ax_1^2-bx_1=(3x_1^2-6ax_1+b)\cdot(-x_1),$$

$$2x_1^3-3ax_1^2=0,\quad x_1\neq0,\quad\therefore\quad x_1=1.5a.$$

$\therefore\quad P_1(1.5a,\ -3.375a^3+1.5ab)$.

又过曲线上 $P_n(x_n, y_n)$的切线 l_n 为:

$$y-(x_n^3-3ax_n^2+bx_n)=(3x_n^2-6ax_n+b)\cdot(x-x_n).$$

l_n 过 $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$，故

$$x_{n-1}^3-3ax_{n-1}^2+bx_{n-1}-(x_n^3-3ax_n^2+bx_n)$$
$$=(3x_n^2-6ax_n+b)\cdot(x_{n-1}-x_n).$$

$\because x_n\neq x_{n-1}$，则两边消去 x_n-x_{n-1}，整理上式，得:

$$x_{n-1}^2+x_{n-1}x_n+x_n^2-3a(x_{n-1}+x_n)+b=3x_n^2-6ax_n+b,$$
$$x_{n-1}^2+x_{n-1}x_n-2x_n^2-3a(x_{n-1}-x_n)=0,$$
$$(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}+2x_n)-3a(x_{n-1}-x_n)=0,$$

解得 $x_{n-1}+2x_n-3a=0$,　$x_{n-1}+2x_n=3a$.　即 $x_n-a=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-a)$,

令 $x_n-a=u_n$.　$u_1=0.5a$, $u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1}$.　$\{u_n\}$ 是首项为 $0.5a$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$u_n=0.5a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$x_n=0.5a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+a.\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[0.5a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+a\right]=a.$$

$\therefore\{P_n\}$ 极限位置的横坐标 a. $\therefore P(a,\ ab-2a^3)$.

358. 设 $f(x)=x^2-2$，又设曲线 $y=f(x)$在点 $(x_n, f(x_n))$ 的切线与 x 轴的交点为$(x_{n+1}, 0)$，其中 $x_1=2$.

(1)　求曲线 $y=f(x)$ 上$(2, f(2))$点处的切线方程;

(2)　用 x_n 表示 x_{n+1}　$(n=1, 2, \cdots)$;

(3) 证明：$0<x_n-\sqrt{2}<1 \quad (n=1, 2, \cdots)$；

(4) 证明：$x_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x_n-\sqrt{2}) \quad (n=1, 2, \cdots)$；

(5) 求：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

［解］ (1) $f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$. $(2, f(2))$在曲线上，故切线的斜率为$f'(2)=4$.

∴ 切线方程：$y-2=4(x-2)$.

(2) 过曲线上的点$(x_n, f(x_n))$的切线方程为：

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n),$$

即

$$y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n).$$

切线与x轴交点为$(x_{n+1}, 0)$，令$y=0$，解切线方程，得

$$-(x_n^2-2)=2x_n(x_{n+1}-x_n), \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{x_n}.$$

(3) $$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2+2}{x_n}\right)=\frac{(x_n+\sqrt{2})^2}{2x_n}-\sqrt{2},$$

$$x_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{(x_n+\sqrt{2})^2}{2x_n} \qquad \cdots①$$

同理可得

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n} \qquad \cdots②$$

①、② 相除得

$$\frac{x_{n+1}+\sqrt{2}}{x_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{(x_n+\sqrt{2})^2}{(x_n-\sqrt{2})^2}.$$

由递推关系得

$$\frac{x_n+\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}=\left(\frac{x_1+\sqrt{2}}{x_1-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}.$$

$$\because \quad x_1=2 \quad \therefore \quad \frac{x_n+\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}},$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}=\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2}\right)^{2^{n-1}}-1=(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1.$$

$$\therefore \quad 0<x_n-\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}<1,$$

得 $$0<x_n-\sqrt{2}<1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

(4) 由(3)得

$$\frac{2\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1,\quad \frac{2\sqrt{2}}{x_{n+1}-\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})^{2^n}-1,$$

相除得

$$\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{(3+2\sqrt{2})^{2^n}-1}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}=\frac{(3+2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}$$

$$=(17+12\sqrt{2})\frac{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}$$

$$+\frac{16+12\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{x_n-\sqrt{2}}{x_{n+1}-\sqrt{2}}=(17+12\sqrt{2})+\frac{16+12\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}>2\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad x_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n-\sqrt{2}).$$

(5) 由 $$\frac{2\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1,$$

$$x_n-\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1},$$

$$x_n=\frac{2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^{2^{n-1}}-1}+\sqrt{2}.\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

359. 若 $f(x)$ 是一个 n 次多项式 $(n\geqslant 2)$，则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(\alpha,0)$ 的充要条件是 f 具有形式

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x).$$

［证］ 充分性. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式 $(n\geqslant 2)$，具有 $f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$ 的形式，故 $Q(x)$ 是 $n-2$ 次多项式，且 f 和 Q 都有任意阶连续导数，$f'(x)=2(x-\alpha)\cdot Q(x)+(x-\alpha)^2\cdot Q'(x)$，可见 $f'(\alpha)=0$. 又有 $f(\alpha)=0$，

即 曲线 $y=f(x)$ 过 $(\alpha,0)$ 点，且在 $(\alpha,0)$ 处切线斜率为 0，即以 x 轴为切线.

必要性. 若 $f(x)$ 是一个 n 次多项式 $(n\geqslant 2)$，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于 $(\alpha,0)$ 点时，下面证明 $f(x)=(x-\alpha)^2\cdot Q(x)$.

设 $f(x)=(x-\alpha)^2\cdot Q(x)+Ax+B$，则

$$f'(x)=2(x-\alpha)\cdot Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+A$$

如果 $f(x)$ 切 x 轴于 $(\alpha,\ 0)$ 点，有 $f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)=0$，即可确定 $A=B=0$。因此 $f(x)=(x-\alpha)^2\cdot Q(x)$。

360．由四次函数确定的曲线与平行于 x 轴的一条直线交于不同的两点，求证该曲线必有对称轴．

［解］ 由上题可得，若四次函数 $y=f(x)$ 与平行于 x 轴的直线 $y=c$ 相交于 $(\alpha,\ c)$，$(\beta,\ c)$ 两点，则四次函数必有 $f(x)=k(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2+c$ 的形式，其中 c 是常数．如果四次函数图象有对称轴，则两交点为对称点，则对称轴必须垂直于两交点所在直线 $y=c$，∴ 对称轴为 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$．

∴ 只须证明 $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+x\right)$ 与 $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-x\right)$ 相等．

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)=k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x-\alpha\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x-\beta\right)^2+c$$

$$=k\left(x-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+c,$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)=k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x-\alpha\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x-\beta\right)^2+c$$

$$=k\left(x+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+c.$$

得

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right).$$

∴ 四次函数图象关于直线 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 轴对称．

361．设曲线 $y=x^3+px+q$ 与 x 轴相切．求证：p、q 满足

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

［解一］ 由 $y=x^3+px+q$ 与 x 轴相切，所以切点的横坐标必须同时满足：

$$\begin{cases}x^3+px+q=0 & \cdots① \\ 3x^2+p=0 & \cdots②\end{cases}$$

将 ① 变形得 $x(x^2+p)=-q$，两端平方，则

$$x^2\cdot(x^2+p)^2=q^2 \qquad \cdots③$$

将 ② $x^2=-\frac{p}{3}$ 代入得:

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,\quad \therefore\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

［解二］ 若三次项系数为 1 的三次函数与 x 轴相切，必有

$$f(x)=(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta),$$

$$\therefore\quad f(x)=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta.$$

比较两端系数，得 $2\alpha+\beta=0$, $\alpha^2+2\alpha\beta=p$, $\alpha^2\beta=-q$, 解得 $p=-3\alpha^2$, $q=2\alpha^3$.

$$\therefore\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=-\alpha^6+\alpha^6=0.$$

362．当参数 a 为何值时，曲线 $y_1=ax^2$ 与 $y_2=\ln x$ 相切.

［分析］ 若两函数皆可微，则所对应的两曲线相切的条件是: (1) 两曲线有交点，(2) 交点处的导数相等.

［解］ (1) $\begin{cases} y_1=ax^2, \\ y_2=\ln x. \end{cases}$ $ax^2=\ln x,\quad a=\frac{\ln x}{x^2}$ $\qquad\cdots①$

即在两曲线交点处，参数 a 与横坐标 x 必满足 ① 式.

(2) $y_1'=(ax^2)'=2ax$, $y_2'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$　如果两曲线相切，必须在它们的交点处的切线斜率相等，所以有

$$2ax=\frac{1}{x}\quad a=\frac{1}{2x^2} \qquad\cdots②$$

同时满足 ①、② 两式，两曲线才相切。

$$\therefore\quad \frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{2x^2},\quad \ln x=\frac{1}{2},\quad x=e^{\frac{1}{2}}.$$

即两曲线切点的横坐标为 $x=e^{\frac{1}{2}}$. 代入 ① 式得

$$a=\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{(e^{\frac{1}{2}})^2}=\frac{1}{2e}.$$

$\therefore$ 当 $a=0.5e^{-1}$ 时，$y_1=ax^2$ 与 $y_2=\ln x$ 相切.

363．求 $y=a^x$ 与 OY 轴的夹角(夹角取锐角).

［分析］ 与 OY 轴的夹角是曲线与直线 $x=0$ 的夹角.

［解］ $y=a^x$，$y'=a^x\ln a$. 在(0, 1)处的导数为 $y'|_{x=0}=\ln a$. 所以当 $a>1$ 时，OY 轴和 $y=a^x$ 切线的夹角为

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\ln a).$$

当 $0<a<1$ 时，OY 轴和 $y=a^x$ 切线的夹角为

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(\ln a).$$

364. 求 a 的值，使抛物线 $y=ax^2$ 和双曲线 $xy=1$ 在第Ⅰ象限的交角为：(1) $\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{\pi}{3}$.

［解］ $y=ax^2$ 和 $xy=1$ 在第Ⅰ象限有交点须 $a>0$，联立求解 $y=ax^2$ 和 $xy=1$，得交点坐标 $x_0=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$，$y_0=\sqrt[3]{a}$.

$(ax^2)'=2ax$，∴ 交点处抛物线的切线斜率为 $k_1=2\sqrt[3]{a^2}$. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

∴ 交点处双曲线切线的斜率为 $k_2=-\sqrt[3]{a^2}$

抛物线与双曲线的交角 θ:

$$|\operatorname{tg}\theta|=\frac{|k_2-k_1|}{|1+k_1k_2|}=\left|\frac{-\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a^2}}{1-2a\sqrt[3]{a}}\right|=\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{|2a\sqrt[3]{a}-1|}$$

(1) 若交角为 $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt[3]{a}-1}=\pm1,\quad 3\sqrt[3]{a^2}=\pm(2a\sqrt[3]{a}-1).$$

令 $\sqrt[3]{a^2}=k$，$2k^2\pm3k-1=0$. 得 $k_1=\frac{\pm3+\sqrt{17}}{4}$，$k_2=\frac{\pm3-\sqrt{17}}{4}$. ∵ $k_2<0$(舍去).

由 $\sqrt[3]{a^2}=k$，得 $a=\sqrt{\left(\frac{\pm3+\sqrt{17}}{4}\right)^3}$.

(2) 若交角为 $\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt[3]{a}-1}=\pm\sqrt{3},\quad 3\sqrt[3]{a^2}=\pm(2\sqrt{3}\,a\sqrt[3]{a}-\sqrt{3}).$$

令　　$\sqrt[3]{a^2}=k'>0$，$2\sqrt{3}\,k'^2\pm3k'-\sqrt{3}=0$

得　　$k_1'=\frac{\pm\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$，$k_2'=\frac{\pm\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}$(舍去).

$$a=\sqrt{\left(\frac{\pm\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}\right)^3}.$$

$\therefore$ a 取 $\sqrt{\left(\frac{\pm3+\sqrt{17}}{4}\right)^3}$ 时，两曲线交成 $\frac{\pi}{4}$ 角；a 取 $\sqrt{\left(\frac{\pm\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}\right)^3}$ 时，两曲线交成 $\frac{\pi}{3}$ 角

365 证明：抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ $(a>0)$ 的切线在坐标轴上的截距之和为 a

［证］ 将 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}$ 两边对 x 求导.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'_x=0,\quad \therefore\quad y'_x=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$\therefore$ 在抛物线上的点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切线是

$$y-y_0=-\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在 x 轴上截距为

$$l_x=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}=x_0+\sqrt{x_0y_0}$$

在 y 轴上截距为

$$l_y=y_0-x_0\cdot f'(x_0)=y_0+\sqrt{x_0y_0}.$$

$\therefore$ 截距之和为

$$l_x+l_y=x_0+y_0+2\sqrt{x_0y_0}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=a.$$

366. 证明星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 夹在两坐标轴间的切线长为定值 $a(a>0)$.

［证］ 将星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 关于 x 求导：

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'_x=0,\quad y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

过星形线上点 $(x_0,\ y_0)$ 的切线为：

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0).$$

切线在 x 轴上的截距

$$l_x=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}=x_0+y_0\frac{\sqrt[3]{x_0}}{\sqrt[3]{y_0}}=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2};$$

切线在 y 轴上的截距

$$l_y=y_0-x_0\cdot f(x_0')=y_0+x_0\cdot\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt[3]{x_0}}=y_0+\sqrt[3]{y_0x_0^2}.$$

夹在两坐标轴间的切线长 d:

$$\begin{aligned}d^2&=(x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2})^2+(y_0+\sqrt[3]{y_0x_0^2})^2\\&=x_0^2+2\sqrt[3]{x_0y_0^2}\cdot x_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0^4}+y_0^2+2\sqrt[3]{y_0x_0^2}\cdot y_0+\sqrt[3]{y_0^2x_0^4}\\&=(x_0^{\frac{2}{3}})^3+3(x_0^{\frac{4}{3}}\cdot y_0^{\frac{2}{3}})+3(x_0^{\frac{2}{3}}\cdot y_0^{\frac{4}{3}})+(y_0^{\frac{2}{3}})^3\\&=(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3=(a^{\frac{2}{3}})^3=a^2.\end{aligned}$$

$\therefore d=a$. 即夹在两坐标轴间的切线长为 a.

367. 曳物线 $y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$. 曳物线上的切点为 A，切线与 y 轴交点为 B，求证线段 AB 为定长.

［证］

$$\begin{aligned}y'&=\left\{\frac{a}{2}[\ln(a+\sqrt{a^2-x^2})-\ln(a-\sqrt{a^2-x^2})]-\sqrt{a^2-x^2}\right\}'\\&=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\\&=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.\end{aligned}$$

设 $A(x_0, y_0)$ 为曳物线上任意一点，则切线方程为:

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}}{x_0}(x-x_0).$$

求切线与 y 轴交点：令 $x=0$，得

$$y=y_0+\sqrt{a^2-x_0^2},$$

$\therefore$ 切线和 y 轴交点是 $B(0, y_0+\sqrt{a^2-x_0^2})$. 设 AB 间的距离为 d，则:

$$d^2=(x_0-0)^2+(y_0-y_0-\sqrt{a^2-x_0^2})^2=x_0^2+(a^2-x_0^2)=a^2.$$

$\therefore d=a$ 是常数.

368. 已知曲线方程是 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ 求证原点到曲线上所有点的法线距离相等.

［证］ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\operatorname{tg} t.$

设 $P(x_0, y_0)$ 为曲线上任意一点，其对应的参数为 t_0，则 (x_0, y_0) 处切线斜率为 $\operatorname{tg} t_0$，过 P 的法线为:

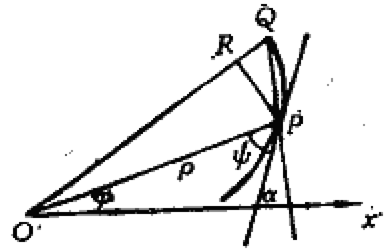
$$y-a(\sin t_0-t_0\cos t_0)=-\frac{1}{\operatorname{tg} t_0}\cdot[x-a(\cos t_0+t_0\sin t_0)].$$

即
$$y+\operatorname{ctg} t_0\cdot x=a(\sin t_0-t_0\cos t_0)+a\left(\frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0}+t_0\cos t_0\right).$$

$$y+\operatorname{ctg} t_0\cdot x=a\cdot\csc t_0,\quad \therefore\quad \cos t_0\cdot x+\sin t_0\cdot y-a=0.$$

由直线的法线式方程的意义可知，原点到法线的距离 $d=a$，由 $P(x_0, y_0)$ 的任意性，所以原点到曲线上任意点的法线的距离相等.

369. 证明对数螺线 $\rho=ae^{k\varphi}$（k, a 是常数）的切线与切点的向径之间的夹角为常数. 且求 $P\left(ae^{k\frac{\pi}{4}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 点处的切线方程.



［分析］ 由极坐标方程的求导法则，可以求得 (ρ, φ) 点处切线的斜率，问题可归结为切线与直线 $\theta=\varphi$ 的夹角的求法.

设极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)$ 给出的曲线切线与向径的夹角为 ψ。在曲线上 $P(\rho, \varphi)$ 的邻近取一点 $Q(\rho+\Delta\rho, \varphi+\Delta\varphi)$，作割线 PQ，作 $PR\perp OQ$, $OQ=\rho+\Delta\rho$, $\angle POQ=\Delta\varphi$.

如图所示，令 Q 沿曲线趋于 P，则

$$\operatorname{tg}\psi=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\operatorname{tg}\angle PQR=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{PR}{RQ}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\rho\sin\Delta\varphi}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\varphi}$$

$$=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\rho\sin\Delta\varphi}{\rho(1-\cos\Delta\varphi)+\Delta\rho}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\rho\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\dfrac{2\rho\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\varphi}}=\frac{\rho}{\rho'_\varphi}.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'_\varphi}.$$

由 $\alpha=\varphi+\psi$ 又可求得曲线上 $P(\rho, \varphi)$ 处切线斜率 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}$.

当曲线由极坐标方程给出时，本结论对求曲线上 P 点的切线与向径 OP 的夹角，是比较方便的.

［解一］ P 为对数螺线 $\rho=ae^{k\varphi}$ 上任意一点. 求 $P(\rho, \varphi)$ 处的 $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi=ae^{k\varphi}\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi=ae^{k\varphi}\sin\varphi. \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x'_\varphi=ae^{k\varphi}[k\cos\varphi-\sin\varphi], \\ y'_\varphi=ae^{k\varphi}[k\sin\varphi+\cos\varphi]. \end{cases}$$

因此
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{k\sin\varphi+\cos\varphi}{k\cos\varphi-\sin\varphi}$$

切线斜率为 $\dfrac{dy}{dx}$, 向径斜率为 $\operatorname{tg}\varphi$, 于是夹角 ψ 的正切为

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\dfrac{dy}{dx}-\operatorname{tg}\varphi}{1+\dfrac{dy}{dx}\cdot\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\dfrac{k\sin\varphi+\cos\varphi}{k\cos\varphi-\sin\varphi}-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1+\dfrac{\sin\varphi(k\sin\varphi+\cos\varphi)}{\cos\varphi(k\cos\varphi-\sin\varphi)}}$$

$$=\frac{\dfrac{k\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi-k\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi}{\cos\varphi(k\cos\varphi-\sin\varphi)}}{\dfrac{k\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi+k\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi(k\cos\varphi-\sin\varphi)}}=\frac{1}{k}.$$

即 P 点切线与向径之间的夹角为常数.

对 $P\left(ae^{k\frac{\pi}{4}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, 代入 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k\sin\varphi+\cos\varphi}{k\cos\varphi-\sin\varphi}$ 得切线斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k+1}{k-1}$.

∴ 直角坐标系下的切线方程为:

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{k\frac{\pi}{4}}=\frac{k+1}{k-1}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{k\frac{\pi}{4}}\right).$$

［解二］ 设 ψ 为 $P\left(ae^{k\frac{\pi}{4}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 点切线与向径之间的夹角.

由公式
$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'_\varphi}, \quad \therefore \quad \operatorname{tg}\psi=\frac{ae^{k\varphi}}{(ae^{k\varphi})'_\varphi}=\frac{1}{k}.$$

即对数螺线上任意一点切线与向径之间夹角为常数. 过 P 的切线斜率

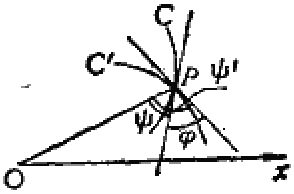
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}=\frac{k+1}{k-1}.$$

∴ 直角坐标系下的切线方程为:

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{k\frac{\pi}{4}}=\frac{k+1}{k-1}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}ae^{k\frac{\pi}{4}}\right).$$

370. 求下列曲线 $\rho=a\sin 2\theta$, $\rho=a\cos 2\theta$ 的交角.

[分析] C, C' 是由极坐标方程给出的曲线，ψ, ψ' 为切线与向径的夹角，若交点处切线夹角为 φ，则有 $\varphi=\psi'-\psi$.



$$\therefore\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\psi'-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi'\operatorname{tg}\psi}.$$

[解] 由 $\begin{cases}\rho=a\sin 2\theta,\\ \rho=a\cos 2\theta.\end{cases}$ 解得 $\operatorname{tg}2\theta=1$, $\theta=\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$.

交点的极坐标为 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\pi}{8}\right)$, $P'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{5\pi}{8}\right)$.

对 $\rho=a\sin 2\theta$，有

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'_\theta}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\theta.\quad \because\quad \theta=\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}.$$

$\therefore$ P、P' 两交点处切线与向径夹角分别为 $\operatorname{tg}\psi|_P=\operatorname{tg}\psi|_{P'}=\frac{1}{2}$.

对 $\rho=a\cos 2\theta$, $\operatorname{tg}\psi'=\frac{\rho}{\rho'_\theta}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\theta$. $\because$ $\theta=\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$.

$\therefore$ P, P' 两交点处切线与向径夹角分别为

$$\operatorname{tg}\psi'|_P=\operatorname{tg}\psi'|_{P'}=-\frac{1}{2}.$$

两曲线的夹角 φ 的正切为：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.\qquad \therefore\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}.$$

371. 证明阿基米德螺线 $\rho=a\theta$ 与双曲螺线 $\rho=\frac{a}{\theta}$ 在交点处垂直.

[证] 由 $\begin{cases}\rho=a\theta,\\ \rho=\frac{a}{\theta}.\end{cases}$

解得交点坐标为 $P(a, 1)$, $P'(-a, -1)$. 而 $\rho=a\theta$ 的切线与向径夹角正

切为 $\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'_\theta}=\theta$.

$\therefore P$ 点处 $\operatorname{tg}\psi|_P=1$, P' 点处 $\operatorname{tg}\psi|_{P'}=-1$.

$\rho=\frac{a}{\theta}$ 的切线与向径夹角正切为 $\operatorname{tg}\psi'=\frac{\rho}{\rho'_\theta}=-\theta$.

$\therefore P$ 点处 $\operatorname{tg}\psi'|_P=-1$, P' 点处 $\operatorname{tg}\psi'|_{P'}=1$.

由于 $\operatorname{tg}\psi\cdot\operatorname{tg}\psi'|_{P,P'}=-1$, $\therefore$ 交点处切线互相垂直

372. 求心脏线 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 上任意一点的向径与切线的夹角. 并求 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时的切线斜率.

［解］ $\rho=a(1-\cos\theta)$，不妨设$(0\leqslant\theta<2\pi)$. $\frac{d\rho}{d\theta}=a\sin\theta$.

$$\because\quad \operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\quad\therefore\quad\psi=\frac{\theta}{2}.$$

若切线的倾角为 α, 则 $\alpha=\theta+\psi=\theta+\frac{\theta}{2}$. 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时, $\operatorname{tg}\alpha=1$. $\therefore$ 当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时切线的斜率为 1.

373. 求抛物线 $y^2=2Px$ 的切线长, 法线长, 次切线长, 次法线长$(P>0)$.

［分析］ 曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0, y_0)$的切线方程和法线方程分别为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$和 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. 切线与 x 轴的交点为 T, T 的横坐标是 $T_x=x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}$. 法线与 x 轴的交点为 N, N 的横坐标为 $N_x=x_0+y_0\cdot f'(x_0)$. 次切线就是 MT 在 x 轴上的射影

$$\overline{MT_x}=T_x-M_x=-\frac{y_0}{f'(x_0)},$$

次切线的长是 $|\overline{MT_x}|=\left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|$. 次法线就是 MN 在 x 轴上的射影 $\overline{MN_x}=N_x-M_x=y_0\cdot f'(x_0)$，次法线的长是

$$|\overline{MN_x}|=|y_0\cdot f'(x_0)|.$$

规定: $|\overline{MT}|$为切线长,

$$|\overline{MT}|=\left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\cdot\sqrt{1+f'^2(x_0)}.$$

$|\overline{MN}|$为法线长，$|\overline{MN}|=|y_0\cdot\sqrt{1+f'^2(x_0)}|$.

［解］ 对抛物线 $y^2=2Px$ 两边对 x 求导数 $y\cdot y'=P$.

(1) 切线长:

$$\left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+f'^2(x_0)}=|2x_0|\sqrt{1+\frac{P}{2x_0}}=\sqrt{4x_0^2+y_0^2}.$$

(2) 法线长:

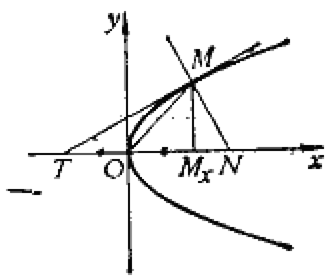
$$|y_0\sqrt{1+f'^2(x_0)}|=\sqrt{y_0^2+P^2}.$$

(3) 次切线长:

$$\left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|=\left|\frac{y_0^2}{y_0f'(x_0)}\right|=|2x_0|.$$

(4) 次法线长:

$$|y_0f'(x_0)|=P.$$



由上可见，抛物线 $y^2=2Px$ 的次法线的长是定长 P，次切线长为切点的横坐标 x 的绝对值的二倍. 这个性质可以用于作抛物线的切线或法线. 过 M 点的切线: 在 x 轴上取

$$|\overline{TM_x}|=2|OM_x|$$

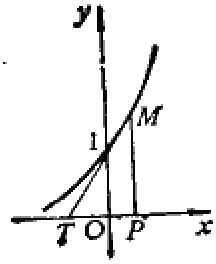
(注意方向)，得 T 点，连接 TM 即是切线.

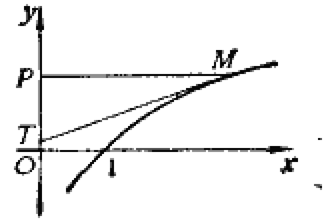
过 M 点的法线: 过 M 作平行于 y 轴的直线交 x 轴于 M_x，量得 $M_xN=P$，连接 NM 即是法线.

374. 求 $y=e^x$ 在其曲线上任意一点处的次切线长.

［解］ 次切线长: $|\overline{MT_x}|=|TP|=\left|\frac{y}{y'_x}\right|=1$.

［说明］ 一般作指数函数 $y=e^x$ 的切线，只要在 M 点作 x 轴垂线，得垂足为 P，取$|PT|=1$，连接 TM，即是切线. 同理，作 $y=\ln x$ 上任意一点的切线，由反函数性质，只要作 M 点在 y 轴上垂足 P，取$|TP|=1$，连接 TM，即是切线.





375. 求$\begin{cases}x=a\sin^3 t\\ y=a\cos^3 t\end{cases}$的切线长，法线长，次切线长和次法线长。

［解］ $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3a\cdot\cos^2 t\cdot\sin t}{3a\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}=-\operatorname{ctg} t.$

∴ 次法线长：

$$|y\cdot y'_x|=|a\cdot\cos^3 t\cdot\operatorname{ctg} t|.$$

次切线长：

$$\left|\frac{y}{y'_x}\right|=|a\cdot\cos^3 t\cdot\operatorname{tg} t|.$$

切线长：

$$\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1+y'^2_x}=|a\cdot\cos^3 t\cdot\operatorname{tg} t|\cdot|\csc t|=|a\cos^2 t|$$

法线长：

$$|y\sqrt{1+y'^2_x}|=|a\cos^2 t\cdot\operatorname{ctg} t|.$$

§3. 高阶导数

376. 已知：$f(x)=xe^{x^2}$. 求：$f''(x)$；$f'''(x)$.

［解］ $f'(x)=e^{x^2}+2x^2\cdot e^{x^2}$.

$$f''(x)=[f'(x)]'=2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}.$$

$$f'''(x)=[f''(x)]'=6e^{x^2}+12x^2e^{x^2}+12x^2e^{x^2}+8x^4e^{x^2},$$

$$f'''(x)=6e^{x^2}+24x^2e^{x^2}+8x^4e^{x^2}.$$

［说明］ 有时为了方便，亦可用如下解法：

$$f'(x)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=e^{x^2}+2xy.$$

$$f''(x)=[f'(x)]'=2xe^{x^2}+2y+2x\cdot y'.$$

将 $y=xe^{x^2}$，$y'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$ 代入，得 $f''(x)=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}$.

又 $f''(x)=6y+4x^2y$， ∴ $f'''(x)=6y'+8xy+4x^2y'$

得 $f'''(x)=6e^{x^2}+12x^2e^{x^2}+8x^2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}+8x^4e^{x^2}$.

$$f'''(x)=6e^{x^2}+24x^2e^{x^2}+8x^4e^{x^2}.$$

377. 已知：$f(x)=\arcsin(a\sin x)$. 求：$f''(x)$.

［解］ $f'(x)=\frac{a\cos x}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}$,

$$f''(x)=[f'(x)]'=\frac{-a\sin x\cdot\sqrt{1-a^2\sin^2x}+\dfrac{a^3\cos^2x\sin x}{\sqrt{1-a^2\sin^2x}}}{1-a^2\sin^2x}.$$

$$\therefore\quad f''(x)=\frac{a(a^2-1)\sin x}{(1-a^2\sin^2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

378. 已知：$y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，$x=\operatorname{tg}t$．求：$y''_{tt}$．

［解］　$y'_t=y'_x\cdot x'_t=[\ln(1-x^2)-\ln(1+x^2)]'_x\cdot(\operatorname{tg}t)'_t$

$$=\frac{-4x}{1-x^4}\cdot\sec^2t=-2\operatorname{tg}2t.$$

$\therefore\quad y''_{tt}=(-2\operatorname{tg}2t)'_t=-4\sec^2 2t.$

［说明］　求 y''_{tt} 时，应注意先对 y'_t 进行化简，这样可以减少求导数的运算量．

379. 已知：$y=f(x)$ 满足关系式 $S=\dfrac{y'''}{y'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^2$．如果 $y=\dfrac{1}{y_1}$，求证：$\dfrac{y_1'''}{y_1'}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S$．

［证］　$y_1=\dfrac{1}{y}$，　$\therefore\quad y_1'=-\dfrac{y'}{y^2}$

对 y_1' 求关于 x 的导数，得

$$y_1''=\frac{2y'^2-y''y}{y^3}$$

对 y_1'' 求关于 x 的导数，得

$$y_1'''=\frac{(4y'y''-y'''y-y'y'')\cdot y^3-3y^2y'(2y'^2-y''y)}{y^6}$$

$$=\frac{-6y'^3+6y''y'y-y'''y^2}{y^4}$$

$$\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=\frac{\dfrac{-6y'^3-6y''y'y-y'''y^2}{y^4}}{-\dfrac{y'}{y^2}}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\dfrac{2y'^2-y''y}{y^3}}{-\dfrac{y'}{y^2}}\right)^2$$

$$=\frac{2y'''y'-3y''^2}{2y'^2}=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=S$$

380. 设 α、β、γ、A、B、C 皆为实数，且 $\gamma\neq0$，又设

$$f(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}\sin\gamma x+Ce^{\beta x}\cos\gamma x$$

时，证明 $f(x)\equiv 0$ 的充要条件是：

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0.$$

［证］ 必要性：若 $f(x)\equiv 0$．有 $f'(x)=0$，$f''(x)=0$．对一切 x 成立．取 $x=0$，于是有 $f(0)=f'(0)=f''(0)$．

充分性：

$$\because\quad f'(x)=A\alpha e^{\alpha x}+B\beta e^{\beta x}\sin\gamma x+B\gamma e^{\beta x}\cos\gamma x$$
$$+C\beta e^{\beta x}\cos\gamma x-C\gamma e^{\beta x}\sin\gamma x$$
$$=A\alpha e^{\alpha x}+(B\beta-C\gamma)e^{\beta x}\sin\gamma x+(B\gamma+C\beta)e^{\beta x}\cos\gamma x.$$
$$f''(x)=A\alpha^2e^{\alpha x}+(B\beta-C\gamma)(\beta e^{\beta x}\sin\gamma x+\gamma e^{\beta x}\cos\gamma x)$$
$$+(B\gamma+C\beta)(\beta e^{\beta x}\cos\gamma x-\gamma e^{\beta x}\sin\gamma x).$$

由 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，所以有

$$\begin{cases}A+C=0\\A\alpha+B\gamma+C\beta=0\\A\alpha^2+2B\beta\gamma+C(\beta^2-\gamma^2)=0.\end{cases}$$

解方程组得 $C=-A$，$B\gamma=(\beta-\alpha)A$，代入最末一个方程得

$$[\alpha^2+2\beta(\beta-\alpha)-(\beta^2-\gamma^2)]A=0,\quad 即\quad [(\alpha-\beta)^2+\gamma^2]A=0.$$

$\because\ \gamma\neq 0$，$\therefore\ (\alpha-\beta)^2+\gamma^2\neq 0$，得 $A=0$，从而 $B=C=0$．$\therefore\ f(x)\equiv 0$．

381．已知 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\0, & x=0.\end{cases}$ 试确定 α 的范围，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数．

［解］ 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{\alpha}\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

若 $\alpha\leqslant 1$，则 $f'(0)$ 不存在．只有 $\alpha>1$ 时，$f'(0)$ 存在且等于 0．又在 $\alpha>1$ 前提下，

$$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)^{\alpha-1}\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}-(\Delta x)^{\alpha-2}\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\alpha(\Delta x)^{\alpha-2}\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}-(\Delta x)^{\alpha-3}\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}\right],$$

其中 $\sin\frac{1}{\Delta x}$、$\cos\frac{1}{\Delta x}$ 是有界变量，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有二阶导数必须 $\alpha>3$.

∴ 当 $\alpha>3$ 时，存在 $f''(0)$，且 $f''(0)=0$.

382. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域满足：(i) 严格单调，(ii) $f''(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 $y_0(=f(x_0))$ 处二阶可导，且 $[f^{-1}(y_0)]''=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$.

[证] ∵ f 在 x_0 的邻域严格单调，则存在 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$，且 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 亦可导，$[f^{-1}(y_0)]'=\frac{1}{f'(x_0)}$.

又因 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 可导，则 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 连续，即当 $\Delta y=y-y_0\to 0$ 时 $\Delta x=x-x_0\to 0$.

已知 $f''(x_0)$ 存在，∴ f' 在 x_0 连续，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f'(x_0+\Delta x)=f'(x_0)$. 由此可得：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(f^{-1})'(y_0+\Delta y)-(f^{-1})'(y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{f'(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{f'(x_0)}}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-[f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)]}{f'(x_0+\Delta x)\cdot f'(x_0)}\cdot\frac{1}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-[f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)]}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}\cdot\frac{1}{f'(x_0+\Delta x)\cdot f'(x_0)}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f'(x_0+\Delta x)\cdot f'(x_0)}$$

$$=-f''(x_0)\cdot\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\frac{1}{[f'(x_0)]^2}=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

即
$$[f^{-1}(y)]''=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

383. 已知：$y=\arcsin x$. 求：y''_{xx}.

［解］ 按上题求反函数高阶导数的结论，得

$$(\arcsin x)''_{xx}=-\frac{(\sin y)''_{yy}}{[(\sin y)'_y]^3}=-\frac{(-\sin y)}{(\cos y)^3}=\frac{\sin(\arcsin x)}{[\cos(\arcsin x)]^3}$$
$$=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

384. 已知：函数 $y=f(x)$，满足 $R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. 求证：

$$R^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

［证］ 由第382题结论，根据反函数导数关系，有

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}.$$

$$\because\quad R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\qquad\therefore\quad R^{\frac{2}{3}}=\frac{(1+y'^2)}{y''^{\frac{2}{3}}}=\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

即

$$R=\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\left[\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$=\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore\quad R=\frac{1}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

385. 已知：$x=(y^2+2\ln y)^{\frac{1}{4}}$. 求：$y''_{xx}$.

［解］ 由上题相同方法求反函数的二阶导数：

$$x'_y=\frac{1}{4}(y^2+2\ln y)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(2y+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{4}x^{-3}\cdot\left(2y+\frac{2}{y}\right).$$

$$\therefore\quad x'_y=\frac{1+y^2}{2x^3y}.$$

$$x''_{yy}=\frac{2y\cdot(2x^3y)-[6x^2\cdot x'_y\cdot y+2x^3]\cdot(1+y^2)}{(2x^3y)^2}$$

$$=\frac{4x^3y^2-(1+y^2)\left[6x^2y\cdot\frac{1+y^2}{2x^3y}+2x^3\right]}{4x^6y^2}$$

$$=\frac{4x^4y^2-(1+y^2)[3+3y^2+2x^4]}{4x^7y^2}=\frac{2x^4y^2-3-6y^2-3y^4-2x^4}{4x^7y^2}.$$

$$\therefore\quad y''_{xx}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}=-\frac{\dfrac{2x^4y^2-3-6y^2-3y^4-2x^4}{4x^7y^2}}{\dfrac{(1+y^2)^3}{8x^9y^3}}$$

$$=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}(3+6y^2+3y^4+2x^4-2x^4y^2).$$

386. 已知：$y=x^x$. 求：y''_{xx}，y'''_{xxx}.

［解］ 按对数求导法：$y'_x=x^x(1+\ln x)=y(1+\ln x)$.

$$\therefore\quad y''_{xx}=y'(1+\ln x)+y\cdot\frac{1}{x}=x^x\cdot(1+\ln x)^2+x^{x-1}.$$

由
$$y''_{xx}=y\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right],$$

$$\therefore\quad y'''_{xxx}=(y''_{xx})'_x=y'\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]+y\left[2(1+\ln x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right],$$

得
$$y'''_{xxx}=x^x\left[(1+\ln x)^3+\frac{3}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x^2}\right].$$

387. 已知：$\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t.\end{cases}$ 求：$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

［解］ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)'_t}{(at\cos t)'_t}=\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}.$$

388. 已知：$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$ 求：$\frac{d^3y}{dx^3}$.

［解］ $\frac{dy}{dx}=-\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\operatorname{tg} t.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\sec^2 t}{3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{4\cos^3 t\sin^2 t-\cos^5 t}{3a(\cos^4 t\sin t)^2}}{-3a\cos^2 t\sin t}.$$

$$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\cos^2 t-4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}.$$

389. 已知：$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ 求：$\frac{d^2y}{dx^2}$；$\frac{d^3y}{dx^3}$.

［解］ $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\csc^2\frac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\csc^3\frac{t}{2}\cdot\csc\frac{t}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{4a\cdot 2a\sin^2\frac{t}{2}}.$$

$$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{4a^2}\cdot\csc^6\frac{t}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

390. 已知：$\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 其中 $f(t)$ 具有二阶导数，且 $f''(t)\neq 0$. 求：$\frac{d^2y}{dx^2}$.

［解］ $\frac{dy}{dt}=f'(t)+tf''(t)-f'(t)=tf''(t)$，$\frac{dx}{dt}=f''(t)$. 已知 $f''(t)\neq 0$,

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t.\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{f''(t)}.$$

391. 已知：参数方程 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\sin kt.\end{cases}$ 求证：

$$(1-x^2)y''-xy'+k^2y=0.$$

［证］ 由参数方程求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{k\cos kt}{\cos t};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{k\cos kt\sin t-k^2\sin kt\cos t}{\cos^3 t}.$$

$$\therefore\quad (1-x^2)y''-xy'+k^2y$$

$$=(1-\sin^2 t)\cdot\frac{k\cos kt\sin t-k^2\sin kt\cos t}{\cos^3 t}$$

$$-\sin t\cdot\frac{k\cos kt}{\cos t}+k^2\cdot\sin kt$$

$$=\frac{k\cos kt\sin t-k^2\sin kt\cos t}{\cos t}-\sin t\frac{k\cos kt}{\cos t}+k^2\sin kt=0.$$

$$\therefore\quad (1-x^2)y''-xy'+k^2y=0.$$

392. 已知：参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin t,\\ y=e^t\cos t.\end{cases}$ 求证：

$$y''(x+y)^2=2(xy'-y).$$

［证］ 由参数方程求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}=\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}=\frac{-\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{e^t(\cos t+\sin t)}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{e^t\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sec^3\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot e^{-t}.$$

$$\therefore\quad y''(x+y)^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sec^3\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot e^t\cdot 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$

$$=-\sqrt{2}\,e^t\sec\left(\frac{\pi}{4}-t\right).$$

$$2(xy'-y)=2\left[\left(e^t\sin t\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-e^t\cos t\right)\right]$$

$$=2e^t\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cdot\left[\sin t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-\cos t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]$$

$$=2e^t\sec\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}e^t\sec\left(\frac{\pi}{4}-t\right).$$

因此 $$y''(x+y)^2=2(xy'-y).$$

393. 求由 $e^y+xy=e$ 确定的隐函数在 $x=0$ 的二阶导数 $y''_{xx}(0)$.

［解］ 方程两边对 x 求导 $e^y\cdot y'_x+y+xy'_x=0$, $y'_x=-\dfrac{y}{e^y+x}$,

$$y''_{xx}=-\frac{y'_x(e^y+x)-y(e^y\cdot y'_x+1)}{(e^y+x)^2}.$$

当 $x=0$ 时, $y=1$.

$$\therefore\quad y'_x(0)=-\frac{1}{e},\quad y''_{xx}(0)=-\frac{-\frac{1}{e}(e)-\left(e\cdot\frac{-1}{e}+1\right)}{e^2},$$

$$\therefore\quad y''_{xx}(0)=\frac{1}{e^2}.$$

394. 求由 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 确定的隐函数的二阶导数 y''_{xx}.

［解］ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 两边对x求导 $2b^2x+2a^2y\cdot y'_x=0$, 解得

$$y'_x=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

$$y''_{xx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\cdot y'_x}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+\frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2},$$

$$y''_{xx}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

395. 求由 $y=\mathrm{tg}(x+y)$ 所确定的隐函数的三阶导数 y'''_{xxx}.

［解］ $y=\mathrm{tg}(x+y)$ 两边求关于 x 的导数: $y'_x=\sec^2(x+y)\cdot(1+y'_x)$,

$$\therefore\quad y'_x=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=-\frac{1+\mathrm{tg}^2(x+y)}{\mathrm{tg}^2(x+y)}=-\left(\frac{1}{y^2}+1\right).$$

$$y''_{xx}=\left(-\frac{1}{y^2}-1\right)'_x=\frac{2}{y^3}\cdot y'_x=-\left(\frac{2}{y^5}+\frac{2}{y^3}\right).$$

$$y'''_{xxx}=-2\left(\frac{1}{y^5}+\frac{1}{y^3}\right)'_x=2\left(\frac{5}{y^6}+\frac{3}{y^4}\right)\cdot y'_x,$$

$$\therefore \quad y'''_{xxx}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}.$$

396. 已知：$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$. 求证：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+e)^3}\quad (A\text{ 为常数}),$$

[证] 将方程两边求关于 x 导数，

$$2ax+2by+2bx\cdot\frac{dy}{dx}+2cy\frac{dy}{dx}+2d+2e\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

对上式继续求关于 x 的导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(b+cy'_x)(ax+by+d)-(a+by'_x)(bx+cy+e)}{(bx+cy+e)^2}$$

$$=\frac{(ac-b^2)xy'_x+(b^2-ac)y+(cd-eb)y'_x+(bd-ae)}{(bx+cy+e)^2}$$

注意到上式分子：

$$(ac-b^2)[xy'_x-y]+(cd-eb)y'_x+(bd-ae)$$

$$=(ac-b^2)\left[-\frac{ax^2+bxy+dx+bxy+cy^2+ey}{bx+cy+e}\right]$$

$$-(cd-eb)\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}+(bd-ae)\frac{bx+cy+e}{bx+cy+e}$$

$$=[(ac-b^2)\cdot(dx+ey+f)-(cd-eb)\cdot(ax+by+d)$$

$$+(bd-ae)(bx+cy+e)]\cdot\frac{1}{bx+cy+e}.$$

由 $(ac-b^2)(dx+ey)-(cd-eb)(ax+by)+(bd-ae)(bx+cy)\equiv 0$,

即上式中括号内一次项系数为零，所以上式总可化为 $\frac{A}{bx+cy+e}$ 其中 A 是中括号内常数项.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+e)^3}.$$

397. 求证 $y=x^n[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]$ 满足方程：

$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$ (其中 c_1、c_2、n 都是常数).

[证一] $\because$ $[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]=\frac{y}{x^n}$, 两边对 x 求导：

$$\frac{1}{x}\cdot[-c_1\sin(\ln x)+c_2\cos(\ln x)]=\frac{y'\cdot x^n-nx^{n-1}\cdot y}{x^{2n}},$$

整理得 $$-c_1\sin(\ln x)+c_2\cos(\ln x)=\frac{y'x-ny}{x^n},$$

两边再对 x 求导

$$-\frac{1}{x}[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]$$
$$=\frac{(y''x+y'-ny')x^n-(y'x-ny)\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}.$$

化简 $$-\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^n}=\frac{y''x+(1-2n)y'+n^2x^{-1}y}{x^n},$$

去分母整理得

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(n^2+1)y=0.$$

[证二]

$$y=x^n\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left[\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cdot\cos(\ln x)+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cdot\sin(\ln x)\right]$$
$$=x^n\cdot k\cdot\sin(\theta+\ln x)\quad\left(k=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}\right).$$

$$\therefore\quad y'=k\cdot x^{n-1}[n\sin(\theta+\ln x)+\cos(\theta+\ln x)].$$

$$y''=k\cdot x^{n-2}[(n^2-n-1)\sin(\theta+\ln x)+(2n-1)\cos(\theta+\ln x)],$$

将 y'、y'' 代入左边即得

$$x^2\cdot kx^{n-2}[(n^2-n-1)\sin(\theta+\ln x)+(2n-1)\cos(\theta+\ln x)]$$
$$+(1-2n)x\cdot kx^{n-1}[n\sin(\theta+\ln x)+\cos(\theta+\ln x)]$$
$$+(1+n^2)\cdot x^nk\sin(\theta+\ln x)$$
$$=kx^n\{[(n^2-n-1)+(1-2n)\cdot n+(1+n^2)]\sin(\theta+\ln x)$$
$$+[(2n-1)+(1-2n)]\cos(\theta+\ln x)\}=0.$$

$$\therefore\quad x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

398. 设函数 $f(x)$ 于 $x\leqslant x_0$ 处有定义并存在二阶导数. 应该如何选择系数 a、b 及 c, 才能使函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

存在二阶导数.

[解] 由已知, 当 $x\neq x_0$ 时, $F(x)$存在二阶导数.

当 $x=x_0$ 时，若 $F(x)$ 存在二阶导数须满足：

(i) $F(x)$ 在 x_0 连续，即 $f(x_0)=c$.

(ii) $F(x)$ 在 x_0 可导，即 $F'_+(x_0)=F'_-(x_0)$.

于是
$$F'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{a(\Delta x)^2+b\Delta x+c-c}{\Delta x}=b,$$
$$\therefore\quad f'_-(x_0)=b.$$

(iii) $F'(x)$ 在 x_0 可导；即 $F''_-(x_0)=F''_+(x_0)$. 由 (ii) 可知 $F'(x_0)=b$.

于是 $F''_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{F'(x_0+\Delta x)-F'(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{2a\Delta x+b-b}{\Delta x}=2a.$

$$F''_-(x_0)=f''_-(x_0),\quad\therefore\quad a=\frac{1}{2}f''_-(x_0).$$

因此，$F(x)$ 在 x_0 有二阶导数，须
$$a=\frac{1}{2}f''_-(x_0),\quad b=f'_-(x_0),\quad c=f'(x_0).$$

399. 已知：$f(x)=e^{ax}$. 求：$f^{(n)}(x)$ 的表示式.

[分析] 求 $f(x)$ 的 n 阶导数，一般是先求 $f(x)$ 的一阶、二阶导数，然后推测 $f(x)$ 的 n 阶导数表达式，再用数学归纳法验证.

[解] $f'(x)=a\cdot e^{a}$；$f''(x)=a^2\cdot e^{ax}$，推知：$f^{(n)}(x)=a^n\cdot e^{ax}$.

验证：当 $n=1$ 时上式成立. 假设当 $n=k-1$ 时有 $f^{(k-1)}(x)=a^{k-1}\cdot e^{ax}$，则由高阶导数定义和求导法则得
$$f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'=(a^{k-1}\cdot e^{ax})'=a^k\cdot e^{ax}.$$

$\therefore$ 当 $n=k$ 时亦成立. 于是 $f^{(n)}(x)=a^n\cdot e^{ax}$.

400. 求：$[(x^2+1)\sin x]^{(20)}$.

[解] 按莱布尼茨公式求导，因为 (x^2+1) 的三阶以上导数均为零，所以仅计算展开式的前三项导数.

$$\begin{aligned}[(x^2+1)\sin x]^{(20)}&=(x^2+1)\cdot(\sin x)^{(20)}+C_{20}^1\cdot(x^2+1)'\cdot(\sin x)^{(19)}\\&\quad+C_{20}^2\cdot(x^2+1)''\cdot(\sin x)^{(18)}\\&=(x^2+1)\cdot\sin x-2\cdot20\cdot x\cos x-\frac{20\cdot19}{2}\cdot2\cdot\sin x\\&=(x^2-379)\sin x-40x\cdot\cos x.\end{aligned}$$

401. 已知：$f(x)=\sin^4 ax$. 求：$f^{(n)}(x)$.

[分析] 直接对 $\sin^4 ax$ 求 n 阶导数运算量较大. 遇到高次的三角函数

一般要设法降次，然后再利用

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

[解] $f(x)=\sin^4 ax=\left(\frac{1-\cos 2ax}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2ax+\frac{1}{4}\cos^2 2ax.$

$\because$ $\left(\frac{1}{2}\cos 2ax\right)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot(2a)^n\cdot\cos\left(2ax+\frac{n\pi}{2}\right);$

$$\left(\frac{1}{4}\cos^2 2ax\right)'=-\frac{1}{4}\cdot 2\cos 2ax\cdot\sin 2ax\cdot 2a=-\frac{a}{2}\sin 4ax,$$

$$\left(\frac{1}{4}\cos^2 2ax\right)^{(n)}=\left(-\frac{a}{2}\cdot\sin 4ax\right)^{(n-1)}$$

$$=-\frac{a}{2}\cdot(4a)^{n-1}\cdot\sin\left[4ax+\frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{8}(4a)^n\cdot\cos\left(4ax+\frac{n\pi}{2}\right).$$

$\therefore$ $f^{(n)}(x)=\frac{1}{8}(4a)^n\cdot\cos\left(4ax+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2}(2a)^n\cdot\cos\left(2ax+\frac{n\pi}{2}\right)\quad(n\text{是自然数}).$$

402. 已知：$f(x)=\cos^3 ax$. 求：$f^{(n)}(x)$.

[解] $f(x)=\cos ax\cdot\cos^2 ax=\frac{1}{2}\cos ax\cdot(1+\cos 2ax)$

$$=\frac{1}{2}\cos ax+\frac{1}{2}\cos ax\cdot\cos 2ax=\frac{3}{4}\cos ax+\frac{1}{4}\cos 3ax.$$

由数学归纳法验证得：

$$\left(\frac{3}{4}\cos ax\right)^{(n)}=\frac{3}{4}\cdot a^n\cdot\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\left(\frac{1}{4}\cos 3ax\right)^{(n)}=\frac{(3a)^n}{4}\cdot\cos\left(3ax+\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\therefore\quad f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\cdot a^n\cdot\left[3\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+3^n\cdot\cos\left(3ax+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

403. 已知：$f(x)=\frac{x^2}{1-x}$. 求：$f^{(n)}(x)$.

[分析] 为了减少求有理分式高阶导数的运算量，常先对有理分式进行代数恒等变形，一般是先将有理分式化为整式与有理真分式的和，使分子

指数低于分母指数.再将有理真分式分解为部分分式之和.

[解一] $f(x)=\frac{x^2}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$.

由于 $-(x+1)$ 的二阶以上导数均为零,

$$\therefore\quad f'(x)=-1+\frac{1}{(1-x)^2}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,用数学归纳法易证:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad (n\geqslant 2)$$

[解二] 按莱布尼茨公式,当 $n\geqslant 2$ 时有:

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{1-x}\cdot x^2\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\cdot x^2+C_n^1\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-1)}\cdot(x^2)'$$
$$+C_n^2\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-2)}\cdot(x^2)'',$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad (n\geqslant 2).$$

404. 已知: $f(x)=\frac{x^n}{1+x}$. 求: $f^{(n)}(x)$.

[解一] $\because\quad \frac{x^n}{1+x}=x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1+(-1)^n\cdot\frac{1}{1+x}$.

由 x^k 的 n 阶导数均为零 $(k<n)$, 所以

$$\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

[解二] 利用莱布尼茨公式

$$\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=\left(x^n\cdot\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}.$$

由于 $\quad (x^n)^{(n-k)}=\frac{n!}{k!}x^k,\quad \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k\cdot k!}{(1+x)^{k+1}},$

$$\therefore\quad \left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{n!}{k!}\cdot x^k\cdot\frac{(-1)^k\cdot k!}{(1+x)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot\frac{n!x^k}{(1+x)^{k+1}}.$$

405. 已知: $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. 求: $f^{(n)}(x)$.

[解] 先将 $f(x)$ 分解为部分分式之和

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right),$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right],$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}+\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3}\right].$$

∴ 用数学归纳法验证，得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{2}\cdot n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\quad(n\geqslant 1).$$

406. 已知：$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$. 求：$f^{(n)}(x)$.

［解］ $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$， $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$，

$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x-2)^3}-\frac{1\cdot 2}{(x-1)^3}$， $f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-2)^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x-1)^4}$，

用数学归纳法易验证：

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n\cdot n!\cdot\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

407. 已知：$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(c\neq 0)$. 求：$f^{(n)}(x)$.

［解］ $f(x)=\frac{a}{c}+\left(\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1}\quad(c\neq 0)$.

由数学归纳法易验证：

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot\frac{(bc-ad)n!}{c^2}\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-(n+1)}\quad(c\neq 0).$$

408. 求证：$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{n+k+1}C_n^k=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

［证］ 由高阶导数 $(x^n)^{(n)}=n!$. 而 $x^n=\frac{x^{2n+1}}{x^{n+1}}$，再利用莱布尼茨公式

$$n!=\left(\frac{x^{2n+1}}{x^{n+1}}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot(x^{2n+1})^{(n-k)}\cdot\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(2n+1)!}{(n+k+1)!}x^{n+1+k}\cdot(-1)^k\cdot\frac{(n+k)!}{n!}\cdot x^{-n-1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\frac{(2n+1)!}{(n+k+1)!}\cdot\frac{(n+k)!}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\cdot C_n^k\cdot\frac{(2n+1)!}{n!}.$$

$$\therefore\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{n+k+1}C_n^k=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

409. 已知：$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内存在$(n-1)$阶连续导数．求：$f^{(n)}(a)$．

［解］ 由莱布尼茨公式，有

$$f^{(n-1)}(x)=n!(x-a)\varphi(x)+C_{n-1}^1\frac{n!}{2}(x-a)^2\cdot\varphi'(x)$$
$$+\cdots+C_{n-1}^{n-1}(x-a)^n\cdot\varphi^{(n-1)}(x).$$

显然 $f^{(n-1)}(a)=0$。按导数的定义，函数 f 的 n 阶导数为：

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left\{\begin{array}{l}n!(x-a)\varphi(x)+C_{n-1}^1\frac{n!}{2}(x-a)^2\cdot\varphi'(x)\\ \quad+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\cdot(x-a)^n\cdot\varphi^{(n-1)}(x)\end{array}\right\}}{x-a}=n!\varphi(a).$$

$$\therefore\quad f^{(n)}(a)=n!\varphi(a).$$

410. 求证．$(e^{ax}\cdot\cos bx)^{(n)}=r^n\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+n\varphi)$，

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

且用莱布尼茨公式得到下面关系式：

$$r^n\cdot\cos n\varphi=a^n-C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2+C_n^4\cdot a^{n-4}\cdot b^4-\cdots;$$

$$r^n\cdot\sin n\varphi=C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b-C_n^3\cdot a^{n-3}\cdot b^3+C_n^5\cdot a^{n-5}\cdot b^5-\cdots.$$

［证］ 当 $n=1$ 时，

$$(e^{ax}\cdot\cos bx)'=e^{ax}\cdot(a\cos bx-b\sin bx)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+\varphi)=r\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+\varphi).$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi.$$

等式成立．

假设 $n=k$ 时成立：

$$(e^{ax}\cos bx)^{(k)}=r^k\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+k\varphi),$$

再对上式求导得：

$$
\begin{aligned}
(e^{ax}\cdot\cos bx)^{(k+1)}&=r^k\cdot e^{ax}\cdot[a\cos(bx+k\varphi)-b\sin(bx+k\varphi)]\\
&=r^{k+1}\cdot e^{ax}\cdot[\cos\varphi\cos(bx+k\varphi)-\sin\varphi\cdot\sin(bx+k\varphi)]\\
&=r^{k+1}\cdot e^{ax}\cdot\cos[bx+(k+1)\varphi].
\end{aligned}
$$

∴ 当 $n=k+1$ 时亦成立.

这样便证明了对任何 n,

$$(e^{ax}\cdot\cos bx)^{(n)}=r^n\cdot e^{ax}\cdot\cos(bx+n\varphi),\quad r=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

此外，上式右端 $=r^n e^{ax}\cos bx\cos n\varphi-r^n e^{ax}\sin bx\sin n\varphi$，而左端按莱布尼茨公式有:

$$
\begin{aligned}
(e^{ax}\cos bx)^{(n)}&=(e^{ax})^{(n)}\cdot\cos bx+C_n^1\cdot(e^{ax})^{(n-1)}\cdot(\cos bx)'\\
&\quad+C_n^2\cdot(e^{ax})^{(n-2)}\cdot(\cos bx)''+\cdots\\
&\quad+C_n^{n-1}\cdot(e^{ax})'\cdot(\cos bx)^{(n-1)}+C_n^n\cdot e^{ax}\cdot(\cos bx)^{(n)}\\
&=a^n\cdot e^{ax}\cdot\cos bx-n\,a^{n-1}\cdot e^{ax}\cdot b\cdot\sin bx\\
&\quad-C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot e^{ax}\cdot b^2\cdot\cos bx+C_n^3\cdot a^{n-3}\cdot e^{ax}\cdot b^3\cdot\sin bx\\
&\quad-\cdots+C_n^{n-1}\cdot a\cdot e^{ax}\cdot b^{n-1}\cdot\cos\left(bx+\frac{n-1}{2}\pi\right)\\
&\quad+C_n^n\cdot e^{ax}\cdot b^n\cdot\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

比较两端的有关项便得到

$$
\begin{aligned}
r^n\cdot\cos n\varphi&=a^n-C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2+C_n^4\cdot a^{n-4}\cdot b^4-\cdots;\\
r^n\cdot\sin n\varphi&=C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b-C_n^3\cdot a^{n-3}\cdot b^3+C_n^5\cdot a^{n-5}\cdot b^5-\cdots.
\end{aligned}
$$

411. 已知: $f(x)=x^n\ln x$. 求证:

$$f^{(n)}(x)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\quad(x>0).$$

[证] 应用莱布尼茨公式,得

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}\cdot(\ln x)^{(k)}\\
&=(x^n)^{(n)}\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}\cdot(\ln x)^{(k)}\\
&=n!\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(k+1)\cdot x^k\cdot(k-1)!\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}\\
&=n!\ln x+\sum_{k=1}^{n}n!\,C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)
\end{aligned}
$$

现证明等式
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
根据数学归纳法，当 $n=1$ 时，等式显然成立．当 $n=m$ 时，假设有
$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_m^k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.$$
上式两边加上 $\frac{1}{m+1}$，于是
$$\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_m^k$$
$$=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(C_m^k-C_{m+1}^k)+\sum_{k+1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k.$$
$\because\quad C_m^k-C_{m+1}^k=-\frac{k}{m+1}C_{m+1}^k,$

$\therefore\quad$ 原式 $=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{(-k)}{m+1}\cdot C_{m+1}^k+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k$

$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k.$

由于
$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k=1,$$
$\therefore\quad$ 原式 $=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+1}[1-(-1)^mC_{m+1}^{m+1}]+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k$

$=\frac{(-1)^m}{m+1}C_{m+1}^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k.$
$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{m+1}^k=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$
[说明] $\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k=1$．证明如下：
$$(1-x)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^kC_{m+1}^kx^k,$$
令 $x=1$，得 $\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^kC_{m+1}^k=0$，由此可推得
$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k=1.$$

412．证明切比晓夫多项式
$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\quad(m=1,\ 2,\ \cdots),$$
满足方程 $\quad(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$

［证］ 求函数 $T_m(x)$ 关于 x 的二阶导数，得

$$T'_m(x)=\frac{m}{2^{m-1}}\frac{\sin(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T''_m(x)=-\frac{m^2\cos(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)}+\frac{xm\sin(m\arccos x)}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{1-x^2}T_m(x)+\frac{xT'_m(x)}{1-x^2}.$$

将所得的导数代入方程左边，得

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)$$
$$=-m^2T_m(x)+xT'_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0$$
$$\therefore\quad (1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

413. 已知：$f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$. 求：$\operatorname{arc\,tg}x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

［解］ $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$，并且 $f'(x)\cdot(1+x^2)=1$，对后一等式利用莱布尼茨公式求关于 x 的 n 阶导数，得

$$[f'(x)]^{(n)}\cdot(1+x^2)+n\cdot[f'(x)]^{(n-1)}\cdot(1+x^2)'$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot[f'(x)]^{(n-2)}\cdot(1+x^2)''=0,$$

$$(1+x^2)\cdot f^{(n+1)}(x)+2nx\cdot f^{(n)}(x)+n(n-1)\cdot f^{(n-1)}(x)=0.$$

将 $x=0$ 代入上式，$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)\cdot f^{(n-1)}(0)=0$.

$\therefore\quad f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\cdot f^{(n-1)}(0)$（递推公式）.

由 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-2$，$n\geqslant3$ 时利用递推公式得：

$$f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\cdot(2n)!.$$

414. 求：$y=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

［解］ $y'_x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即：$\sqrt{1-x^2}\cdot y'=1$. 两边同时求关于 x 的导数，得：

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot y'+\sqrt{1-x^2}\cdot y''=0,$$

即有：$(1-x^2)y''-x\cdot y'=0$. 对上面等式按莱布尼茨公式求关于 x 的 n 阶导数，有

$$(1-x^2)\cdot y^{(n+2)}-C_n^1\cdot(2x)\cdot y^{(n+1)}-C_n^2\cdot 2\cdot y^{(n)}-x\cdot y^{(n+1)}-C_n^1\cdot y^{(n)}=0,$$

$$(1-x^2)\cdot y^{(n+2)}-(2n+1)x\cdot y^{(n+1)}-n^2\cdot y^{(n)}=0\quad(n\geqslant 2).$$

在 $x=0$ 时，$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)\ (n\geqslant 2)$（递推公式）。

已知 $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=1$．由递推公式即可得：

$$y^{(2m)}(0)=0;\ y^{(2m+1)}(0)=[(2m-1)!!]^2\quad(m\text{ 为自然数}).$$

415．求证 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$．

［证］ $\because\ \lim\limits_{x\to -0}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\ f(0)=0$．$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

用数学归纳法可以证明

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

其中 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是与 $f(x)$ 的 n 阶导数有关的关于 $\frac{1}{x}$ 的多项式．当 $n=1$，

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2}}=0.$$

假设 $n=k$ 时 $f^{(k)}(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f^{(k)}(0)=0$．当 $n=k+1$ 时因为

$$f^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\quad(x\neq 0).$$

$$\therefore\quad f^{(k+1)}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(k)}(\Delta x)-f^{(k)}(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_k\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\Delta x}\cdot P\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{e^{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2}}=0.$$

因此可见　　$f^{(n)}(0)=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$

416．切比晓夫-拉盖尔多项式是 $L_m(x)=e^x(x^m\cdot e^{-x})^{(m)}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$．求切比晓夫-拉盖尔多项式的显表示式．并

且证明 $L_m(x)$ 满足方程

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

［证］　由莱布尼茨公式，即得 $L_m(x)$ 的显表示式为

$$L_m(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_m^k m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}.$$

令 $u=x^m e^{-x}$，求恒等式 $xu'+(x-m)u=0$ 的 $(m+1)$ 阶导数，得

$$(xu')^{(m+1)}+[(x-m)u]^{(m+1)}=0,$$

$$[xu^{(m+2)}+C_{m+1}^1u^{(m+1)}]+[(x-m)u^{(m+1)}+C_{m+1}^1u^{(m)}]=0.$$

$$\therefore\quad xu^{(m+2)}+(x+1)u^{(m+1)}+(m+1)u^{(m)}=0 \qquad \cdots①$$

由于 $u^{(m)}=e^{-x}L_m(x)$，则

$$u^{(m+1)}=e^{-x}[L'_m(x)-L_m(x)],$$

$$u^{(m+2)}=e^{-x}[L''_m(x)-2L'_m(x)+L_m(x)].$$

将 $u^{(m)}$、$u^{(m+1)}$、$u^{(m+2)}$ 的表达式代入 ① 式，并约去 e^{-x}，即得

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

417. 如果 $y=(1-x)^{-\alpha}\cdot e^{-\alpha x}$. 求证：$(1-x)\dfrac{dy}{dx}=\alpha xy$，且使用莱布尼茨公式证明：$y=(1-x)^{-\alpha}\cdot e^{-\alpha x}$ 满足

$$(1-x)y^{(n+1)}-(n-\alpha x)y^{(n)}-n\alpha\cdot y^{(n-1)}=0.$$

［分析］　为了验证等式，对 $y=(1-x)^{-\alpha}\cdot e^{-\alpha x}$ 直接用莱布尼茨公式求 $(n+1)$ 阶导数，那末展开项很复杂，因此验证有困难．如果求了一阶导数后，把等式变形为 $(1-x)y'=\alpha\cdot x\cdot y$，那末利用 $(1-x)$、x 的二阶以上导数均为零的性质，则可使莱布尼茨公式的展开项形式要简单得多．

［证］　将 $y=(1-x)^{-\alpha}\cdot e^{-\alpha x}$ 两边求关于 x 的导数，得

$$y'_x=\alpha\cdot(1-x)^{-\alpha-1}\cdot e^{-\alpha x}-\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot(1-x)^{-\alpha}$$

$$=\alpha\cdot e^{-\alpha x}\cdot(1-x)^{-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{1-x}-1\right).$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\alpha\cdot y\cdot\frac{x}{1-x},\quad 即\quad (1-x)\frac{dy}{dx}=\alpha\cdot x\cdot y.$$

对上式两边求 n 阶导数，按莱布尼茨公式有

$$(1-x)y^{(n+1)}-n\cdot y^{(n)}=\alpha\cdot x\cdot y^{(n)}+n\cdot\alpha\cdot y^{(n-1)},$$

移项整理得　$(1-x)y^{(n+1)}-(n-\alpha x)y^{(n)}-n\alpha\cdot y^{(n-1)}=0.$

§4. 函数的微分及应用

418. 由函数微分的定义出发，验证 $y=3x^2$ 在(1, 3)处可微，并求函数在该点的微分.

［解］ $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$，$\Delta y=6\Delta x+3\Delta x^2$. 其中6是与 Δx 无关的常数，$3\Delta x^2$ 是 Δx 的高阶无穷小. ∴ 由微分的定义，$y=3x^2$ 在(1, 3)处可微，且该点处的微分为 $dy=6dx$.

419. 求：$y=xe^x$ 的微分.

［解一］ 按导数与微分的关系：$dy=f'(x)dx$ 来解，则

$$f'(x)=(xe^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x.$$

$$\therefore\quad dy=f'(x)dx=(1+x)e^x dx.$$

［解二］ 用微分法则来解，则

$$dy=d(x\cdot e^x)=x\cdot de^x+e^x\cdot dx=xe^x\cdot dx+e^x\cdot dx.$$

$$\therefore\quad dy=(1+x)e^x dx.$$

420. 求：$y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{v}{u}$ 的微分，其中 u、v 都是 x 的可微函数.

［解一］ 由导数与微分的关系得

$$f'(x)=\frac{\dfrac{v'_x u-u'_x v}{u^2}}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=\frac{v'_x u-u'_x v}{u^2+v^2}.$$

$$\therefore\quad dy=d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right)=\frac{v'_x u-u'_x v}{u^2+v^2}\,dx.$$

［解二］ 由求微分法则得

$$dy=d\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}\cdot d\frac{v}{u}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}\cdot\frac{udv-vdu}{u^2}.$$

$$\therefore\quad dy=d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right)=\frac{udv-vdu}{u^2+v^2}=\frac{v'_x u-u'_x v}{u^2+v^2}\,dx.$$

421. 求出下列复合函数的微分表示式：

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$，$x=t^3+2t+1$;

(2) $s=\cos^2 z,\quad z=\dfrac{t^2-1}{4}$;

(3) $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{u}{2},\quad u=\arcsin v,\quad v=\cos 2s$.

［解］ (1) 按一阶微分形式不变性有：

$$dy=(\sqrt[3]{x^2+5x})'_x dx=\frac{1}{3}(x^2+5x)^{-\frac{2}{3}}(2x+5)dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+5x)^{-\frac{2}{3}}(2x+5)(3t^2+2)dt.$$

$$\therefore\quad dy=\frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)dt}{3\sqrt[3]{[(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)]^2}}.$$

(2) $ds=(\cos^2 z)'_z dz=(\cos^2 z)'_z\left(\dfrac{t^2-1}{4}\right)'_t\cdot dt$.

$$ds=-2\cos z\sin z dz=-\sin 2z\cdot\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

$$\therefore\quad ds=-\frac{t}{2}\sin\frac{t^2-1}{2}\,dt.$$

(3) $dy=\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right)'_u du=\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right)'_u\cdot(\arcsin v)'_v dv$

$$=\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)'_u\cdot(\arcsin v)'_v\cdot(\cos 2s)'_s ds.$$

$$dy=\frac{\sec^2\frac{u}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot(-2\sin 2s)ds=-\frac{2}{\sin u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\sin 2s ds.$$

$$\therefore\quad dy=-\frac{2\operatorname{sgn}(\sin 2s)}{\cos 2s}\,ds.$$

422. 求：$y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$ 的微分.

［解］ 按一阶微分形式的不变性，得

$$d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}d\left(\frac{1}{|x|}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{d|x|}{x^2}=\frac{\operatorname{sgn}(x)dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

$$\therefore\quad d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

423. 求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}$，其中 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta x=\dfrac{\pi}{360}$；

(2) $y=\cos^2\varphi$，其中 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$，$\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{360}$；

(3) $y=\sin 3\varphi$，其中 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta\varphi=\dfrac{\pi}{360}$；

(4) $y=2x^2+1$，其中 $x_0=1$，$\Delta x=0.1$、0.01.

［解］ (1) $dy=\dfrac{-2\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^3}dx$,

$$\therefore\quad dy\Big|_{\substack{x_0=\frac{\pi}{6}\\ \Delta x=\frac{\pi}{360}}}=-\frac{2\sec^2\frac{\pi}{6}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^3}\cdot\frac{\pi}{360}\approx-0.0059.$$

(2) $dy=-\sin 2\varphi d\varphi$,

$$\therefore\quad dy\Big|_{\substack{\varphi_0=\frac{\pi}{3}\\ \Delta\varphi=\frac{\pi}{360}}}=-\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}\approx-0.00756.$$

(3) $dy=3\cos 3\varphi d\varphi$,

$$\therefore\quad dy\Big|_{\substack{\varphi_0=\frac{\pi}{6}\\ \Delta\varphi=\frac{\pi}{360}}}=3\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.$$

(4) $dy=4xdx$, $\therefore\ dy\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0.1}}=0.4$, $dy\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0.01}}=0.04$.

424. 证明近似公式 $\sqrt{a^2+x}\approx a+\dfrac{x}{2a}$ ($a>0$，其中 $|x|$ 与 a 比较是充分小的)，并计算 $\sqrt{122}$.

［证］ $f(x)=\sqrt{a^2+x}$ ($a>0$). 取 $x_0=0$，$\Delta x=x$. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{a^2+x}}$.

由 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$, $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$,

得
$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}.\quad \sqrt{122}=\sqrt{11^2+1}\approx 11+\frac{1}{22};$$

$$\therefore\quad \sqrt{122}\approx 11.04\dot{5}.$$

［说明］ 利用微分的性质可以方便地得到一系列近似计算公式. 如当 $|x|$ 很小时有：

$$\sin x\approx x,\ \operatorname{tg} x\approx x,\ \sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x,\ \frac{1}{1+x}\approx 1-x,$$

$$\ln(1+x)\approx x,\ e^x\approx 1+x$$

等等.

425. 计算 tg 30°30′ 的近似值.

［解一］ 函数 $y=\operatorname{tg} x$, 设 $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=30'=\frac{\pi}{360}$.

$$\because\quad f'(x)=\sec^2 x,\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sec^2\frac{\pi}{6}$$

由
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} 30°30'\approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\sec^2\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360},$$

$$\operatorname{tg} 30°30'\approx 0.5774+0.0116=0.5890.$$

则　tg 30°30′ 的近似值为 0.5890.

［解二］ 按近似公式 $\operatorname{tg} x\approx x$ (当 $|x|$ 很小时).

$$\operatorname{tg} 30°30'=\operatorname{tg}(30°+30')=\frac{\operatorname{tg} 30°+\operatorname{tg} 30'}{1-\operatorname{tg} 30°\operatorname{tg} 30'},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} 30°30'\approx\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{360}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{360}}\approx\frac{0.5774+0.0087}{1-0.5774\times 0.0087}=0.5891$$

426. 求函数 $y=x^3-x$ 在 $x=2$, $\Delta x=0.1$ 时, 函数的增量与微分,并求函数的增量与微分的绝对误差和相对误差.

［解］ $\Delta y=f(2.1)-f(2)=2.1^3-2.1-2^3+2=1.161.$

$$dy=(3x^2-1)dx.\qquad dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}}=(3\times 2^2-1)\times 0.1=1.1.$$

∴ 绝对误差　　$|\Delta y-dy|=0.061.$

相对误差　　$\delta=\dfrac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}\approx 5.25\%.$

427. 单摆振动的周期按下式确定: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 l 为摆长,重力加速度 $g=981\ \mathrm{cm/s^2}$. 为了使周期 T 增大 0.01 s, 对摆长 $l=50\ \mathrm{cm}$ 的长度需要做多少修改?

［解］ $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，周期 T 对摆长微分

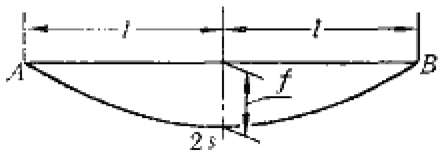
$$dT=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}dl=\frac{\pi}{\sqrt{lg}}\cdot dl.$$

将 $dT=0.01$，$g=981$，$l=50$ 代入上式得

$$dl=\frac{0.01\times\sqrt{981\times50}}{3.1416}\approx0.705.$$

摆长需增加 0.705 cm.

428. 如图所示，一根长为 $2s$ 的金属线放在跨度为 $2l$ 的两端固定，垂下的长度为 f，且满足



$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right).$$

(1) 计算当垂下的长度发生的变化为 df 时，金属线的长度变化为多少？

(2) 如果因为温度变化或负重的原因，使金属线长度发生的变化为 ds 时，求下垂长度的变化为多少？

［解］ (1) $s=l\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)$，

其中跨度 l 为常数．两边微分得：$ds=l\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{f}{l^2}\right)df$.

金属线长度的变化 $d(2s)=\frac{8f}{3l}df$

(2) 由上面的结果得下垂长度的变化 df 应为 $df=\frac{3l}{4f}ds$.

429. 求证：函数 $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ 满足关系式 $2x^2dy=(x^2y^2+1)dx$.

［证］ $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$，

$$\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{x}(x-x\ln x)+\ln x(1+\ln x)}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{(1+\ln^2x)}{x^2(1-\ln x)^2}.$$

∴ 由微分与导数的关系：

$$2x^2dy=\frac{2(1+\ln^2x)}{(1-\ln x)^2}\ dx=\frac{(1+\ln x)^2+(1-\ln x)^2}{(1-\ln x)^2}\ dx,$$

$$2x^2dy=\left[\frac{(1+\ln x)^2}{x^2(1-\ln x)^2}\cdot x^2+1\right]dx,\ \therefore\ 2x^2dy=(x^2y^2+1)dx.$$

430. 验证由方程 $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 定义的隐函数 $y=f(x)$，满足关系式 $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

［解］ 由微分法则对 $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 两边求微分得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2xdx+2ydy).$$

整理得 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$，移项得 $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

∴ 方程定义的隐函数满足关系式.

431. 求下列函数的二阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$;　　(2) $y=(x+1)^3(x-1)^2$;

(3) $y=4^{-x^2}$;　　(4) $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)$.

［解］ (1) ∵ $y''_{xx}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$，∴ $d^2y=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}dx^2$.

(2) ∵ $y''_{xx}=4(x+1)(5x^2-2x-1)$，∴ $d^2y=4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$.

(3) ∵ $y''_{xx}=4^{-x^2}\cdot2\ln4\cdot(2x^2\ln4-1)$,

∴ $d^2y=4^{-x^2}\cdot2\ln4\cdot(2x^2\ln4-1)dx^2$.

(4) ∵ $y''_{xx}=\frac{ab(a^2-b^2)\sin2x}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^2}$,

∴ $d^2y=\frac{ab(a^2-b^2)\sin2x}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^2}dx^2$.

432. 已知：$y=f(x)$ 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 确定．求：d^2y.

［解］ 对方程两边求关于 x 的导数，

$$x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'_x=0 \qquad \cdots①$$

$$y'_x=-x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}. \qquad \cdots②$$

对②式两边求关于 x 的导数，得

$$y''=\frac{1}{3}(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}y').$$

将②式代入得 $$y''_{xx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}).$$

得 $$d^2y=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}})dx^2.$$

433. 对函数 $y=e^x$ 在下述两种情况下求 d^2y: (1) x 是自变量; (2) x 是中间变量.

［解］ (1) 当 x 是自变量时,有

$$dy=d(e^x)=e^xdx;\quad d^2y=d(e^xdx)=e^xdx^2.$$

(2) 当 x 是中间变量时,由一阶微分形式不变性有 $dy=e^xdx$,

$$\therefore\quad d^2y=d(e^x)dx+e^xd(dx)=e^xdx^2+e^xd^2x.$$

［说明］ 二阶微分形式不具有不变性.

434. 已知: $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=\operatorname{tg}t$, 分别用 x 和 x 的微分以及 t 和 t 的微分表示 d^2y.

［解］ (1) $d^2y=d(dy)=d(y'_xdx)=y''_{xx}dx^2+y'_xd^2x$.

$$\therefore\quad y'_x=\frac{4x}{x^4-1},\ y''_{xx}=-\frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}.$$

$$\therefore\quad d^2y=-\frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2+\frac{4x}{x^4-1}d^2x.$$

(2) 由复合函数求导: $y''_{tt}=-4\sec^2 2t$.

$$\therefore\quad d^2y=-4\sec^2 2t\,dt^2.$$

435. 已知: $y=\sin z$, $z=a^x$, $x=t^3$, 分别用 z 和关于 z 的微分, x 和关于 x 的微分与 t 和关于 t 的微分表示 d^2y.

［解］ (1) 由 $dy=\cos z dz$, $\therefore$ $d^2y=d(\cos z)dz+\cos z d(dz)=\cos z d^2z-\sin z dz^2$.

(2) $dy=a^x\cos(a^x)\cdot\ln a dx$,

$$\therefore\quad d^2y=a^x\cos(a^x)\ln a d^2x-a^x\ln^2a(a^x\sin a^x-\cos x^x)dx^2.$$

(3) $d^2y=3t\ln a a^{t^3}[2\cos a^{t^3}+3t^3\ln a\cos a^{t^3}-3t^3a^{t^3}\ln a\sin a^{t^3}]dt^2$.

［说明］ $x=t^3$, $\therefore$ $d^2x=6tdt^2$; $dx^2=9t^4dt^2$. 代入

$$d^2y=a^x\cos(a^x)\ln a d^2x-a^x\ln^2a(a^x\sin a^x-\cos a^x)dx^2.$$

于是(3)亦可如此来计算:

$$d^2y = a^{x}\cos(a^x)\ln a\cdot(6t\,dt^2) - a^x\ln^2 a(a^x\sin a^{x} - \cos a^{x})\cdot(9t^4dt^2)$$
$$= 3t\ln a\,a^{t^3}[2\cos a^{t^3} + 3t^3\ln a\cos a^{t^3} - 3t^3a^{t^3}\ln a\sin a^{t^3}]dt^2.$$

§5. 中值定理

(1) 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

436. 设 $f(x)=\ln x$, 试在 $[1, e]$ 求适合拉格朗日中值定理的 ξ 值.

[解] 很明显 $f(x)=\ln x$ 在 $[1, e]$ 上连续, 在 $(1, e)$ 内可导, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $f(x)=\ln x$ 满足拉格朗日定理条件.

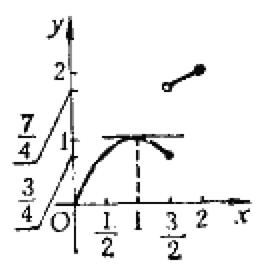
∴ 存在 $\xi\in(1, e)$, 使 $\ln e-\ln 1=\frac{1}{\xi}\cdot(e-1)$.

于是
$$\xi=\frac{e-1}{\ln e}=e-1.$$

437. 试找出罗尔定理三个条件均不满足却满足罗尔定理结论的函数.

[解] 按题意只要找在区间 $(a、b)$ 内的间断函数, 同时在 a、b 处函数值不等, 但存在平行于 x 轴的切线. 为此, 作函数

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 1.5,\\ \frac{1}{2}x+1, & 1.5<x\leqslant 2.\end{cases}$$



在 $[0, 2]$ 上不满足罗尔定理三个条件, 但存在 $\xi=1$, 使 $f'(\xi)=0$.

[说明] 本题说明罗尔定理的三个条件仅仅是充分的.

438. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 $f(x)=x^2$、$g(x)=x^3$ 是否满足柯西中值定理.

[解] 虽然 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上均连续, 且在 $(-1, 1)$ 内可导, 但是柯西定理还要求 $g'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不为零. 事实上, $g'(x)=2x^2$, 当 $x=0$ 时, $g'(0)=0$. 因此函数不满足柯西定理的条件. 由直接验证知道,

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=\frac{1-1}{1-(-1)}=0.$$

但是在区间$(-1, 1)$内，不存在ξ，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=0$.

439. 求证：

$$\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{4}=\frac{1}{24}.$$

［证］ 设$f(x)=\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{4}$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin^7 x\cdot\cos x+\cos^7 x\cdot\sin x-2\sin^5 x\cdot\cos x\\&\quad-\cos^5 x\cdot\sin x+\sin^3 x\cdot\cos x\\&=\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin^4 x+\cos^4 x)\\&\quad+\sin^3 x\cdot\cos x\cdot(1-\sin^2 x)\\&=\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\&\quad-\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin^4 x+\cos^4 x)+\sin^3 x\cdot\cos^3 x\\&=\sin x\cdot\cos x\cdot(-\sin^2 x\cdot\cos^2 x)+\sin^3 x\cdot\cos^3 x=0.\end{aligned}$$

∵ $f(x)$ 在 R 上连续，∴ 由微分中值定理得$f(x)\equiv C$，$x\in R$.

取$x=0$，得$f(0)=0-\frac{1}{8}-0+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{24}$.

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{24}.$$

440. 已知：方程$x^3-3x+c=0$，求证：方程在$(0, 1)$内不可能有两个实根.

［证］ 用反证法：设$f(x)=x^3-3x+c$. 假设$f(x)=0$在$(0, 1)$内存在两个不相等的实根x_1、x_2，即有$f(x_1)=f(x_2)$.

则由罗尔定理，必有$\xi\in(x_1, x_2)$，使得$f'(\xi)=0$. 事实上$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)<0$ $x\in(0, 1)$，与罗尔定理矛盾.

∴ 方程在$(0, 1)$内不可能有两个不相等的实根.

下面证明方程在$(0, 1)$内也不可能有重根. 因为α若是方程$f(x)=0$的两重根，则α必是$f(x)=0$与$f'(x)=0$的公共解，显然$f'(x)=0$在$(0, 1)$内无解，故方程不可能有重根.

由此可以推得方程$x^3-3x+c=0$在$(0, 1)$内不可能有两个实根.

［说明］ 在讨论方程不可能有两个不相等实根之后，还需注意研究不可能有重根的情况，这样才能保证方程 $f(x)=0$ 不可能有两个实根.

441. 如果方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$. 证明：方程 $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

［证］ 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$. 则

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

显然 $f(0)=0$, 同时又有 $f(x_0)=0$. 由罗尔定理：必存在 $\xi\in(0,\ x_0)$，满足 $f'(\xi)=0\ \ (0<\xi<x_0)$. 即

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

有一个小于 x_0 的正根.

442. 如果 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$, $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ 是常数，求证：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,\ 1)$ 内至少有一个实根.

［证］ 设 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

则 $f(0)=0$,　　$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$.

$$f'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使 $f'(\xi)=0$. 即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,\ 1)$ 内至少有一个实根.

443. 若 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$, 求证：

$$\arcsin\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}-x.$$

［证］ 设 $f(x)=x+\arcsin\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\cdot\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}=1+\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}}$$

$\because\quad x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin x>\cos x$. $\quad\therefore\quad f'(x)=1+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}=0$.

于是 $f(x)=C$.

取 $x_0=\frac{\pi}{2}$, $\quad C=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

$$\therefore\quad x+\arcsin\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4},$$

即
$$\arcsin\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}-x.$$

444. 求证:

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=[x]\ (x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

［证］ 设 $y=\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)-[x]$.

那末 $x\in(k,\ k+1)$ (其中 k 为任一整数), $[x]\equiv k$, $\therefore([x])'=0$.

$$y'(x)=1-\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{(2x-1)\pi}{2}}\cdot\pi-0$$

$$=1-\frac{1}{\sec^2\frac{(2x-1)\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{(2x-1)\pi}{2}}=1-1=0.$$

由此可得 $f(x)=C$, $x\in(k,\ k+1)$. 取

$$x=k+\frac{1}{2},\quad C=f\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{2k}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2k}{2}\pi\right)-k=0.$$

由 k 的任意性

$$\therefore\quad\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=[x].$$

445. 求证: $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}x\quad(x\neq 0)$.

［证］ 令 $F(x)=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)$.

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0.$$

$\because$ 在 $x>0$ 时，$F(x)=C_1$；在 $x<0$ 时，$F(x)=C_2$。取 $x_0=1$，则得 $F(1)=C_1=\frac{\pi}{2}$；取 $x_0=-1$，则得 $F(-1)=C_2=-\frac{\pi}{2}$。

$$\therefore\quad \operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\quad (x\neq 0).$$

[说明] 若 $(a,\ b)$ 内 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)=C\ \ x\in(a,\ b)$。本题是函数分别在 $(0,\ +\infty)$ 内和在 $(-\infty,\ 0)$ 内分别有 $f'(x)=0$. 而在 $x=0$ 处不可导，所以函数分别在两个区间内等于常数，但要注意这两个常数一般是不相等的，所以在使用性质时要注意 $f'(x)=0$ 成立的区间范围。

446. 证明恒等式：

$$2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x\quad (|x|\geqslant 1).$$

[证] 令 $f(x)=2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}.$$

$\because |x|\geqslant 1$，$\therefore |1-x^2|=x^2-1$，得 $f'(x)=0\,(|x|>1)$.

于是当 $|x|>1$ 时，恒有：

$$2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}C_1, & x>1,\\ C_2, & x<-1.\end{cases}$$

令 $x=\sqrt{3}$，　$C_1=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}+\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{1+3}=\pi$.

令 $x=-\sqrt{3}$，$C_2=2\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\arcsin\frac{-2\sqrt{3}}{1+3}=-\pi$.

又 $x=1$，　$f(1)=2\operatorname{arc\,tg} 1+\arcsin\frac{2}{2}=\pi$.

$x=-1$，　$f(-1)=2\operatorname{arc\,tg}(-1)+\arcsin\left(-\frac{2}{2}\right)=-\pi$.

综上所述：

$$2\operatorname{arc\,tg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x\quad (|x|\geqslant 1).$$

447. 求证：

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\right)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}^3\alpha)=0.$$

［证］ 设 $f(\alpha)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\right)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}^3\alpha)$.

$$f'(\alpha)=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2\alpha}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sec^2 2\alpha+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot(-\csc^2\alpha)$$

$$+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^6\alpha}\cdot 3\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot(-\csc^2\alpha)$$

$$=\frac{4}{1+3\cos^2 2\alpha}-1-\frac{3}{1+\operatorname{ctg}^6\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$$

$$=\frac{4}{1+3\cos^2 2\alpha}-1-\frac{3}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$=\frac{4-1-3\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha}{1+3\cos^2 2\alpha}=0.$$

而 $\alpha=k\pi,\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 是函数 $f(\alpha)$ 的间断点。

∴ $f(x)$ 分别在

$$\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{4}\right)、\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)、\left(k\pi+\frac{3\pi}{4},\ (k+1)\pi\right)$$

内是常数，但这些常数可能不相等．分别在这些区间内取点 $k\pi+\frac{\pi}{6}$; $k\pi+\frac{\pi}{2}$; $k\pi+\frac{5\pi}{6}$.

得 $$f\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)=f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=0.$$

由 k 为任意整数，所以在上述各区间内有

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\right)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}^3\alpha)=0.$$

448. **求所有实数对 $(a,\ b)$ 的集合，使对于任意实数 x，下列等式恒成立：**

$$a\cos x-\cos(ax+b^2)=a-1-b^2 \qquad \cdots①$$

［**分析**］ 设 $f(x)=a\cos x-\cos(ax+b^2)$，由微分中值定理可知，使得 $f(x)=a-1-b^2$ 成立的条件有二：在 R 上 $f'(x)\equiv0$ 以及在 R 上存在某一

点使该点的函数值等于 $a-1-b^2$.

［证］ 设 $f(x)=a\cos x-\cos(ax+b^2)$.

$$f'(x)=-a\sin x+a\sin(ax+b^2)$$
$$=2a\sin\frac{ax+b^2-x}{2}\cos\frac{ax+b^2+x}{2}.$$

要求 $f(x)\equiv a-1-b^2$, 则必须 $f'(x)=0$, 得 $a=0$, 或

$$\sin\frac{ax+b^2-x}{2}=0,\quad 或\quad \cos\frac{ax+b^2+x}{2}=0.$$

(1) $a=0$. 由①式得: $-\cos b^2=-1-b^2$, $\cos b^2=1+b^2$, $\therefore b=0$. 即实数对为 $(0, 0)$ 时等式成立.

(2) $\sin\frac{ax+b^2-x}{2}=0$. $\therefore \frac{(a-1)x+b^2}{2}=k\pi$, $(a-1)x=2k\pi-b^2$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$). 要求上式对一切 x 成立, 则须 $a=1$, $b^2=2k\pi$. 再由①式有: $\cos x-\cos(x+2k\pi)=-2k\pi$, 解三角方程得 $2k\pi=0$, $\therefore k=0$, 得实数对为 $(1, 0)$.

(3) $\cos\frac{ax+b^2+x}{2}=0$. $\frac{(a+1)x+b^2}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $(a+1)x+b^2=(2k+1)\pi$. 要求对一切 x 满足, 只有 $a=-1$, $b^2=(2k+1)\pi$, 再由①式:

$$-\cos x-\cos[-x+(2k+1)\pi]=-1-1-(2k+1)\pi,$$

$$\cos x-\cos x=(2k+1)\pi+2,\ (2k+1)\pi=-2,\ \pi=-\frac{2}{2k+1}.$$

这样的 k 不存在, 即 b 无解.

$\therefore$ 由上述讨论得, 使等式恒成立的 a、b 所取实数对为: $(0, 0)$、$(1, 0)$.

449. a、b 取怎样的实数对时, 等式 $ae^x+b=e^{ax+b}$ 对一切实数 x 成立.

［分析］ 设 $f(x)=a\cdot e^x+b$; $g(x)=e^{ax+b}$. 要使两函数相等, 必须 $f'(x)\equiv g'(x)$, 且存在某一点 x_0, 使 $f(x_0)=g(x_0)$.

［解］ 设 $f(x)=a\cdot e^x+b$; $g(x)=e^{ax+b}$.

$f'(x)=a\cdot e^x$; $g'(x)=a\cdot e^{ax+b}$. 由 $f'(x)=g'(x)$ 即 $a\cdot e^x=a\cdot e^{ax+b}$.

得 $a=0$ 或 $e^x=e^{ax+b}$. (1) 若 $a=0$, 再由 $a\cdot e^x+b=e^{ax+b}$ 得 $b=e^b$, 无解.

(2) $e^x=e^{ax+b}$, 即 $x=ax+b$, $(1-a)x=b$. 要求该式对一切 x 均满足,

则 $a=1,\ b=0$.

$\therefore$ 当 $(a,\ b)$ 取 $(1,\ 0)$ 时，$ae^x+b=e^{ax+b}$ 对一切实数 x 成立.

450. 若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 可导，且 $ab>0$. 求证：

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)\text{，其中 } a<\xi<b.$$

［证］ 设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$； $G(x)=\dfrac{1}{x}$.

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2};\quad G'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

$ab>0$,

$$\therefore\quad \frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}.$$

由于 F、G 满足柯西定理，则 $(a,\ b)$ 内存在 ξ，使

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

即
$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

451. 若函数 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k.$$

［证］ 由于 $f(x)$ 满足拉格朗日定理条件，所以任取 x，在 $(x,\ x+1)$ 内必存在 ξ_x，使 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi_x)$. 当 $x\to+\infty$，必有 $\xi_x\to+\infty$，

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi_x)=k.$$

452. 如果函数在 $(a,\ +\infty)$ 内可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

［证］ 在 $(a,\ +\infty)$ 内取 $x_0>0$，由拉格朗日中值定理，$(x_0,\ x)$ 内至少存在 ξ_x 使得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi_x)\cdot(x-x_0)$.

$$|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi_x)|\cdot|x-x_0|\leqslant M\cdot(x-x_0)<Mx,$$

$$|f(x)|-|f(x_0)|<|f(x)-f(x_0)|<Mx,$$

$$\therefore\quad |f(x)|<Mx+|f(x_0)|.$$

$$\therefore\quad 0\leqslant\frac{|f(x)|}{x^2}<\frac{M}{x}+\frac{|f(x_0)|}{x^2}.$$

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{M}{x}+\frac{f(x_0)}{x^2}=0,\quad\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{x^2}=0.$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

453. 求证：$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$，其中 $0<b\leqslant a$.

［证］ 令 $f(x)=\ln x$，由拉格朗日中值定理，则存在 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\quad 即\quad \ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}\cdot(a-b).$$

$$\because\quad 0<\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{\xi}\leqslant\frac{1}{b}.$$

又 $\frac{1}{a}(a-b)\leqslant\frac{1}{\xi}(a-b)\leqslant\frac{1}{b}(a-b)$，　$\therefore$　$\frac{a-b}{a}\leqslant\ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$.

454. 求证：$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\leqslant\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$，其中 $0<\beta\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

［证］ 令 $f(x)=\operatorname{tg}x$，由拉格朗日中值定理，必存在 $\xi\in(\beta,\alpha)$，使 $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\sec^2\xi\cdot(\alpha-\beta)$. 由 $\sec^2 x$ 在$[\beta,\alpha]$上单调增加，

$$\therefore\quad \sec^2\beta\cdot(\alpha-\beta)\leqslant\sec^2\xi\cdot(\alpha-\beta)\leqslant\sec^2\alpha\cdot(\alpha-\beta),$$

即
$$\sec^2\beta(\alpha-\beta)\leqslant\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\leqslant\sec^2\alpha(\alpha-\beta).$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\leqslant\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

455. 求证：$|\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|\leqslant|a-b|$.

［证］ 将拉格朗日中值应用于 $y=\operatorname{arc\,tg}x$，则在$(a,b)$内存在 ξ，使

$$\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b).$$

即
$$|\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|,$$

$$\therefore \quad |\operatorname{arc\,tg} a-\operatorname{arc\,tg} b|\leqslant|a-b|.$$

456. 若$f(x)$、$g(x)$都可导，且当$x\geqslant a$时，$|f'(x)|\leqslant g'(x)$，求证：当$x\geqslant a$时，$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)$.

［证］ 设$F(x)=g(x)-f(x)$，由微分中值定理：

$$F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a), \quad a<\xi<x.$$

$\because$ $x\geqslant a$时$|f'(x)|\leqslant g'(x)$，于是$F'(\xi)=g'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0$. $\therefore$ $F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a)\geqslant 0$，即$g(x)-f(x)-[g(a)-f(a)]\geqslant 0$,

$$f(x)-f(a)\leqslant g(x)-g(a).$$

同理令$G(x)=g(x)+f(x)$，由微分中值定理：

$$G(x)-G(a)=G'(\eta)(x-a), \quad a<\eta<x.$$

$\because$ $x\geqslant a$时$|f'(x)|\leqslant g'(x)$，$\therefore$ $f'(x)+g'(x)\geqslant 0$，于是$G'(\eta)=g'(\eta)+f'(\eta)\geqslant 0$.

$$\therefore \quad G(x)-G(a)=G'(\eta)(x-a)\geqslant 0,$$

即
$$g(x)+f(x)-[g(a)+f(a)]\geqslant 0,$$
$$g(x)-g(a)\geqslant -[f(x)-f(a)].$$

综上所述，得$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)$.

457. 证明下列不等式：(1) $x^{\alpha}-1\geqslant\alpha(x-1)$ 当$\alpha>2$, $x\geqslant 1$; (2) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{x-a}$ 当$n>1$, $x\geqslant a>0$.

［证］ (1) 设$f(x)=\alpha(x-1)$; $g(x)=x^{\alpha}-1$. $\because$ $f'(x)=\alpha$, $g'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$，显然当$x\geqslant 1$时有$|f'(x)|\leqslant g'(x)$. 由上题结论有$|f(x)-f(1)|\leqslant g(x)-g(1)$，即$|\alpha(x-1)-0|\leqslant(x^{\alpha}-1)-0$，得$\alpha(x-1)\leqslant x^{\alpha}-1$.

(2) 设 $f(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$; $g(x)=\sqrt[n]{x-a}$.

$\because$ $f'(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{n}(x-a)^{\frac{1-n}{n}}$，又$n>1$, $x\geqslant a>0$ $\because$ $x>x-a>0$, $\therefore$ $\left|x^{\frac{1}{n}-1}\right|\leqslant(x-a)^{\frac{1}{n}-1}$. 显然有$|f'(x)|\leqslant g'(x)$. 由上题结论有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

即
$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{x-a}.$$

458. 设非线性函数$f(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)内可导，求证(a, b)内至少存在ξ，满足$|f'(\xi)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

［证］ 设 $g(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$,

由于 $f(x)$ 是非线性函数, $\therefore g(x)\neq 0$. 于是在 (a, b) 内存在 c 点, 使 $g(c)\neq 0$. 由拉格朗日中值定理, 在 (c, b) 内有 ξ_1 使

$$\frac{g(c)-g(b)}{c-b}=g'(\xi_1),$$

即

$$\frac{g(c)-g(b)}{c-b}=f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

在 (a, c) 内有 ξ_2 使

$$\frac{g(a)-g(c)}{a-c}=g'(\xi_2),$$

即

$$\frac{g(a)-g(c)}{a-c}=f'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由于 $g(a)=g(b)=0$,

$$\therefore\quad \frac{g(c)-g(b)}{c-b}\cdot\frac{g(a)-g(c)}{a-c}=\frac{-g^2(c)}{(c-b)(a-c)}<0.$$

$$\therefore\quad \left[f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\cdot\left[f'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]<0.$$

即 $\left[f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$ 与 $\left[f'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$

异号, 故总存在 ξ, 使得当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ 时, 有 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$, 得 $|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$. 当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时, 有 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$,

得

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

$\therefore$ 结论成立.

459. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 求证在 (a, b) 内至少存在一点 c, 使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

［证］ 若 $f(x)=$ 常数, 结论显然成立. 由条件 $f'(a)=f'(b)=0$, 推得函数 $f(x)$ 不可能为线性函数.

在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 上，取 $g(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2$，根据柯西中值定理，有

$$\frac{8\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a},\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2};$$

在 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 上，取 $g(x)=\frac{1}{2}(b-x)^2$，根据柯西中值定理，有

$$\frac{8\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2},\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

两式相加，得 $$\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}.$$

由 $f'(b)=f'(a)=0$，上式右端可以写成

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}-\frac{f'(b)-f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=f''(\eta_1)-f''(\eta_2).$$

其中 $a<\eta_1<\xi_1$，$\xi_2<\eta_2<b$. 于是

$$\left|\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}\right|=|f''(\eta_1)-f''(\eta_2)|\leqslant|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|$$

（i）若 $f(a)=f(b)$，则在 (a, b) 内任取一点 c，就有结论 $|f''(c)|\geqslant 0$.

（ii）若 $f(a)\neq f(b)$，由上式可见 $|f''(\eta_1)|$、$|f''(\eta_2)|$ 中至少有一项不等于零. 取 $|f''(c)|=\max\{f''(\eta_1)、f''(\eta_2)\}$. 即有

$$|2f''(c)|\geqslant|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|\geqslant\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2},$$

由此可得 $$|f''(c)|\geqslant\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

460. **若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，对任意 x，均有 $|f'(x)|\leqslant k<1$. 求证：函数 $f(x)$ 总存在 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.**

［证］ (i) 若 $f(0)=0$，则命题已成立. 若 $k=0$，则 $f'(x)\equiv 0$，所以 $f(x)\equiv c$，取 $\xi=c$，就满足 $f(\xi)=\xi$.

(ii) 若 $f(0)\neq 0$，$k\neq 0$. 不妨考虑 $f(0)>0$，$x>0$ 时的情况. 设 $F(x)=f(x)-x$. 于是问题化为求 ξ 值，使 $F(\xi)=0$. 显然

$$F(0)=f(0)-0=f(0)>0 \qquad \cdots①$$

又由中值定理，$f(x)=f(0)+f'(\xi)\cdot x$，$0<\xi<x$；及 $|f'(x)|\leqslant k<1$，取 $x_0=\frac{f(0)}{1-k}+1>0$，于是

$$f(x_0)=f(0)+f'(\xi)\cdot x_0\leqslant f(0)+kx_0=f(0)+k\left(\frac{f(0)}{1-k}+1\right)$$
$$=\frac{f(0)}{1-k}+k<\frac{f(0)}{1-k}+1=x_0,$$

于是 $f(x_0)<x_0$，即

$$F(x_0)<0 \quad \cdots②$$

对于 $F(x)=f(x)-x$，根据连续函数的介值定理，由①、②可知必存在 $\xi\in(0,\ x_0)$，有 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

(2) 泰勒公式

461. 将 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ 展开成关于 $(x-4)$ 的多项式.

[分析] 多项式 $P(x)$ 展开成关于 $(x-a)$ 的多项式，事实上是 $P(x)$ 在 $x=a$ 点的泰勒展开. 因为 n 次多项式的 $n+1$ 阶以上导数均为零，因此必能展开成关于 $(x-a)$ 的 n 阶多项式.

[解] 设 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$，有 $f(4)=-56$，$f'(4)=21$，$f''(4)=74$，$f'''(4)=66$，$f^{(4)}(4)=24$，$f^{(n)}(4)=0\ \ (n>4)$.

∴ 按泰勒展开的唯一性得：

$$f(x)=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}(x-4)^4$$
$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.$$

462. 将 $x^{10}-3x^5+1$ 展开成关于 $(x-1)$ 的多项式.

[解] 与上题同样方法：设 $f(x)=x^{10}-3x^5+1$，有 $f(1)=-1$，$f'(1)=-5$，$f''(1)=30$，$f'''(1)=540$，$f^{(4)}(1)=4680$，$f^{(5)}(1)=29880$，$f^{(6)}(1)=\frac{10!}{4!}$，$f^{(7)}(1)=\frac{10!}{3!}$，$f^{(8)}(1)=\frac{10!}{2!}$，$f^{(9)}(1)=10!$，$f^{(n)}(1)=0\ (n>10)$.

$$\therefore\ f(x)=-1-5(x-1)+15(x-1)^2+90(x-1)^3+195(x-1)^4+249(x-1)^5+210(x-1)^6+120(x-1)^7+45(x-1)^8+10(x-1)^9+(x-1)^{10}.$$

463. 设 $f(x)$ 是 4 次多项式. 已知：$f(2)=-1$，$f'(2)=0$，$f''(2)=2$，$f'''(2)=-12$，$f^{(4)}(2)=24$. 计算：$f(-1)$，$f'(0)$，

$f''(1)$.

[解] 由于 $f(x)$ 是 4 次多项式，故 $f^{(n)}(x)=0\ (n>4)$，所以

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$
$$+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$
$$=-1+(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4,$$
$$f'(x)=2(x-2)-6(x-2)^2+4(x-2)^3,$$
$$f''(x)=2-12(x-2)+12(x-2)^2.$$
$$\therefore\quad f(-1)=-1+9+54+81=143,$$
$$f'(0)=-4-24-32=-60,\quad f''(1)=2+12+12=26.$$

464. 写出 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 点处的三阶泰勒展开式.

[解] $f(4)=2$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4)=\dfrac{1}{4}$; $f''(x)=-\dfrac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$, $f''(4)=-\dfrac{1}{32}$; $f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(4)=\dfrac{3}{256}$.

由泰勒公式得

$$\sqrt{x}=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$
$$+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+o((x-4)^3)$$
$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3+o((x-4)^3).$$

465. 写出 $f(x)=e^{-x}$ 在 $x=a$ 点处的泰勒展开式.

[解] $f(a)=e^{-a}$, $f'(x)=-e^{-x}$, $f'(a)=-e^{-a}$; …,
$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot e^{-x}$, $f^{(n)}(a)=(-1)^n\cdot e^{-a}$.

由泰勒公式得

$$e^{-x}=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+o((x-a)^n)$$
$$=e^{-a}-\frac{e^{-a}}{1!}(x-a)+\frac{e^{-a}}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{e^{-a}}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

若 $a=0$ 时，即有 $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

466. **写出 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在 $x_0=0$ 处的 $2n$ 阶泰勒展开式.**

［解］ 由上题 $x_0=0$ 情况的展开式

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}).$$

$$\therefore\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}).$$

或写为带有拉格朗日余项 $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot f^{(2n+1)}(\theta x)\quad(0<\theta<1)$ 的展开式:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}.$$

467. **写出 $y=\sin^2x$ 在 $x_0=0$ 处的 $2n$ 阶泰勒展开式.**

［分析］ 求 $\sin^2x$ 的 $2n$ 阶导数，一般先将三角函数降次，则可减少运算量.

［解］ $y=\frac{1-\cos 2x}{2}$，$y^{(n)}=2^{n-1}\cdot\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$ $(n\geqslant1)$. $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-2^3$, $\cdots$.

$$\therefore\quad \sin^2x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot x^{2n}+o(x^{2n}).$$

或写为带有拉格朗日余项的展开式

$$\sin^2x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\frac{(-1)^n2^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin 2\theta x,\ (0<\theta<1).$$

468. **写出 $y=e^{\sin x}$ 在 $x=0$ 点处的三阶泰勒展开式.**

［分析］ 若按泰勒公式求 $e^{\sin x}$ 在 $x=0$ 点的导数，则求导过程较复杂. $e^{\sin x}$ 是 $y=e^u$, $u=\sin x$ 两个函数复合而成，因此考虑将 $u=\sin x$ 的泰勒

展开式代入 $y=e^u$ 的泰勒展开式. 一般称这类展开方法为间接展开.

[解] $e^{\sin x}=1+\frac{1}{1!}\sin x+\frac{1}{2!}\sin^2 x+\frac{1}{3!}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

而 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)$, 代入上式得

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3\right)^3+o(x^3)$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^3).$$

469. 写出 $y=e^{2x-x^2}$ 在 $x_0=0$ 点处的五阶泰勒展开式.

[解] $e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^5}{5!}+o(u^5)$.

而 $u=2x-x^2$, 注意到 $o((2x-x^2)^5)$ 是 $o(x^5)$,

$$\therefore\quad e^{2x-x^2}=1+\frac{(2x-x^2)}{1!}+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\frac{1}{3!}(2x-x^2)^3$$

$$+\frac{1}{4!}(2x-x^2)^4+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o((2x-x^2)^5)$$

$$=1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(4x^2-4x^3+x^4)$$

$$+\frac{1}{3!}(8x^3-3\cdot4x^2\cdot x^2+3\cdot2x\cdot x^4)$$

$$+\frac{1}{4!}(16x^4-4\cdot8x^3\cdot x^2)+\frac{1}{5!}(32x^5)+o(x^5)$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

470. 写出 $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 在 $x=0$ 点处的泰勒展开式,到含 x^3 的项.

[解] 由 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

$$\therefore\quad \sqrt{1-2x+x^3}=[1-(2x-x^3)]^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(2x-x^3)$$

$$-\frac{1}{8}(2x-x^3)^2-\frac{1}{16}(2x-x^3)^3+o(x^3).$$

$$\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1-(3x-x^2)]^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}(3x-x^2)$$

$$-\frac{1}{9}(3x-x^2)^2-\frac{5}{81}(3x-x^2)^3+o(x^3).$$

经整理得

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

$$=\frac{1}{3}(3x-x^2)+\frac{1}{9}(3x-x^2)^2+\frac{5}{81}(3x-x^2)^3$$

$$-\frac{1}{2}(2x-x^3)-\frac{1}{8}(2x-x^3)^2-\frac{1}{16}(2x-x^3)^3+o(x^3)$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

471. 写出 $\sqrt{\sin x^2}$ 在 $x=0$ 点处的泰勒展开，到含 x^9 的项.

［解］ 已知 $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}+o(u^5)$.

而 $u=x^2$，得

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+o(x^{10}),$$

则 $\sqrt{\sin x^2}=\left[x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+o(x^{10})\right]^{\frac{1}{2}}=x\left[1+\left(\frac{x^8}{120}-\frac{x^4}{6}+o(x^8)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$

又知 $$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot t^2+o(t^2).$$

$$\therefore\quad \sqrt{\sin x^2}=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^8}{120}-\frac{x^4}{6}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^8}{120}-\frac{x^4}{6}\right)^2+o(x^8)\right]$$

$$=x\left[1+\left(\frac{x^8}{240}-\frac{x^4}{12}\right)-\frac{x^8}{288}+o(x^8)\right]$$

$$=x-\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{1440}x^9+o(x^9).$$

472. 已知 $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$. 找出 $f(x)$ 关于二项式 $(x-1)$ 的幂展开式的前 3 项，并且求 $f(1.005)$ 的近似值.

［解］ $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$, $f(1)=1$; $f'(x)=80x^{79}-40x^{39}+20x^{19}$, $f'(1)=60$; $f''(x)=80\cdot79\cdot x^{78}-40\cdot39\cdot x^{38}+20\cdot19\cdot x^{18}$, $f''(1)=5140$.

$$\therefore\quad f(x)=1+60(x-1)+2570(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

$$f(1.005)\approx1+60\times0.005+2570\times0.005^2=1.3643.$$

473. 验证当角度小于 28° 时，用 $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ 表示 $\sin x$，绝对误差小于 10^{-6}. 并计算 $\sin 20°$（精确到 10^{-6}）.

［证］ $\sin x$ 在 $x_0=0$ 的带有拉格朗日余项的泰勒展开式是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\sin\left(\theta x+\frac{7}{2}\pi\right).$$

$\because 28°=\frac{7}{45}\pi$，当 $0<x<\frac{7}{45}\pi$ 时，则：

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{x^7}{7!}\sin\theta x\right|\leqslant\frac{x^7}{7!}=\frac{7^8\cdot\pi^8}{7!45^8}=0.645\times10^{-6}<10^{-6}.$$

$\therefore$ 误差小于 10^{-6}.

$$\sin 20°=\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{\pi^3}{3!\cdot9^3}+\frac{\pi^5}{5!\cdot9^5},$$

$$\therefore\quad \sin 20°\approx0.342020.$$

474. 计算 $e^{\frac{1}{5}}$ 的近似值（精确到 10^{-9}）.

［分析］ 因为 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}\quad(0<\theta<1)$，当 $x=\frac{1}{5}$ 时，按题意，要求 $\left|\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}\right|\leqslant\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{0.2}<10^{-9}$.

［解］ $e^{\frac{1}{5}}\approx1+\frac{0.2}{1!}+\frac{0.2^2}{2!}+\cdots+\frac{0.2^n}{n!}$.

要使精确到 10^{-9}，即要求

$$\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{0.2}<10^{-9},\quad 5^{n+1}\cdot(n+1)!>10^9\cdot e^{0.2}>10^9.$$

当 $n=7$ 时，$5^8\cdot8!>1.5\times10^{10}>10^9$.

$$\therefore\quad e^{\frac{1}{5}}\approx1+\frac{0.2}{1!}+\frac{0.2^2}{2!}+\frac{0.2^3}{3!}+\frac{0.2^4}{4!}+\frac{0.2^5}{5!}+\frac{0.2^6}{6!}+\frac{0.2^7}{7!}.$$

$$\therefore\quad e^{\frac{1}{5}}\approx1.221402758.$$

［说明］ $5^8\cdot8!=5^8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=5^9\cdot2^7\cdot63>5^9\times2^7\times60$

$$>1.5\times5^{10}\times2^{10}=1.5\times10^{10}.$$

475. 求证：$\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot(-1)^{k-1}\cdot k^n=(-1)^{n+1}\cdot n!$.

［证］ 已知：$\lim\limits_{x\to0}[e^{kx}]^{(n)}=\lim\limits_{x\to0}k^n\cdot e^{kx}=k^n$.

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k k^n=-\lim_{x\to0}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot e^{kx}\right)^{(n)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^ke^{kx}+1\right)^{(n)}=-\lim_{x\to0}[(1-e^x)^n]^{(n)}.$$

将 e^x 泰勒展开，

$$原式=-\lim_{x\to0}\left[\left(1-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\cdots\right)^n\right]^{(n)}$$

$$=-\lim_{x\to0}(-1)^n\cdot\left[\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n\right]^{(n)}.$$

将 $\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n$ 展开，按 x 升幂排列：

$$-\lim_{x\to0}(-1)^n\left[\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n\right]^{(n)}$$

$$=(-1)^{n+1}\lim_{x\to0}\left[x^n+\frac{nx^{n+1}}{2!}+\cdots\right]^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot n!.$$

476．证明：如果函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的邻域内是偶函数(或奇函数)，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在 n 阶导数，则 $f(x)$ 的在 $x=0$ 处泰勒展开式只含有 x 的偶次幂(或奇次幂)的项.

［证］ 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的邻域内是偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，$x\in(-\delta,\delta)$. ∴ 由泰勒展开式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

$$+\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k}).$$

$$f(-x)=f(0)+f'(0)\cdot(-x)+\frac{f''(0)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}(-x)^{2k-1}+\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}(-x)^{2k}+o((-x)^{2k});$$

$$f(x)+f(-x)=2f(x)=2\cdot\left[f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}\right]$$

$$+o(x^{2k}),$$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k})\quad(2k\leqslant n).$$

477. 已知函数 $y=f(x)$，如果 $f'''(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $f'''(a)\neq 0$. $y=f(x)$ 的一阶泰勒展开式为：

$$f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(a+\theta h),$$

其中 $\frac{h^2}{2}\cdot f''(a+\theta h)$ 为拉格朗日余项．求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$.

［证］ $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta_1 h)$，$(0<\theta_1<1)$，又可以将 $f(x+h)$ 展开为

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_2 h),\quad (0<\theta_2<1).$$

两式相减得

$$\frac{h^2}{2!}[f''(a+\theta_1 h)-f''(a)]=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_2 h),$$

$$\frac{\theta_1\cdot[f''(a+\theta_1 h)-f''(a)]}{\theta_1 h}=\frac{2}{3!}\cdot f'''(a+\theta_2 h).$$

根据拉格朗日中值定理，有

$$f''(a+\theta_1 h)-f''(a)=f'''(a+\theta_0\theta_1 h)\cdot\theta_1 h\quad (0<\theta_0<1).$$

于是有
$$\theta_1 f'''(a+\theta_0\theta_1 h)=\frac{2}{3!}f'''(a+\theta_2 h)$$

由函数 $f(x)$ 的三阶导数连续，在上式两端令 $h\to 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{3!}f'''(a+\theta_2 h)=\frac{1}{3}f'''(a)$$

和
$$\lim_{h\to 0}\theta_1 f'''(a+\theta_0\theta_1 h)=\theta_1 f'''(a),$$

左边和右边应相等，于是有 $\theta_1=\frac{1}{3}$.

478. 已知：多项式 $f(x)$ 可以被 $(h(x))^k$ 整除，求证：$f'(x)$ 一定能被 $(h(x))^{k-1}$ 整除.

［证］ 由假定 $f(x)=(h(x))^k\cdot g(x)$，$g(x)$、$h(x)$ 为多项式，故必可导．对等式两边求导：

$$\begin{aligned}f'(x)&=k(h(x))^{k-1}\cdot h'(x)\cdot g(x)+(h(x))^k\cdot g'(x)\\&=(h(x))^{k-1}\cdot[k\cdot h'(x)\cdot g(x)+h(x)\cdot g'(x)].\end{aligned}$$

$h'(x)$、$g'(x)$ 是多项式，由上式可见，$f'(x)$ 必有因子 $(h(x))^{k-1}$，$\therefore f'(x)$

一定能被$(h(x))^{k-1}$整除.

479. 设函数$f(x)$是n次多项式，证明α是$f(x)=0$的k重根$(k\leqslant n)$的必要充分条件是：$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0$，而$f^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

[证] 必要性：若α是$f(x)=0$的k重根，$f(x)=(x-\alpha)^k\cdot Q(x)$. 已知：

$$[(x-\alpha)^k]^{(s)}=\frac{k!}{(k-s)!}(x-\alpha)^{k-s}.$$

由莱布尼茨公式

$$[f(x)]^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}C_s^i[(x-\alpha)^k]^{(s-i)}\cdot Q(x)^{(i)}\quad (s=0,1,2,\cdots,k-1).$$

$$\therefore\quad [f(x)]^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}C_s^i\frac{k!}{(k-s+i)!}(x-\alpha)^{k-s+i}\cdot Q(x)^{(i)}$$

$$=(x-\alpha)^{k-s}\cdot\sum_{i=0}^{s}C_s^i\frac{k!}{(k-s+i)!}(x-\alpha)^i\cdot Q(x)^{(i)}.$$

$$\therefore\quad [f(\alpha)]^{(s)}=0\quad (s=0,1,2,\cdots,k-1).$$

充分性：由泰勒展开式，因$f(x)$的$n+1$阶以上导数均为零，则

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

$$+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(x-\alpha)^{k+1}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$$=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(x-\alpha)^{k+1}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

$$\therefore\quad f(x)=(x-\alpha)^k\cdot\left[\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^{n-k}\right].$$

即多项式$f(x)$有$(x-\alpha)^k$因子，即α是$f(x)=0$的k重根.

480. 讨论当$x\to 0$时，$y=\ln(1+\sin^2 x)+\alpha(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)$是多少阶无穷小量？

[解] 因为$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$，将$t=\sin^2 x$代入，得

$$\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x+o(\sin^4 x),$$

再由
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$
所以
$$\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

又因为
$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + o(t^2),$$
将 $t=1-\cos x$ 代入,得
$$\sqrt[3]{2-\cos x} = [1+(1-\cos x)]^{\frac{1}{3}}$$
$$= 1 + \frac{1}{3}(1-\cos x) - \frac{1}{9}(1-\cos x)^2 + o((1-\cos x)^2),$$
而
$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
所以
$$\sqrt[3]{2-\cos x} - 1 = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

最后,得
$$y = \ln(1+\sin^2 x) + \alpha(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1)$$
$$= \left(1+\frac{\alpha}{6}\right)x^2 - \left(\frac{5}{6} + \frac{\alpha}{24}\right)x^4 + o(x^4).$$

可见,当 $\alpha \neq -6$ 时,y 是 2 阶无穷小量. 当 $\alpha = -6$ 时,y 是 4 阶无穷小量.

(3) 洛必达法则

481. 求: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

[解] 本题是 $\frac{0}{0}$ 型未定式,用洛必达法则
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+\alpha\sin\alpha x}{\beta e^{\beta x}+\beta\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

482. 求: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\mathrm{tg}^3 x}$.

[分析] 利用恒等变形: $\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\mathrm{tg}^3 x} = \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\cdot\dfrac{x^3}{\mathrm{tg}^3 x}$, 后一项因子极限为 1, 对 $\dfrac{x(e^x-1)-2(e^x-1)}{x^3}$ 使用洛必达法则显然要比对 $\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\mathrm{tg}^3 x}$ 简单.

［解］ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\operatorname{tg}^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\cdot\dfrac{x^3}{\operatorname{tg}^3x}$.

前一项因子是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则：

$$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1+xe^x-e^x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot e^x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\operatorname{tg}^3x}=\frac{1}{6}.$$

483．求：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

［分析］ 利用恒等变形，且令 $x^3=u$.

$$\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\frac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\cdot\frac{e^{x^3}-1-x^3}{(2x)^6}=\frac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\cdot\frac{e^u-1-u}{2^6\cdot u^2}.$$

［解］ 令 $x^3=u$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\lim_{x\to0}\frac{(2x)^6}{\sin^6 2x}\cdot\frac{e^u-1-u}{2^6\cdot u^2}.$$

后一项是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由洛必达法则

$$\lim_{u\to0}\frac{e^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{2u}=\lim_{u\to0}\frac{e^u}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\frac{1}{2^7}.$$

484．求：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

［分析］ 本题属 1^∞ 型未定式，使用洛必达法则必须设法化为 $\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式。由

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}},$$

∴ 由洛必达法则，当

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=A,$$

则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^A$. 此外，$0\cdot\infty$、$0^0$、$\infty^0$、$\infty-\infty$ 型未定式，一般采用如下的恒等变形：$0\cdot\infty=\dfrac{0}{\dfrac{1}{\infty}}$ 或 $\dfrac{\infty}{\dfrac{1}{0}}$；$0_0=e_0^{\ln 0}=\exp(\frac{0}{\frac{1}{0}})$或$\exp(\frac{\infty}{\frac{1}{0}})$；$\infty^0=$

$e^{0\ln\infty}=\exp(\frac{\ln\infty}{\frac{1}{0}})$或$\exp(\frac{0}{\frac{1}{\ln\infty}})$; $\infty_1-\infty_2=\dfrac{\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_1\cdot\infty_2}}=\dfrac{0}{0}$等。

[解] $\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}=e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$.

由洛必达法则:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

485. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

[解] 本题是 1^∞ 型未定式。

(1) $\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=e^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}=\exp\left(\dfrac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}}\right)$.

由洛必达法则:

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}}=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{1}{a}}{\left(2-\frac{x}{a}\right)\left(-\csc^2\frac{\pi x}{2a}\right)\frac{\pi}{2a}}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

(2) 令 $y=\arcsin x$, 则 $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\dfrac{y}{\sin y}\right)^{\frac{1}{\sin^2 y}}$, 于是

$$\left(\frac{y}{\sin y}\right)^{\frac{1}{\sin^2 y}}=e^{\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\ln\frac{y}{\sin y}}.$$

$$\lim_{y\to0}\frac{1}{\sin^2 y}\cdot\ln\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{\sin^2 y}\cdot\frac{\ln y-\ln\sin y}{y^2}$$

由洛必达法则:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln y-\ln\sin y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y-y\cos y}{2y^2\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\frac{\sin y-y\cos y}{2y^3}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\sin y}{6y^2}=\frac{1}{6}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

486. 求：$\lim\limits_{x\to+\infty}[(\pi-2\operatorname{arc\,tg}x)\ln x]$.

［解］ 本题是 $0\cdot\infty$ 型未定式．由洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty}[(\pi-2\operatorname{arc\,tg}x)\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arc\,tg}x}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2 x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln^2 x}{\frac{1}{x}+x}=0.$$

487. 求：$\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$

［解］ 本题是 ∞^0 型未定式．

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^{\operatorname{tg}x\ln\frac{1}{x}}=e^{-\operatorname{tg}x\ln x}.$$

由洛必达法则：

$$\lim_{x\to+0}-\operatorname{tg}x\ln x=\lim_{x\to+0}-\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\cdot\csc^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$

即
$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}}=1.$$

488. 求：$\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$.

［解］ 本题属 0^0 型未定式．

$$x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}=\exp\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right),\quad\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

由洛必达法则：

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=0,\quad\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=0.$$

即
$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x}=1.$$

489. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$; (2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

[解] 本题是 $\infty-\infty$ 型未定式.

(1) $$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

490. 求: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

[解] 本题是 1^∞ 型未定式.
$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}.$$

由洛必达法则:
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n)}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$
$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

491. 问: a、b 各取何值时, 有 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}+b\right)=0$.

[解一] 利用泰勒展开
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

$$\therefore\quad \frac{\sin x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}+\frac{a}{x^2}+b+o(x).$$

由条件，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{6}+b\right)=0$.

$$\therefore\quad a=-1,\quad b=\frac{1}{6}$$

［解二］ 利用洛必达法则：

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+ax+bx^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x+a+3bx^2}{3x^2}$. 若极限存在，须

$$\lim_{x\to0}\cos x+a+3bx^2=0.\qquad\therefore\quad a=-1.$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+3bx^2}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+6bx}{6x}=-\frac{1}{6}+b.$$

若极限存在且为零，则必须 $b=\frac{1}{6}$.

$$\therefore\quad a=-1,\quad b=\frac{1}{6}.$$

492. 问：c 取何值时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$.

［解］ $\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=e^{x\ln\frac{x+c}{x-c}}=\exp\left(\frac{\ln(x+c)-\ln(x-c)}{\frac{1}{x}}\right)$.

$\frac{\ln(x+c)-\ln(x-c)}{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to+\infty$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式．由洛必达法则．

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+c)-\ln(x-c)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x-c}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2c(x^2)}{(x^2-c^2)}$$

$$=2c.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=e^{2c},\quad e^{2c}=4,\quad c=\ln 2.$$

$\therefore$ 当 $c=\ln 2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$.

493. 已知：$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x, & |x|\leqslant1,\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\frac{x-1}{2}, & |x|>1,\end{cases}$ 求：$f'(x)$.

［解］ 在 $x\neq\pm1$ 时，显然有

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$$

又由洛必达法则：

$$f'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(-1+\Delta x)+\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+(-1+\Delta x)^2}=\frac{1}{2};$$

$$f'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(-1+\Delta x)+\frac{1}{2}(-1+\Delta x-1)+\frac{\pi}{4}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\Delta x+\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=+\infty;$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(1+\Delta x)+\frac{1}{2}(1+\Delta x-1)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Delta x-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\frac{1}{2};$$

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(1+\Delta x)-\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+(1+\Delta x)^2}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$, $f'(-1)$不存在.

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$$

494. 能否用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x+1}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

［解］ (1) 本题不是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，所以不能用洛必达法则．由连续函数的性质得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x+1}=0$.

(2) 本题虽是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，但 $\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$. 当 $x\to0$ 时，$2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 发散，不满足使用洛必达法则的条件.

由直接求极限的方法，

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3) 同上题 $(x-\cos x)'=1+\sin x$, 当 $x\to+\infty$ 时发散，所以不能用洛必达法则.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1.$$

(4) 由恒等变形，

$$\text{原式}=\frac{e^{-x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2+x}\sin^2 x}{\cos x+\sin x},$$

当 $x=n\pi-\dfrac{\pi}{4}\ (n=1, 2, \cdots)$ 时，分母为零，但分子非零，所以发散．本题不能用洛必达法则，这是因为分母有零点 $n\pi-\dfrac{\pi}{4}$.

(5) 本题是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式．但逐次应用洛必达法则，函数形式趋于繁复：$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\cdots$，仍不能确定是否收敛．用换元法，令 $\dfrac{1}{x}=y$, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^{-y}}{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to+\infty}y\cdot e^{-y}=0$.

(6) 本题是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式．但逐次应用洛必达法则，将重复出现函数形

式，因而不能确定极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\cdots,$$

由恒等变形 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1.$

495. 如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 点存在二阶导数，求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

［证］ $\lim\limits_{h\to0}f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)=0.$

∴ 本题左边极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式．由洛必达法则：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+2h)-f'(a+h)}{h}.$$

由 $f(x)$ 在 $x=a$ 点存在二阶导数，按导数定义得：

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(a+2h)-f'(a+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+2h)-f'(a)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\quad f''(a).$$

$$\therefore\quad\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

496. 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，且 $f(x)$ 在实数域内可导．问：对于充分大的 x，比较 $f(x)$ 与 $\ln f(x)$ 哪一个大？

［解］ 利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0.$$

∴ 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 是比 $\ln f(x)$ 更高阶的无穷大量，故对充分大的 x，有 $f(x)>\ln f(x)$．

§6. 导数在研究函数时的应用

(1) 函数的单调性

497. 求证：函数 $y=2x^3+3x^2-12x+4$ 在 $(-2, 1)$ 内是减

函数.

［证］ $y=2x^3+3x^2-12x-4$, $y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$.
显然当 $-2<x<1$ 时, $6(x+2)(x-1)<0$. 即 $y'<0$.

∴ 在 $(-2, 1)$ 内, $y=2x^3+3x^2-12+4$ 是减函数.

498. 求证: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 内是减函数.

［证］ $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

令 $g(x)=x\cos x-\sin x$, $g(o)=0$. $g'(x)=-x\sin x$, 当 $x\in(0, \pi)$ 时 $g'(x)<0$, ∴ $g(x)<g(o)=0$.

得 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}<0$, ∴ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 内严格单调减少.

499. 确定 $f(x)=x+|\sin 2x|$ 增减区间.

［解］ $f'(x)=1+2\cos 2x\cdot\operatorname{sgn}(\sin 2x)$ $(\sin 2x\neq 0)$. 研究 $f(x)$ 的单调增加区间:

$$\begin{cases}\sin 2x>0,\\ 1+2\cos 2x>0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin 2x<0,\\ 1-2\cos 2x>0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ -\dfrac{\pi}{3}+k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}\qquad \begin{cases}k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<(k+1)\pi,\\ k\pi+\dfrac{\pi}{6}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

∴ $k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ 和 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

∴ 函数增区间是 $\left(\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

同理, 函数的减区间是 $\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

500. 设在 R 上 $f''(x)>0$, $f(0)<0$. 求证: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

［证］ $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

令 $F(x)=xf'(x)-f(x)$, $F(0)=-f(o)>0$ 且 $F'(x)=xf''(x)$.

(1) 当 $x\in(-\infty, 0)$ 时, $F'(x)<0$, ∴ $F(x)$ 单调减少, $x<0$, 有 $F(x)$

$>F(o)>0$, 即 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'>0$, $\therefore\ \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加.

(2) 当 $x\in(0, +\infty)$ 时, $F'(x)>0$, $\therefore\ F(x)$ 单调增加. $x>0$, 有 $F(x)>F(o)>0$, 即 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'>0$, $\therefore\ \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

［说明］ 若 $f''(x)<0$, $f(o)>0$, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$、$(0, +\infty)$ 内单调减少.

501. **如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续、可导, 且在 x_0 处存在极大值, 能否确定: 在 x_0 的左邻域函数 $f(x)$ 单调增加, 在 x_0 的右邻域函数 $f(x)$ 单调减少?**

［解］ 不能肯定. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}3-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 3, & x=0.\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2\left(2-\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 并且由 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2-\sin\dfrac{1}{x}\right)<0$, 得到函数在 $x=0$ 处取极大值.

$$f'(x)=-4x-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

$f'(x)$ 在任何 $x\neq 0$ 处连续, 又当 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$ 时,

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)=-\frac{4}{2k\pi}+1>0;$$

当 $x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时,

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}<0.$$

其中 k 为非零整数. 显然, 当 k 取充分大的整数时, 可保证 $\dfrac{1}{2k\pi}$、$\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

都在$(-\delta, 0)$、$(0, \delta)$领域内．这表明$f'(x)$在$x=0$的左、右两侧的任意领域内，不保持定号，从而函数不可能保持单调．

502．比较$\log_4 5$与$\log_5 6$的大小．

［分析］ 从两个对数的底和真数之间关系容易看出这两个对数值是函数$\log_x(x+1)$在$x=4$、$x=5$两点的函数值，因此比较大小只要研究该函数的单调性．

［解］ 设$f(x)=\log_x(x+1)$，由本题条件可取$x\geqslant 4$．由

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x},\quad f'(x)=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$$

知：当$x\geqslant 4$时，$x\ln x<x\ln(x+1)<(x+1)\ln(x+1)$．$\therefore x\ln x-(x+1)\cdot\ln(x+1)<0$，$f'(x)<0$．则$f(x)$是单调减少函数，$f(4)>f(5)$，即

$$\log_4 5>\log_5 6.$$

503．求证：如果$e<x_1<x_2$，那末$\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}$．

［证］ 设$f(x)=x\ln x$，则$f'(x)=1+\ln x$．当$x>e$，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$x>e$时为增函数．因此，若$e<x_1<x_2$，有$x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$，即

$$\frac{\ln x_1}{\ln x_2}<\frac{x_2}{x_1}.$$

设$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．当$x>e$，$g'(x)<0$，故$g(x)$在$x>e$为减函数．因此，若$e<x_1<x_2$，有

$$\frac{\ln x_2}{x_2}<\frac{\ln x_1}{x_1},\quad 得\quad \frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}.$$

综上所述得：$e<x_1<x_2$时，$\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}<\dfrac{x_2}{x_1}$．

［说明］ $e<a<b$，有$\dfrac{a}{b}<\dfrac{\ln a}{\ln b}$推得$a\ln b<b\ln a$，$b^a<a^b$．所以，当$e<a<b$时，有$b^a<a^b$；当$0<a<b<e$时，有$b^a>a^b$．

504．比较100^{101}与101^{100}的大小．

［解一］ 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．

$\therefore$ 当$x>e$时$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少．则

$$100^{\frac{1}{100}}>101^{\frac{1}{101}}.$$

$\therefore \quad 100^{101} > 101^{100}$.

[解二] 利用上题说明中的结论, $e<a<b$, 得 $a^b>b^a$. 则有 $e<100<101$, $\therefore$ $100^{101}>101^{100}$.

505. 当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, 证明: $\cos\theta+\theta\sin\theta>1$.

[证] 设 $f(\theta)=\cos\theta+\theta\sin\theta-1$, $f'(\theta)=\theta\cos\theta$. 当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $f'(\theta)\geqslant 0\left(\text{仅在 } \theta=\frac{\pi}{2} \text{ 时等号成立}\right)$.

$\therefore f(\theta)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调增加. 而 $f(0)=0$, $\therefore$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有 $f(\theta)>f(0)$, 即 $\cos\theta+\theta\sin\theta>1$.

506. 求证: $2x\operatorname{arc\,tg} x\geqslant\ln(1+x^2)$.

[证] 令 $f(x)=2x\operatorname{arc\,tg} x-\ln(1+x^2)$.

有 $f(0)=0$,

$$f'(x)=2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\operatorname{arc\,tg} x.$$

当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$, $\therefore$ 当 $x>0$, $f(x)$ 单调增加, $f(x)>f(0)$; 当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$, $\therefore$ 当 $x<0$, $f(x)$ 单调减少, $f(x)>f(0)$.

$\therefore$ $2x\operatorname{arc\,tg} x\geqslant\ln(1+x^2)$. 等号仅当 $x=0$ 时成立.

507. 证明: $\sin x+\operatorname{tg} x>2x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

[证] 设 $F(x)=\sin x+\operatorname{tg} x-2x$, $F(0)=0$.

$F'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$, $F'(0)=0$.

$F''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\operatorname{tg} x=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)$.

$\because x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore 0<\cos x<1$, $\frac{2}{\cos^3 x}>2$.

于是
$$F''(x)=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)>0,$$

$F'(x)$是单调增加的, $F'(x)>F'(0)=0$, $F'(x)>0$.

$\therefore$ $F(x)$单调增加, $F(x)>F(0)$, 得 $\sin x+\operatorname{tg} x>2x$.

508. 若 $x>0$, 则 $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$.

［证］ 设 $f(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2$. $f'(x)=e^x-1-x$, 又 $f''(x)=e^x-1$. $\because x>0$, $\therefore f''(x)>0$, $\therefore f'(x)$ 是增函数. $f'(0)=0$, $x>0$, $\therefore f'(x)>f'(0)=0$. $\therefore f(x)$是增函数. $f(x)>f(0)=0$.

$$\therefore\quad e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2>0,\quad 即\quad e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2.$$

509. 求证: $\ln(1+x)>\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}\quad (x>0)$.

［分析］ 如果直接设 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}$，用导数来研究比较麻烦. 而设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\operatorname{arc\,tg} x$ 较方便.

［证］ 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\operatorname{arc\,tg} x\quad (x>0)$.
有 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}.$$

当 $x>0$ 时，$\qquad f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}>0$,

$\therefore f(x)$是单调增加函数，$(1+x)\ln(1+x)-\operatorname{arc\,tg} x>f(0)=0$.

$$\therefore\quad \ln(1+x)>\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}\quad (x>0).$$

510. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，求证: $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

［证］ 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}$.

$\because 0<x<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \cos x>0$, $x-\operatorname{tg} x<0$, 于是 $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$单调减少，故有 $f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

即 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$. 于是 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$.

511. 求证: $\operatorname{arc\,tg} x-\ln(1+x^2)\geqslant\dfrac{\pi}{4}-\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$.

［证］ 设 $F(x)=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{\pi}{4}-[\ln(1+x^2)-\ln 2]$, $F(1)=0$.

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}(1-2x).$$

$\because \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, $1-2x\leqslant 0$. $\therefore F'(x)\leqslant 0$, $F(x)$在$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$内单调减少，得 $F(x)\geqslant F(1)=0$, $\therefore \operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)\geqslant \frac{\pi}{4}-\ln 2$.

512. 已知：$x>0$, $y>0$, 且$0<\alpha<\beta$. 求证：

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

［证］ 取$k=\frac{y}{x}$, 即需证$(1+k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+k^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

设 $F(z)=(1+k^z)^{\frac{1}{z}}$ $(z>0)$. 要求证 $F(\alpha)>F(\beta)$.利用对数求导法有

$$F'(z)=(1+k^z)^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z^2(1+k^z)}\cdot[k^z\cdot\ln k^z-(1+k^z)\cdot\ln(1+k^z)].$$

$\because$ $(1+k^z)^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z^2(1+k^z)}>0$, $0<k^z<1+k^z$, $0<\ln k^z<\ln(1+k^z)$,

$\therefore$ $k^z\ln k^z-(1+k^z)\ln(1+k^z)<0$.

则$F'(z)<0$, $F(z)$是减函数. 由已知$0<\alpha<\beta$, $\therefore F(\alpha)>F(\beta)$, 即

$$(1+k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+k^\beta)^{\frac{1}{\beta}},\quad (x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

513. 证明：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

［证］ 设 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ $(x\geqslant 0)$, 则 $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$. 当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)$是增函数. $\because |a+b|\leqslant|a|+|b|$, $\therefore f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$, 即 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

又
$$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

$$\therefore\quad \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

即有
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

［注］ 本题亦可用中值定理证明. 令$f(x)=\frac{x}{1+x}$.

$$f(|a|+|b|)-f(|a+b|)=f'(\xi)(|a|+|b|-|a+b|)$$
$$=\frac{1}{(1+\xi)^2}(|a|+|b|-|a+b|)\geqslant 0\quad 得结论.$$

514. 如果函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上可导, $f(0)=0$, $f'(x)>0$, 且 $f'(x)$ 单调增加. 则 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a)$ 内也单调增加.

[证] 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(0, x)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=f'(\xi),$$

其中 $0<x<a$. 且由 $f'(x)$ 单调增加, $\therefore f(x)=x\cdot f'(\xi)<x\cdot f'(x)$, 即 $xf'(x)>f(x)$.

$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$. $\therefore$ $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加.

515. 已知: $y=2x^2-x^4$, 试确定反函数 $x=x(y)$ 的单值连续分支, 求 x'_y 并画出大致图象.

[解] $y'_x=4x-4x^3$, 令 $y'_x=0$ 解得 $x=0, \pm 1$.

在 $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 中的每一个区间内 y'_x 符号不变, 所以函数 y 分别在上述区间内单调, 存在反函数. 由

$$x^4-2x^2+y=0,\quad x^2=1\pm\sqrt{1-y}.$$

得反函数的各支分别为:

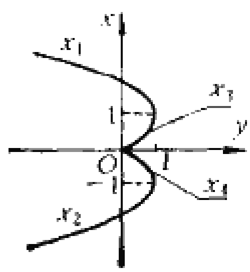
$x_1=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$; $x_2=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$;

$x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$; $x_4=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leqslant y<1)$.

上述反函数的导数是

$$\frac{dx_i}{dy}=\frac{1}{4x_i(1-x_i^2)}\quad (i=1, 2, 3, 4).$$

反函数的图象:



(2) 函数的极值与最大(小)值

516．求函数 $y=2x^3-6x^2-18x+7$ 的极值．

［解］ $y'=6x^2-12x-18$．令 $y'=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$ 为函数的驻点．

$y''=12x-12$．$y''|_{x=-1}=12\cdot(-1-1)=-24<0$，$y''|_{x=3}=12\cdot(3-1)=24>0$．

∴ 当 $x_1=-1$ 时，$f(x)$ 取极大值．$y_{极大}=17$．

当 $x_2=3$ 时，$f(x)$ 取极小值．$y_{极小}=-47$．

517．求 $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值．

［解］ $y'=\dfrac{4(x-5)(2x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x+1}}$．令 $y'=0$ 解得 $x_1=5$，$x_2=\dfrac{1}{2}$ 是驻点．而 $x_3=-1$ 时，y' 不存在．

在 $x_1=5$ 的充分小邻域内，当 $x<5$ 时 $f'(x)<0$；$x>5$ 时 $f'(x)>0$．∴在 $x_1=5$ 处，函数取极小值，$y_{极小}=0$．

在 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 的充分小邻域内，当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时 $f'(x)>0$；$x>\dfrac{1}{2}$ 时 $f'(x)<0$．∴在 $x_2=\dfrac{1}{2}$ 处，函数取极大值，$y_{极大}=\dfrac{81}{8}\sqrt[3]{18}$．

在 $x_3=-1$ 的充分小邻域内，对一切 x，都有 $f(x)>f(-1)=0$．∴在 $x_3=-1$ 处，函数取极小值．$y_{极小}=0$．

518．求 $y=x^x$ 的极值 $(0.1\leqslant x)$．

［解］ $y'=x^x\cdot(1+\ln x)$．令 $y'=0$．解得 $x=\dfrac{1}{e}$ 是驻点，当 $0.1<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$y'<0$；$x>\dfrac{1}{e}$ 时，$y'>0$．∴在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处，函数取极小值．$y_{极小}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$．

519．求 $y=\dfrac{2-x}{\pi}\cdot\cos\pi(x+3)+\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi(x+3)$ $(0<x<4)$ 的极值．

［解］ $y'=(x-2)\sin\pi(x+3)$．令 $y'=0$，解得驻点为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$．

在 $x_1=1$ 的充分小邻域内，当 $x<1$ 时 $y'>0$；$x>1$ 时 $y'<0$. $\therefore$ 在 $x_1=1$ 处，函数取得极大值，$y_{极大}=\dfrac{1}{\pi}$.

在 $x_2=2$ 的充分小邻域内，当 $x<2$ 时 $y'<0$；$x>2$ 时 $y'<0$. $\therefore$ 在 $x_2=2$ 处，函数无极值.

在 $x_3=3$ 的充分小邻域内，当 $x<3$ 时 $y'<0$；$x>3$ 时 $y'>0$. $\therefore$ 在 $x_3=3$ 处，函数取得极小值，$y_{极小}=-\dfrac{1}{\pi}$.

520. 求 $y=1-\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{4+x^2}}$ 的极小值.

［分析］ 这里用 y' 来求函数的极小值较繁. 注意到 $\arcsin u$ 是单调函数，$1-\arcsin\sqrt{u}$ 是关于 u 的减函数，因此只须求出 $u=\dfrac{x}{4+x^2}$ 的极大值.

［解］ $y=1-\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{4+x^2}}$ 的定义域为 $x\geqslant0$. 令

$$f(u)=1-\arcsin\sqrt{u},$$

$u(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$. $\therefore u'=\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$，由 $u'=0$ 解得 $x=2$.

当 $0\leqslant x<2$ 时 $u'>0$，$\therefore u(x)<u(2)$，由 $1-\arcsin\sqrt{u}$ 是单调减函数，得 $f[u(x)]>f[u(2)]$.

当 $x>2$ 时 $u'<0$，$\therefore u(x)<u(2)$，得 $f[u(x)]>f[u(2)]$.

$\therefore$ 在 $x=2$ 处，函数取极小值，$y_{极小}=1-\dfrac{\pi}{6}$.

521. 求：$y=ae^{px}+be^{-px}$ 的极值.

［解］ a、b、p 都不能为零，否则函数无极值.

$y'=pe^{-px}(ae^{2px}-b)$. 若 a、b 异号，由 $e^{2px}>0$，$ae^{2px}-b$ 必与 a 同号，故 $y'_x=0$ 无解，函数无极值. 若 a、b 同号，令 $y'_x=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{b}{a}$ 为驻点.

$y''=p^2(ae^{px}+be^{-px})$. 将 $x=\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{b}{a}$ 代入，

$$y''\big|_{x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}}=p^2\cdot\left[a\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\right)+b\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\right)\right].$$

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$y''|_{x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}}>0$；$a<0$ 时，$y''|_{x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}}<0$.

由上述讨论可得：

(1) 当 $ab<0$，函数无极值.

(2) 当 $ab>0$，$a>0$，$x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$ 处，函数取极小值，$y_{极小}=2\sqrt{ab}$.

(3) 当 $ab>0$，$a<0$，$x=\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$ 处，函数取极大值，$y_{极大}=-2\sqrt{ab}$.

522. 求：$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值（n 是自然数）.

[解]　$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. 令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x=0$.

（i）当 n 为偶数时，对任何 x 有 $f'(x)<0$，$\therefore$ 函数无极值.

（ii）当 n 为奇数时，当 $x<0$，$f'(x)>0$；当 $x>0$，$f'(x)<0$. $\therefore$ 当 n 为奇数时，函数在 $x=0$ 处取极大，极大值为 $f(0)=1$.

523. 求：$y=|x|^n(x-1)$ 的极大和极小值.

[解]　(1) 当 $x\neq0$ 时，已知 $|x|'=\operatorname{sgn}x$. 由复合函数求导法则，

$y'=n\cdot|x|^{n-1}\cdot(\operatorname{sgn}x)\cdot(x-1)+|x|^n=|x|^{n-1}\cdot[n(x-1)\operatorname{sgn}x+|x|]$.

当 $x>0$ 时有 $y'=|x|^{n-1}\cdot(n+1)\left(x-\frac{n}{n+1}\right)$，令 $y'=0$ 解得驻点 $x=\frac{n}{n+1}$. 观察 $x=\frac{n}{n+1}$ 两侧导数符号，易知在 $x=\frac{n}{n+1}$ 处，函数取极小值，$y_{极小}=-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}$.

当 $x<0$ 时有 $y'=|x|^{n-1}\cdot(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-x\right)$，但 $y'=0$ 无解.

(2) 当 $x=0$ 处函数不可导. 而 $f(0)=0$.

当 $x<0$ 时 $f(x)<0$，当 $0<x<1$ 时 $f(x)<0$. $\therefore f(0)$ 为函数极大值. $y_{极大}=0$.

524. 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a>0)$，求证：(1) 如果 $f(x)$ 有极大值，则必有极小值；(2) 若 x_1 处函数取极小值，x_2 处函数取极大值，则 $x_1>x_2$；(3) 如果 $f(x)$ 的极大值为 m，极小值为 n，则 $m>n$.

［证］ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a>0)$.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=6ax+2b.$$

(1) 若在 x_2 处 $f(x)$ 取得极大值，则必有 $f'(x_2)=0$, $f''(x_2)<0$, 即有 $3ax_2^2+2bx_2+c=0$ 及 $x_2<-\dfrac{b}{3a} \quad (a>0)$.

下面证明 $3ax^2+2bx+c=0$ 的另一个实根 x_1 有 $x_1\neq x_2$, $f''(x_1)>0$. 如果 $x_1=x_2$, 则 $f'(x)=3a(x-x_2)^2>0$, $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内单调增加，与 $f(x)$有极大值矛盾，$\therefore\ x_1\neq x_2$.

$$3ax^2+2bx+c=0, \quad \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}, \end{cases}$$

且 $\Delta=4b^2-12ac>0$, 再由 $x_2<-\dfrac{b}{3a}$, $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}$, $\therefore\ x_1>-\dfrac{b}{3a}$. 即 $3ax_1+b>0$, $f''(x_1)>0$, $\therefore\ x_1$ 处 $f(x)$取得极小值.

(2) 由 $x_2<-\dfrac{b}{3a}$, $x_1>-\dfrac{b}{3a} \quad (a>0)$, 得 $x_1>x_2$.

(3) 由 $a>0$, $x_1>x_2$.

$$\begin{aligned} m-n&=(ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d)-(ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d)\\ &=(x_2-x_1)[a(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+c]\\ &=(x_2-x_1)\{a[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]+b(x_1+x_2)+c\}\\ &=(x_2-x_1)\cdot\frac{6ac-2b^2}{9a}. \end{aligned}$$

$$\because\quad x_2-x_1<0,\ 6ac-2b^2<0, \quad \therefore\quad m>n.$$

525. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极大值 $f(\alpha)$ 和极小值 $f(\beta)$. (1) 求 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 关于 a、b、c 的表达式; (2) 求 $f(\alpha)+f(\beta)$ 关于 a、b、c 的表达式; (3) 设曲线 $y=f(x)$ 的极值点为 A、B, 试证 A, B 连线的中点 M 在曲线 $y=f(x)$ 上.

［解］ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$. 驻点 α、β 必是 $f'(x)=0$ 的根.

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}$, $\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$.

(2) $f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^3+\beta^3+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c$

$$=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]+a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$
$$+b(\alpha+\beta)+2c$$
$$=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c.$$

(3) 由于曲线 $y=f(x)$ 的极大值点和极小值点为 $A(\alpha, f(\alpha))$ 和 $B(\beta, f(\beta))$，设线段 AB 的中点为 $M(X, Y)$. 则

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{a}{3} \\ Y=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c. \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=Y.$$

∴ $M(X, Y)$在曲线 $y=f(x)$上.

[说明] $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 极值点的连线中点在曲线上，可以作为检验三次多项式函数图象是否正确的方法之一.

526. 已知 $f(x)=ax^5+bx^3+cx^2+d$ 在 $x=1$ 处取极值 4，在 $x=-1$ 处取极值 0，求 $f(x)$ 的解析式.

[分析] 在 $x=x_0$ 处取极值 V，一般可归结为函数有 $f(x_0)=V$ 和 $f'(x)=0$. 本题关键就是反复运用上述关系，通过解方程，求出 a、b 的值.

[解] $f(x)=ax^5+bx^3+cx^2+d$, $\quad f'(x)=5ax^4+3bx^2+2cx$.

由 $x=1$ 处取极值为 4 得到

$$f(1)=a+b+c+d=4 \qquad \cdots①,$$
$$f'(1)=5a+3b+2c=0 \qquad \cdots②.$$

由 $x=-1$ 处取极值为 0 得到

$$f(-1)=-a-b+c+d=0 \qquad \cdots③,$$
$$f'(-1)=5a+3b-2c=0 \qquad \cdots④.$$

②－④ 解得 $c=0$，①＋③ 解得 $d=2$，

$$\therefore \begin{cases} a+b=2, \\ 5a+3b=0. \end{cases} \text{解得} \quad a=-3, b=5.$$

$$\therefore \quad f(x)=-3x^5+5x^3+2.$$

527. 已知曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 过点(2, 1)，且在此点

的切线方程为 $9x+y=19$. 又它的极大值与极小值之差为 32. 求此三次函数解析式.

[解] $y=x^3+ax^2+bx+c$; $y'=3x^2+2ax+b$. 曲线过(2, 1), 故

$$1=8+4a+2b+c \qquad \cdots①.$$

切线 $9x+y=19$ 斜率为 -9, 故

$$-9=12+4a+b \qquad \cdots②.$$

由 ② 得 $b=-4a-21$.

令 $y'=0$ 得 $3x^2+2ax+b=0$. 两极值点的横坐标为 x_1、x_2:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2a}{3}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{b}{3}. \end{cases} \quad \therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4a^2-12b}{9}.$$

由极大值与极小值之差为 32:

$$y_1-y_2=(x_1^3+ax_1^2+bx_1+c)-(x_2^3+ax_2^2+bx_2+c)$$
$$=(x_1-x_2)[(x_1+x_2)^2-x_1x_2+a(x_1+x_2)+b].$$

即
$$\left|\sqrt{\frac{4a^2-12b}{9}}\cdot\left(\frac{4a^2}{9}-\frac{b}{3}-\frac{2a^2}{3}+b\right)\right|=32,$$

将 $b=-4a-21$ 代入上式, 得

$$\frac{2\sqrt{a^2+12a+63}}{3}\cdot\frac{2(a^2+12a+63)}{9}=32,$$

$$a^2+12a+63=(8\times27)^{\frac{2}{3}},$$

$$a^2+12a+27=0.$$

$$\begin{cases} a_1=-9, \\ b_1=15. \end{cases} \quad \begin{cases} a_2=-3, \\ b_2=-9. \end{cases} \quad 代入 ① 得 \quad \begin{matrix} c_1=-1, \\ c_2=23. \end{matrix}$$

∴ 解析式是 $y=x^3-9x^2+15x-1$ 或 $y=x^3-3x^2-9x+23$.

528. 设 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+b$ 的图象的中心对称点在 x 轴上, 且图像与 y 轴的交点在(0, 10)、(0, 14)之间, 若 a、b 为整数, 求: a、b 的值.

[分析] 若设$(k, 0)$为对称点, 用 $f(k+x)=f(k-x)$求出 k 的值, 过程较麻烦. 若用导数求函数的极值点, 利用两极值点的中点即是对称点来解就方便了.

［解］ $f'(x)=3x^2+2ax-a^2$. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1=-a$, $x_2=\frac{a}{3}$.

由极值点的中点是中心对称点，得：对称中心的坐标为

$$\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a}{3}, \\ y=0. \end{cases}$$

代入 $$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+b,$$

$f\left(-\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+b=0$. 得

$$a^3=-\frac{27}{11}b \qquad \cdots①$$

又函数图象的截距在(0, 10)、(0, 14)之间，即 $10<b<14$.

∴ 要使等式①中 a 取整值，则 $b=11$, $a=-3$. ∴ 当 $a=-3$, $b=11$ 时，函数对称中心在(1, 0)处.

529. 设函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+a+1}{x^2+1}$, 当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极小值0. 求：(1) a、b 的值；(2) $f(x)$的极大值.

［解］ (1) 已知 $f(-\sqrt{3})=0$, 即

$$\frac{a(-\sqrt{3})^2+b(-\sqrt{3})+a+1}{(-\sqrt{3})^2+1}=0,$$

$$\therefore \quad 4a-\sqrt{3}b+1=0 \qquad \cdots①$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+1)-2x(ax^2+bx+a+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-bx^2-2x+b}{(x^2+1)^2}.$$

已知 $f'(-\sqrt{3})=0$, 即

$$\frac{-b\cdot(-\sqrt{3})^2-2\cdot(-\sqrt{3})+b}{(3+1)^2}=0,$$

∴ $-3b+2\sqrt{3}+b=0$, 解得 $b=\sqrt{3}$. 代入①式得 $a=\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}$, $f'(x)=\frac{-(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $f'(x)=0$, 解得驻点为 $x=-\sqrt{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$. 由讨论，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处 $f(x)$ 取极大值，$f_{极大}=2$.

530. 函数 $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$, 其中 $0<x<2\pi$, a 是常数. 求: (1) $g(x)=f'(x)$ 的极值; (2) $f(x)$ 的极大值、极小值恰好各有一个时, 求 a 的可取值的范围.

[解] $f(x)=ax+e^{-x}\sin x\quad(0<x<2\pi)$.

(1) $g(x)=f'(x)=a-e^{-x}(\sin x-\cos x)$.

$$g'(x)=e^{-x}[(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)]=-2e^{-x}\cos x.$$

x	$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	极小 $a-e^{-\frac{\pi}{2}}$	↗	极大 $a+e^{-\frac{3\pi}{2}}$	↘

由上表可见, $g(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处取得极小值 $a-e^{-\frac{\pi}{2}}$. $g(x)$ 在 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 处取得极大值 $a+e^{-\frac{3\pi}{2}}$.

(2) 显然有 $a+1>a+e^{-\frac{3\pi}{2}}>a+e^{-2\pi}>a-e^{-\frac{\pi}{2}}$.

若 $g(x)$ 极小值大于零, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 严格单调增加, 因此 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内无极值.

若 $g(x)$ 极小值小于零并且 $g(2\pi-0)>0$, 则 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(2\pi-0)<0$, 由 $g(x)$ 的连续性知道在 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right)$ 内 $f'(x)$ 有一个零点. 又若 $g(2\pi-0)=a+e^{-2\pi}>0$, 有 $a+1>0$, 则 $g(+0)>0$, 则 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(+0)<0$ 保证在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $f'(x)$ 又有一个零点.

$$\therefore\ \begin{cases}g(2\pi-0)>0,\\ g(+0)>0.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}a+e^{-2\pi}>0,\\ a-e^{-\frac{\pi}{2}}<0.\end{cases}$$

当 $-e^{-2\pi}<a<e^{-\frac{\pi}{2}}$ 恰各一个极大值和一个极小值.

531. 若 $p\geqslant1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 对于 $x\geqslant0$, 试证: $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geqslant x$.

［分析］ 若取 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}$ 或 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$ 利用微分中值定理或函数的单调性，都不易证得所需的不等式，有时利用区间上函数的极值，往往会奏效．

［证］ 设 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$，$f'(x)=x^{p-1}-1$．解 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$．当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$．$\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，且是 $f(x)$ 的最小值点．

于是 $f_{最小}=f(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=0$．$\therefore f(x)\geqslant 0$．得 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$．

532．已知：$b\geqslant a>0$，且 $n>1$．求证：

$$\frac{b^n}{2^n}\leqslant a^n+(-1)^n(a-b)^n\leqslant b^n.$$

［证］ 由于 $b>0$，只要证：$\frac{1}{2^n}\leqslant\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(1-\frac{a}{b}\right)^n\leqslant 1$．令 $x=\frac{a}{b}$，需证 $\frac{1}{2^n}\leqslant x^n+(1-x)^n\leqslant 1\quad x\in(0,1]$．

设 $F(x)=x^n+(1-x)^n$，则 $F'(x)=nx^{n-1}-n(1-x)^{n-1}$，令 $F'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，$n>1$．

$0<x\leqslant\frac{1}{2}$，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 单调减少，

$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 单调增加，

$\therefore F(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取最小值，$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}$，$F(x)$ 在 $x=0, 1$ 处取最大值，$F(0)=F(1)=1$．

$\therefore\quad \frac{1}{2^{n-1}}\leqslant x^n+(1-x^n)\leqslant 1$．即 $\frac{b^n}{2^n}\leqslant a^n+(-1)^n(a-b)^n\leqslant b^n$．

533．设 $a>0$，$x>0$，求证：$(x^2-2ax+1)<e^x$．

［证一］ 设 $f(x)=\frac{x^2-2ax+1}{e^x}$，则

$$f'(x)=-(x-1)[x-(2a+1)]\cdot e^{-x}.$$

易知在 $(0,+\infty)$ 内，$f(x)$ 的最大值为 $f(2a+1)$．令

$$g(a)=f(2a+1)=\frac{(2a+1)^2-2a(2a+1)+1}{e^{2a+1}}=\frac{2a+2}{e^{2a+1}},$$

有 $g'(a)=-\dfrac{2(2a+1)}{e^{2a+1}}<0$，∴ 关于 a 的函数 $g(a)$ 单调减少．

$g(0)$ 为最大，$g(0)=2\cdot e^{-1}<1$，∴ $g(a)<g(0)<1$

则 $f(2a+1)<1$，由 $f(2a+1)$ 为最大值，得：$f(x)<f(2a+1)$，

$$\therefore\quad \frac{x^2-2ax+1}{e^x}<1.$$

即不等式成立．

［证二］　令 $f(x)=e^x-(x^2-2ax+1)$，则 $f'(x)=e^x-2x+2a$，$f''(x)=e^x-2$．

当 $x=\ln 2$ 时，$f''(\ln 2)=0$．∴ $f'(x)$ 在 $x=\ln 2$ 时达最小．且 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2)+2a>0$，$f'(x)\geqslant f'(\ln 2)>0$．

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，又 $f(0)=0$，∴ $f(x)>0$．当 $x\in(0,+\infty)$，即证明了结论：$(x^2-2ax+1)<e^x$．

534．已知方程 $x^3-ax^2-a^2x+b^3=0$ 和 $x^3-2ax^2+bx=0$ 都有相异的三个实根．试用图形表示点 $(a,\ b)$ 的取值范围．

［解］　设 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+b^3$．因为 $x^3-ax^2-a^2x+b^3=0$ 有三个相异的实根，所以函数 $f(x)$ 有极大值和极小值，并且极值异号．由

$$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a),$$

得驻点为 $-\dfrac{a}{3}$ 和 a，并得出 $f(x)$ 的极值为

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)=b^3+\frac{5}{27}a^3,\quad f(a)=b^3-a^3.$$

且由 $f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\cdot f(a)<0$，则

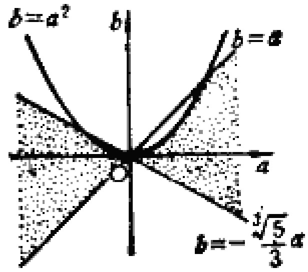
$$\left(b^3+\frac{5}{27}a^3\right)(b^3-a^3)<0,\quad\therefore\quad\left(b+\frac{\sqrt[3]{5}}{3}a\right)(b-a)<0.$$

另一方面，由 $x^3-2ax^2+bx=0$ 即 $x(x^2-2ax+b)=0$．

为使方程有三个相异实根，除 0 外，方程 $x^2-2ax+b=0$ 应有二个相异实根，∴ $b\neq 0$，$a^2-b>0$．欲使方程 $x^3-ax^2-a^2x+b^3=0$ 和 $x^3-2ax^2+bx=0$ 都有三个相异实根，则 $(a,\ b)$ 的范围：

$$\begin{cases}\left(b+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}a\right)(b-a)<0,\\ a^2>b,\quad b\neq 0.\end{cases}$$

区域如图所示，不包括边界.



535. 设：$y=x^3+3x^2-14x+2$ 与 $y=10x+2K$ 有三个不同的交点，问：K 必须取何值？

［解］ 问题化为 K 取何值时 $x^3+3x^2-24x+(2-2K)=0$ 有三个不相同的实根．设

$$f(x)=x^3+3x^2-24x+(2-2K);$$

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=2$，$x_2=-4$，且由 $f'(x)$ 在 $x_1=2$、$x_2=-4$ 附近符号变化情况，得函数分别在 $x_1=2$、$x_2=-4$ 处取得极小、极大值．只要 $f(-4)\cdot f(2)<0$，就有三个不相同的实根．于是有

$$(-64+48+96+2-2K)\cdot(8+12-48+2-2K)<0,$$

解得 $-13<K<41$，这时 $y=x^3+3x^2-14x+2$ 与 $y=10x+2K$ 有三个不同的交点.

536. 已知：$y=2x^3-3(1+a)x^2+6ax-2$．问 (1) 若函数存在极大值与极小值，求 a 的范围． (2) 若函数的图象与 x 轴相交三点，求 a 的范围． (3) 若函数的极大值为 0，求函数的解析式.

［解］ (1) $y'=6x^2-6(1+a)x+6a$；令 $y'=0$ 即 $6x^2-6(1+a)x+6a=0$．由条件 y 必须有两个驻点，

$$\therefore\quad \Delta=[(1+a)^2-4a]\cdot 36=36(1-a)^2>0,$$

得 $a\neq 1$． 又驻点是 $x_1=1$，$x_2=a$． 再由 $y''=6(2x-1-a)$ 以及 $f''(1)\cdot f''(a)=36(1-a)(a-1)<0$ $(a\neq 1)$.

∴ 取 $a\neq 1$ 的一切实数，函数存在极大值和极小值.

(2) 三次函数图象与 x 轴相交三点．由图象分析要求函数的极大值、极小值异号．由 $x_1=1$，$x_2=a$ 为极值点，只须 $f(a)\cdot f(1)<0$．即

$$[2a^3-3(1+a)a^2+6a^2-2]\cdot[2-3(1+a)+6a-2]<0,$$

$$(a-1)^2(a^2-2a-2)>0.$$

解得 $a>1+\sqrt{3}$，$a<1-\sqrt{3}$.

$\therefore a\in(-\infty, 1-\sqrt{3})$、$(1+\sqrt{3}, +\infty)$，三次函数与 x 轴相交三点.

(3) 若 $x_1=1$ 处函数取极大值，则 $f(1)=2-3(1+a)+6a-2=0$，得 $a=1$. 但由前面讨论知道 $a=1$ 不是极值点，故在 $x_1=1$ 处 $f(x)$ 不可能取极大值.

若 $x_2=a$ 为极大值点，则 $f(a)=-a^3+3a^2-2=0$，解得 $a=1$（舍去），$a=1+\sqrt{3}$，$a=1-\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad f(x)=2x^3-3(2+\sqrt{3})x^2+6(1+\sqrt{3})x-2$$

和 $$f(x)=2x^3-3(2-\sqrt{3})x^2+6(1-\sqrt{3})x-2.$$

函数的极大值为 0.

537. 设从点 $P(\alpha, \beta)$ 可向曲线 $y=x-x^3$ 引三条不同切线，试求点 P 的坐标的范围并作出图象.

[解]　$y=x-x^3$，$y'=1-3x^2$. $\therefore$ 曲线 $y=x-x^3$ 上对应点 $(t, t-t^3)$ 的切线方程为

$$y-(t-t^3)=(1-3t^2)(x-t),$$

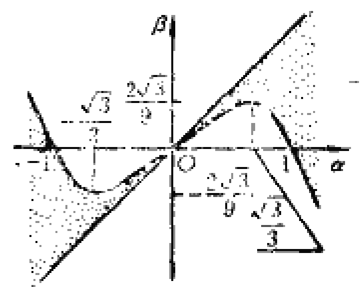
即 $$y=(1-3t^2)x+2t^3.$$

因为切线过 $P(\alpha, \beta)$，

$$\therefore\quad 2t^3-3\alpha t^2+\alpha-\beta=0$$

令上式左边为 $f(t)$，则 $f(t)=0$，

$$f'(t)=6t(t-\alpha).$$



要使 $f(t)$ 有三个不相等的实根，只要 $\alpha\neq0$，且函数 $f(t)$ 的极大值与极小值异号，即 $f(0)\cdot f(\alpha)=(\alpha-\beta)(-\alpha^3+\alpha-\beta)<0$，(i) 当 $\alpha>0$，解得，$\alpha-\alpha^3<\beta<\alpha$；(ii) 当 $\alpha<0$，解得 $\alpha<\beta<\alpha-\alpha^3$.

点 P 的范围即如图不包含边界的阴影部分.

538. 已知函数 $f(x)=e^{x(x-\alpha)(x-2\alpha)^2}$. 其中 α 为任意正实数. 在 $f(x)=e^{x(x-\alpha)(x-2\alpha)^2}$ 所表示的曲线族中，如果只有一条曲线过给定的点 $P(x_0, y_0)$. 求点 $P(x_0, y_0)$ 的范围，并用图形表示之.

[分析]　曲线 $f(x)=e^{x(x-\alpha)(x-2\alpha)^2}$ 过 (x_0, y_0)，即满足 $y_0=e^{x_0(x_0-\alpha)(x_0-2\alpha)^2}$.

要使 $f(x)=e^{x(x-\alpha)(x-2\alpha)^2}$ 表示的曲线族中只有一条曲线过 $P(x_0, y_0)$，即求方程 $y_0=f(\alpha)$只有唯一正数解的 $P(x_0, y_0)$的范围.

［解］ 满足题意的 $P(x_0, y_0)$就是使关于 α 的方程

$$F(\alpha)=e^{x_0(x_0-\alpha)(x_0-2\alpha)^2}-y_0=0$$

具有唯一正数解的点.

(i) $x_0=0$ 的情况，有 $y_0=1$，此时，任意正数 α，都是方程的解，不符合 α 有唯一正数解的要求.

(ii) $x_0>0$, $\alpha>0$, 研究函数 $F(\alpha)$的增减性:

$$F'(\alpha)=-x_0(x_0-2\alpha)(5x_0-6\alpha)\cdot e^{x_0(x_0-\alpha)(x_0-2\alpha)^2}$$

α	0	$\left(0, \frac{x_0}{2}\right)$	$\frac{x_0}{2}$	$\left(\frac{x_0}{2}, \frac{5x_0}{6}\right)$	$\frac{5x_0}{6}$	$\left(\frac{5x_0}{6}, +\infty\right)$
$F'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$F(\alpha)$	$e^{x_0^4}-y_0$	↘	极小：$1-y_0$	↗	极大：$e^{\frac{2x_0^4}{27}}-y_0$	↘

若在 $\alpha=0$ 处函数值 $F(0)$为正，在极大处函数值 $F\left(\frac{5x_0}{6}\right)$为负，则必有唯一解；或在 $\alpha\to+\infty$ 时，$F(+\infty)$为负，在极小处函数值 $F\left(\frac{x_0}{2}\right)$为正，则必有唯一解. 即

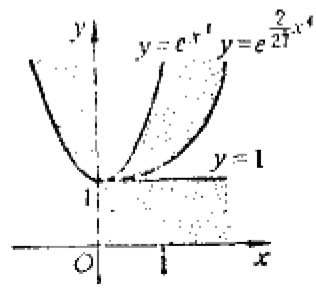
$$\begin{cases} F(0)>0, \\ F\left(\frac{5x_0}{6}\right)<0. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} F\left(\frac{x_0}{2}\right)>0, \\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty} F(\alpha)=k, \quad k<0. \end{cases}$$

亦即：$e^{\frac{2}{27}x_0^4}<y_0<e^{x_0^4}$ 或 $0<y_0<1$.

(iii) $x_0<0$, $\alpha>0$ 的情况. 由

$$F'(\alpha)=-x_0(x_0-2\alpha)(5x_0-6\alpha)\cdot e^{x_0(x_0-\alpha)(x_0-2\alpha)^2},$$

得 $F'(\alpha)>0$. $\therefore F(\alpha)$在$(0, +\infty)$上严格单调增加为使方程 $F(\alpha)=0$ 具有唯一正数解，需要 $F(0)<0$, 即 $y_0>e^{x_0^4}$.



综上所述：$x<0$ 时，$y>e^{x^4}$；$x>0$ 时，$0<y<1$ 或 $e^{\frac{2}{27}x^4}<y<e^{x^4}$，这时只有一条曲线经过 $P(x, y)$. 如图所示的阴影区域，且不包括边界.

539. 给定抛物线 C: $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}$. 过 C 上的点 $Q\left(t, \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}\right)$ 作 C 的法线. 并设 $P(x, y)$ 是 xy 平面上点. 欲使 C 仅有一条法线过 P, 试求点 P 的存在范围,并画图表示之.

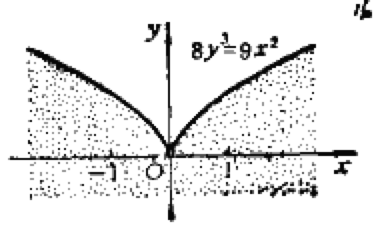
［解］ $y'=3x$, Q 处的法线方程是($t\neq 0$ 的情况)

$$y-\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3t}(x-t),$$

即 $9t^3-6yt-2x=0$. 问题化为怎样的 $P(x, y)$, 使上述变量 t 的方程有唯一解. 令 $f(t)=9t^3-6yt-2x$, 则 $f'(t)=27t^2-6y$. (当 $t=0$ 时,法线就是 y 轴).

(i) 当 $y\leqslant 0$ 时,有 $f'(t)\geqslant 0$, $\therefore f(x)$是增函数, 故 $f(t)=0$ 有唯一实数解(三次方程总有一个实数解). 即 $y\leqslant 0$ 时,仅有一条法线.

(ii) 当 $y>0$ 时, $f'(t)=3(3t+\sqrt{2y})(3t-\sqrt{2y})$, $t=-\frac{\sqrt{2y}}{3}$ 时 $f(t)$ 为极大; $t=\frac{\sqrt{2y}}{3}$ 时 $f(t)$ 为极小. 想要 $f(t)$ 有唯一解, 它的极大值和极小值必须同号. $\therefore f\left(-\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)\cdot f\left(\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)>0$, 则 $9x^2>8y^3$. 则仅有一条法线时, P 的范围需满足 $9x^2>8y^3>0$.



综(i)、(ii)讨论,即所求的范围是: $9x^2>8y^3$. 如图所示的阴影部分,不包括边界,但包含原点.

540. 求下列函数的最大值与最小值:

(1) $y=x+2\sqrt{x}$　$x\in[0, 4]$;

(2) $y=x^3-3x+5$　$x\in\left[-1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right]$;

(3) $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$　$x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(4) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$　$x\in[0, 1]$.

［分析］ 对闭区间$[a, b]$上, $f(x)$的最大(小)值求法是:

(i) 求 $f'(x)$,

(ii) 求出 $f(x)$ 的驻点与不可导点: x_1、x_2、…、x_k. (设它们是有限多个),

(iii) 函数的最大值 $M=\max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k), f(b)\}$，
函数的最小值 $m=\min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k), f(b)\}$.

［解］ (1) $y=x+2\sqrt{x}$, $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$. 当 $x\neq 0$, $y'>0$, 函数单调增.

$\therefore y_{最小}=y(0)=0$, $y_{最大}=y(4)=8$.

(2) $y=x^3-3x+5$, $y'=3x^2-3$. 令 $y'=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$ 为驻点.

$\therefore \quad y_{最小}=\min\left\{y\left(-1\frac{1}{2}\right), y(-1), y(1), y\left(2\frac{1}{2}\right)\right\}$, 即当 $x=1, y_{最小}=3$.

$y_{最大}=\max\left\{y\left(-1\frac{1}{2}\right), y(-1), y(1), y\left(2\frac{1}{2}\right)\right\}$, 即当 $x=2\frac{1}{2}$, $y_{最大}=13\frac{1}{8}$.

(3) $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$, $y'=2\sec^2x\cdot(1-\operatorname{tg}x)$. 令 $y'=0$, 得驻点为 $x=\frac{\pi}{4}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} 2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x=-\infty$. $\therefore$ 函数无最小值.

$y_{最大}=\max\left\{y(0), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$, 即当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $y_{最大}=1$.

(4) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $y'=-\frac{1}{1+x^2}<0$. 函数单调减.

$\therefore \quad y_{最大}=y(0)=\frac{\pi}{4}$; $\quad y_{最小}=y(1)=0$.

541. 试求 $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$, $a>b>0$, $x\in(0, 1)$的最大值与最小值.

［解］ $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$, $y'=\frac{(b^2-a^2)x^2+2a^2x-a^2}{x^2(1-x)^2}$.

令 $y'=0$, 解$(b^2-a^2)x^2+2a^2x-a^2=0$, 得 $x_1=\frac{a}{a+b}$, $x_2=\frac{a}{a-b}$. 其中因 $a>b>0$ $\therefore$ $x_2=\frac{a}{a-b}>1$（舍去）. $x_1=\frac{a}{a+b}$ 为驻点.

$$\lim_{x\to+0}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=+\infty, \quad \lim_{x\to1-0}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=+\infty$$

$\therefore$ 函数无最大值. $y_{最小}=(a+b)^2$, 当 $x=\frac{a}{a+b}$ 时.

542. 试求 $y=x^3-2x\cdot|x-2|$ 在区间[0, 3]上的最大值与最

小值.

［解］ 当 $x\in[0,2]$ 时，$y=x^3+2x^2-4x$，$y'_x=3x^2+4x-4$. 令 $y'=0$，有 $x_1=-2$(舍去)，$x_2=\frac{2}{3}$.

当 $x\in(2,3]$ 时，$y=x^3-2x^2+4x$，$y'_x=3x^2-4x+4=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$，无驻点.

$$\therefore\quad y_{最大}=\max\left\{y(0),\ y\left(\frac{2}{3}\right),\ y(2),\ y(3)\right\}.$$

$$y_{最小}=\min\left\{y(0),\ y\left(\frac{2}{3}\right),\ y(2),\ y(3)\right\}.$$

而 $y(0)=0$，$y(3)=21$，$y(2)=8$，$y\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{40}{27}$.

$\therefore$ 当 $x=3$，$y_{最大}=21$. 当 $x=\frac{2}{3}$，$y_{最小}=-\frac{40}{27}$.

543. 在 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，…，$\sqrt[n]{n}$，… 数列中求出最大值.

［解］ 设 $y=x^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，$y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$. 当 $x=e$ 时，$y'=0$. $0<x<e$ 时，$y'>0$；$e<x<+\infty$ 时，$y'<0$. $\therefore y<e^{\frac{1}{e}}$. 只需比较 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{3}$ 的大小. $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$，$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$，显然 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. 即数列中最大值为 $\sqrt[3]{3}$.

544. 确定数列 $\{a_n\}$ 的最大值，若

(1) $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$；

(2) $a_n=n^{10}\cdot 2^{-n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

［解］ (1) 令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+10000}$. 则 $f'(x)=\frac{10^4-x}{2\sqrt{x}\,(x+10^4)^2}$，易知 $x=10^4$ 处 $f'(x)=0$，且函数取极大值.

$\therefore \{a_n\}$ 的最大值为 $a_{10000}=\frac{100}{20000}=0.005$.

(2) 令 $f(x)=x^{10}\cdot 2^{-x}\quad(x\geqslant 1)$. 则 $f'(x)=2^{-x}\cdot(10-x\ln 2)\cdot x^9$. 易知 $x=\frac{10}{\ln 2}\approx 14.4$ 处 $f'(x)=0$，且函数取极大值. 又

$$a_{14}=\frac{14^{10}}{2^{14}},\quad a_{15}=\frac{15^{10}}{2^{15}}.\quad \max\{a_{14},\ a_{15}\}=a_{14}=14^{10}\cdot 2^{-14}.$$

$\therefore \{a_n\}$ 的最大值为 $a_{14}=14^{10}\cdot 2^{-14}$.

[说明] 在(2)的解中，a_{14} 与 a_{15} 比较，显然不可用求值的方法. $a_{14}=\frac{14^{10}}{2^{14}}=\frac{2\times 14^{10}}{2^{15}}$, $a_{15}=\frac{15^{10}}{2^{15}}$. $\frac{a_{14}}{a_{15}}=2\left(\frac{14}{15}\right)^{10}=2\left(1-\frac{1}{15}\right)^{10}$ 再用贝努利不等式讨论即可得结论.

545. 已知 $f(x)=ax^3-2ax^2+b$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 上最大值是 5, 最小值为 -11. 求 $f(x)$ 的解析式.

[解] $f(x)=ax^3-2ax^2+b$, $f'(x)=3ax^2-4ax=ax(3x-4)$.

令 $f'(x)=0$, 解得$[-2, 1]$内的驻点为 $x=0$. $f(0)=b$.

(1) 当 $a>0$ 时,

	$[-2, 0)$	0	$(0, 1]$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗	极　大	↘

$f(0)$必为最大值 $f(0)=5$, $\therefore b=5$. 而 $f_{最小}(x)=\min\{f(-2), f(1)\}$. $f(-2)=-8a-8a+5=-16a+5$, $f(1)=a-2a+5=-a+5$. $\therefore f(1)>f(-2)$, $f(-2)$为最小值. 即 $-16a+5=-11$, $a=1$. $\therefore f(x)=x^3-2x^2+5$.

(2) 当 $a<0$ 时, 同理可讨论得 $f(0)$ 为最小值. $\therefore b=-11$. $f_{最大}(x)=\max\{f(-2), f(1)\}$. $f(-2)=-16a-11$, $f(1)=-a-11$. $\therefore f(-2)$为最大, 即 $-16a-11=5$, $a=-1$.

$\therefore f(x)=-x^3+2x^2-11$.

546. 测量某个量 P. 由于仪器的精度和测量误差, 因此对 P 作的 n 次测量, 所得数据 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都有偏差, 今取 x 作为 P 的近似值, 问: x 取何值, 才能使 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 的值为最小?

[解] 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$, 则 $f'(x)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$. 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 而 $f''(x)=2n>0$, $\therefore x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 处 $f(x)$ 取极小点. 则当取这 n 个数据的算术平均值时, 才可以保证 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 为最小.

547. 有一轮船耗煤的费用与其速度立方成正比. 已知每小时10公里的速度行驶时，耗煤费用为30元/小时，而轮船在行驶时的其它费用为每小时480元. 问：在什么速度下行驶最经济?

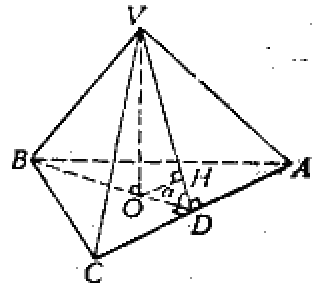
［解］ 设船速为x公里/小时，每小时耗煤费为u元，总的耗费为y元，若共行s公里，则航行时间为$\frac{s}{x}$. 由已知$u=K\cdot x^3$，每小时10公里速度行驶耗煤费为30元/小时，$30=K\cdot 10^3$，$\therefore K=0.03$.

$$\because\quad y=0.03\cdot x^3\cdot\frac{s}{x}+480\cdot\frac{s}{x},\ y=0.03sx^2+480sx^{-1}.$$

$$y'=0.06sx-480sx^{-2}.$$

令$y'=0$，解得$x=20$(公里/小时). $y''=0.06s+960sx^{-3}$，$y''(20)>0$，$\therefore x=20$ (公里/小时)为极小点. 故在速度为20公里/小时下行驶为最经济.

548. 正三棱锥的侧面积为定值，侧面与底面所成的二面角为α，问α为何值时，锥的底面中心到侧面距离有最大值.



［解］ 如图所示，$V\text{-}ABC$是正三棱锥，O是底面三角形的中心，D是AC的中点.

$$\therefore\quad BO\perp AC,\quad VD\perp AC,$$

$\angle VDB$是侧面与底面所成两面角的平面角，即$\angle VDB=\alpha$，且$AC\perp$平面VDB. 而$AC\subset$平面VAC，$\therefore$平面$VAC\perp$平面VDB. 过O作$HO\perp VD$，H为垂足，$\therefore OH\perp$平面VAC，即OH是底面中心到侧面的距离.

设$OH=d$，正三棱锥底面边长为a.

$$d=OD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}a\sin\alpha\qquad\cdots①$$

由已知正三棱锥侧面积为定值，则每个侧面积相等，且为定值. 设每个侧面积为S，而

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

由投影关系有 $S\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2$,

$$\therefore\quad a^2=\frac{12}{\sqrt{3}}S\cdot\cos\alpha\quad\cdots\quad②$$

① 式的平方:

$$d^2=\frac{1}{12}a^2\sin^2\alpha=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{\sqrt{3}}S\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}S\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

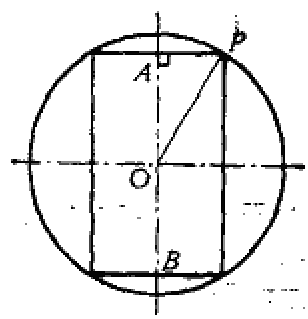
设 $y=d^2$, $y'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}S\cdot\sin\alpha(2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$. 令 $y'=0$, 即 $2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\left(\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \sin\alpha\neq 0\right)$, $\therefore\ \alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$. 又

$$y''=\frac{\sqrt{3}}{3}S\cdot\cos\alpha(9\cos^2\alpha-7),\ y''|_{\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}}=-\frac{4}{3}S<0.$$

$\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ 处函数取最大值. 故当 $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$ 时, y 有最大值, 则 d 有最大值.

549. 试求内接于一个圆球的圆柱体最大的侧面积.

[解] 设球半径为 r, 圆柱底面半径 x, 圆柱的高为 y. 如图, 作轴截面, 在直角三角形 $\triangle OPA$ 中 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=r^2$.



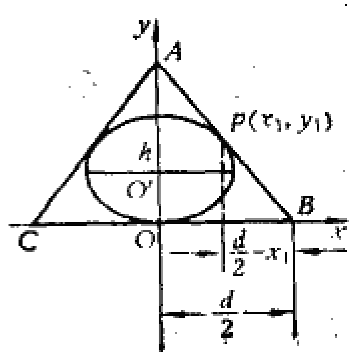
$$S_{圆柱侧面}=2\pi x\cdot y=2\pi x\sqrt{4r^2-4x^2}\qquad\cdots①$$

$$S^2=4\pi^2x^2(4r^2-4x^2).$$

$$\frac{dS^2}{dx}=8\pi^2x(4r^2-4x^2)-4\cdot 8\pi^2x^3=32\pi^2x(r^2-2x^2).$$

令 $\dfrac{dS^2}{dx}=0$, 得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$ 为极大点, 代入 ① 式, $\therefore\ S_{最大}=2\pi r^2$. 故当取内接圆柱体的底面半径为圆球半径的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍时, 可得最大侧面积为 $2\pi r^2$.

550. 已知椭圆长轴、短轴分别为 a, b, 若一底为 d, 高为 h 的等腰三角形外切于椭圆, 且底边与椭圆长轴平行, 问: 高取何值, 等腰三角形面积最小.



［解］ 如图所示，取等腰三角形底的中点为原点，则椭圆方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1 \qquad \cdots①$$

切点 $P(x_1, y_1)$，切线方程为：

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{(y_1-b)(y-b)}{b^2}=1 \quad (x_1\neq 0) \qquad \cdots②$$

令②式中 $y=0$，即得 $x=\frac{a^2y_1}{bx_1}$. $OB=\frac{d}{2}=\frac{a^2y_1}{bx_1}$，其中 d 是等腰三角形底的长. 由 $P(x_1, y_1)$ 为在椭圆上的动点，在②式中，令 $x=0$ 解得 $h=\frac{by_1}{y_1-b}$.

故外接等腰三角形面积：

$$S=\left|\frac{1}{2}dh\right|=\left|\frac{a^2y_1}{bx_1}\cdot\frac{by_1}{y_1-b}\right|=\left|\frac{aby_1^2}{(y_1-b)\sqrt{2by_1-y_1^2}}\right|.$$

为了求导方便，求 $\frac{1}{S^2}$ 的极大值，切点 P 坐标为(x, y)，则

$$\frac{1}{S^2}=\frac{(y-b)^2\cdot(2by-y^2)}{a^2b^2\cdot y^4}=\frac{1}{a^2b^2}\cdot(-1+4by^{-1}-5b^2y^{-2}+2b^3y^{-3}).$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{S^2}\right)}{dy}=\frac{1}{a^2b^2}(-4by^{-2}+10b^2y^{-3}-6b^3y^{-4})$$

$$=\frac{-2}{a^2by^4}(y-b)(2y-3b).$$

由于 $y=b$ 不合题意，而 $y=\frac{3}{2}b$ 时是 $\frac{1}{S^2}$ 的极大点纵坐标. 于是，$h=\frac{by}{y-b}=3b$ 时，等腰三角形面积最小 $S_{\min}=3\sqrt{3}ab$.

551. **最初质量为 m_0 的雨滴，在重力的作用下下落，由于蒸发而减少质量，并且减少的质量与时间成正比（比例常数为 k），从它下落开始经过多少秒时，动能达到最大？动能为多少？**

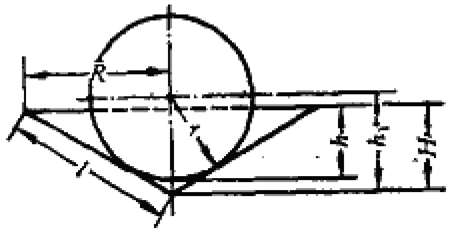
［解］ $v_t=gt$. $E_{动}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(m_0-kt)\cdot g^2t^2$.

$$E'_{动}=g^2\cdot t\cdot\left(m_0-\frac{3}{2}kt\right).$$

当 $t_1=0$，$t_2=\frac{2m_0}{3k}$ 时，$E'_{动}=0$. 又 $E''_{动}=m_0g^2-3g^2kt$. $E''_{动}(t_1)>0$，$\therefore t_1=$

0 时为极小. $E''_{动}(t_2)=m_0g^2-2m_0g^2<0$. $E_{动}\left(\frac{2m_0}{3k}\right)=\frac{2}{27}\cdot\frac{g^2m_0^3}{k^2}$ 为极大值，故当 $t=\frac{2m_0}{3k}$ 时，雨滴的动能最大，动能为 $\frac{2g^2m_0^3}{27k^2}$.

552. 一个底面半径为 R, 高为 H 的倒圆锥形容器，倒入水且注满，将一个重球放入容器，问球的半径等于多少时，能使溢出的水最多？



［解］ 设球的半径为 r, 容器的母线长为 l, 没入水中球缺的高为 h, 球心到锥顶距离为 h_1.

$$h_1=\frac{l}{R}\cdot r,\quad h=r+H-\frac{l}{R}r=\frac{R-l}{R}r+H \qquad \cdots①$$

由 ① 得 $h'_r=\frac{R-l}{R}$, 球缺的体积 $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$.

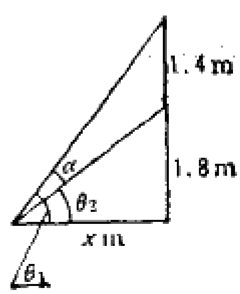
$$\begin{aligned}V'_r&=\frac{2}{3}\pi h(3r-h)h'_r+\frac{1}{3}\pi h^2(3-h'_r)\\&=\pi h(2rh'_r-hh'_r+h)=\pi h\left(2r\frac{R-l}{R}-h\frac{R-l}{R}+h\right)\\&=\frac{\pi h}{R}(2Rr-2rl+hl).\end{aligned}$$

令 $V'_r=0$, 得 $r=\frac{hl}{2l-2R}$, 代入 ①, $h=\frac{R-l}{R}\cdot\frac{hl}{2(l-R)}+H$, 解得 $h=\frac{2HR}{2R+l}$.

$$\therefore\quad r=\frac{HRl}{(l-R)(2R+l)}.$$

经检验，当 $r=\frac{HRl}{(l-R)(2R+l)}$ 时，溢出的水最多.

553. 一幅图画 1.4 m 高，使画的下端在人眼睛的水平线 1.8 m 高处. 问观察者应该离图画多远的地方观察最好？



［分析］ 观察最好，即是观察者对画的视角 α 为最大.

［解］ 设观察者离墙 x m 远，观察者对画的视角

为 α. 如图，$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{3.2}{x}$，$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{1.8}{x}$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\theta_1-\theta_2)=\frac{\frac{3.2}{x}-\frac{1.8}{x}}{1+\frac{3.2\times1.8}{x^2}}=\frac{1.4x}{x^2+5.76}.$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1.4x}{x^2+5.76}.\quad \alpha'_x=\frac{8.064-1.4x^2}{(x^2+5.76)^2+1.96x^2}.$$

令 $\alpha'_x=0$，得 $x=2.4$(m)．经检验，当 $x=2.4$ m 时，观察者的视角为最大。故当观察者离墙脚 2.4 m 时，视角为最大。

(3) 函数的凸性

554．求下列函数的下凸、上凸区间：

(1) $y=x^4-12x^3+48x^2-50$； (2) $y=(x+1)^4+e^x$.

［解］ (1) $y=x^4-12x^3+48x^2-50$．$y'=4x^3-36x^2+96x$，

$y''=12x^2-72x+96=12(x^2-6x+8)$．$y''=0$ 的点是 $x=2$，$x=4$.

当 $x<2$，$y''>0$，$\therefore$ $(-\infty,2)$ 为函数的下凸区间．$2<x<4$，$y''<0$，$\therefore$ $(2,4)$ 为函数的上凸区间．$x>4$，$y''>0$，$\therefore$ $(4,+\infty)$ 为函数的下凸区间.

(2) $y=(x+1)^4+e^x$．$y'=4(x+1)^3+e^x$，

$y''=12(x+1)^2+e^x>0$.

$\therefore$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为函数的下凸区间.

555．求函数 $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 的拐点.

［解］ $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$，$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$．$f''(x)$ 无零点，当 $x=-1$ 时 $f''(x)$ 不存在.

显然，当 $x>-1$ 时，$f''(x)<0$；当 $x<-1$ 时，$f''(x)>0$．$\therefore$ $x=-1$，$y=0$ 是函数的拐点.

556．求下列函数的下凸、上凸区间及拐点：

(1) $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a>0)$； (2) $y=e^{\sin x}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

[解] (1) $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a>0)$.

$$y'=\frac{x^4+9a^2x^2}{(x^2+3a^2)^2},\quad y''=\frac{6a^2x(9a^2-x^2)}{(x^2+3a^2)^3}.$$

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=3a$, $x_3=-3a$. 当 $-\infty<x<-3a$, $y''>0$, ∴ $(-\infty, -3a)$是函数的下凸区间.

$-3a<x<0$, $y''<0$, ∴ $(-3a, 0)$是函数的上凸区间.

$0<x<3a$, $y''>0$, ∴ $(0, 3a)$是函数的下凸区间.

$3a<x<+\infty$, $y''<0$, ∴ $(3a, +\infty)$是函数的上凸区间.

由上面可见,点$\left(-3a, -\frac{9a}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(3a, \frac{9a}{4}\right)$是函数的拐点.

(2) $y=e^{\sin x}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. $y'=\cos x\cdot e^{\sin x}$,

$y''=e^{\sin x}\cdot(\cos^2 x-\sin x)$. 令 $y''=0$, 解 $1-\sin^2 x-\sin x=0$, 解得 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sin x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$(舍去).

∴ $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y''>0$. ∴ $\left[-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$是函数的下凸区间. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $y''<0$. ∴ $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$是函数的上凸区间.

由上面可见, $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$是函数的拐点.

557. h 取何值时,函数 $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$在 $x=\pm K$ 处是拐点.

[解] $y'=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $y''=\frac{-2h^3}{\sqrt{\pi}}(1-2h^2x^2)e^{-h^2x^2}$.

解 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2h}$.

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2h}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2h}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2h}, \frac{\sqrt{2}}{2h}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2h}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2h}, +\infty\right)$
y''	+	0	−	0	+
y	下凸	拐点	上凸	拐点	下凸

在 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2h}$ 处函数有拐点，从而得 $h=\left|\frac{\sqrt{2}}{2k}\right|$.

558．已知函数 $f(x)=x^n+px+q$ （$n\in N$ 且 $n\geqslant 2$，p，q 为常数）．求证：(1) 若 n 为偶数，则 $f(x)=0$ 不可能有二个以上实根．(2) 若 n 为奇数，则 $f(x)=0$ 不可能有三个以上实根．

［证］ $f'(x)=nx^{n-1}+p$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$．当 n 为偶数时，$f''(x)\geqslant 0$(仅当 $x=0$ 时为 0)，$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是下凸函数，因此$f(x)=0$ 至多有两个相异实根，如图 1 所示．

当 n 为奇数时，在$(-\infty,0)$内 $f''(x)<0$．在$(0,+\infty)$内 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$内是上凸的，在$(0,+\infty)$内是下凸的．因此 $f(x)=0$ 至多有三个不同的实根如图 2 所示．

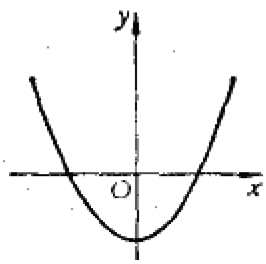


图　1

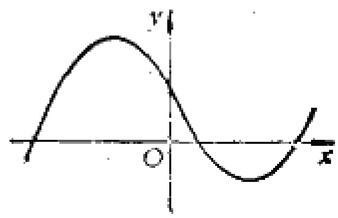


图　2

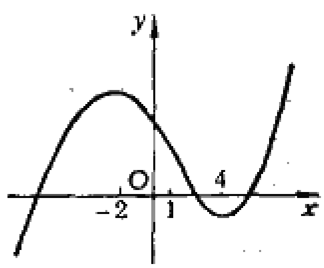
559．已知三次方程 $x^3-3x^2-24x-a=0$ 有且仅有两个不同的正根，(注：这时显然还有一个负根)．求 a 的范围．

［解］ 令 $f(x)=x^3-3x^2-24x-a$．

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x-4)(x+2),$$

其零点是 $x=4$ 和 $x=-2$，并且易知 $x=4$ 是极小值点，$x=-2$ 是极大值点．$f''(x)=6x-6$，在$(-\infty,1)$内 $f''(x)<0$，在$(1,+\infty)$内 $f''(x)>0$．

所以，$f(x)$在$(-\infty,1)$是上凸的，在$(1,+\infty)$内是下凸的，其图形是：



可见，欲使 $f(x)=0$ 有且仅有两个不同的正根的条件是 $f(0)>0$，$f(4)$

<0 即 $\begin{cases}0-3\cdot0-24\cdot0-a>0\\4^3-3\cdot4^2-24\cdot4-a<0.\end{cases}$ $\begin{cases}a<0\\a>-80.\end{cases}$ 解得 $-80<a<0$.

560. 求证 $\dfrac{x_1^m+x_2^m}{2}\geqslant\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^m$ $(m\in N,\ x_1,\ x_2>0)$.

［证］ 设 $f(x)=x^m$，则 $f''(x)=m(m-1)x^{m-2}$，由 $x>0$，$m>1$，得 $f''(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $x>0$，m 是大于等于 2 的自然数时，是下凸函数，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

即有
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^m\leqslant\frac{x_1^m+x_2^m}{2}.$$

561. 求证 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 其中 $x_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$(即算术平均不小于几何平均).

［证］ 两边取对数，问题归结为求证

$$\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)\leqslant\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

设 $f(x)=\ln x$，由 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x)<0$. $\therefore f(x)$是上凸函数. 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)],$$

即
$$\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n).$$

两边取指数，得

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\quad x_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

562. 求证：$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$

$$x_i>0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

［证］ 把不等式变形，问题即归结为求证

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\frac{1}{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}.$$

设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0\ (x>0)$. $\therefore f(x)$在$(0,\ +\infty)$内是下凸

函数，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)],$$

即

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right),$$

得：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2.$$

563．求证：若对任意 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)>0$，则对任意 n 个正数 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}P_i=1$，以及在 (a,b) 内任取 n 个点 x_1、x_2、…、x_n，有 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}P_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P_if(x_i)$。

［证］ 当 $n=2$ 时，由 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 是下凸函数，有：

$$f(P_1x_1+P_2x_2)\leqslant P_1f(x_1)+P_2f(x_2).$$

假设 $n=k-1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{k-1}P_i=1$，有

$$f(P_1x_1+\cdots+P_{k-1}x_{k-1})\leqslant P_1f(x_1)+P_2f(x_2)+\cdots+P_{k-1}f(x_{k-1}),$$

当 $n=k$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{k}P_i=1$，由 $P_1+\cdots+P_{k-1}=1-P_k$，

$$\begin{aligned}&P_1f(x_1)+P_2f(x_2)+\cdots+P_{k-1}f(x_{k-1})+P_kf(x_k)\\&=[P_1f(x_1)+P_2f(x_2)+\cdots+P_{k-1}f(x_{k-1})]+P_kf(x_k)\\&=(1-P_k)\left[\frac{P_1}{1-P_k}f(x_1)+\frac{P_2}{1-P_k}f(x_2)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\frac{P_{k-1}}{1-P_k}f(x_{k-1})\right]+P_kf(x_k),\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{P_i}{1-P_k}=1$，满足假定。

$$\begin{aligned}\therefore\quad&(1-P_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{P_i}{1-P_k}f(x_i)+P_kf(x_k)\\&\geqslant(1-P_k)f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}P_ix_i}{1-P_k}\right)+P_kf(x_k)\\&\geqslant f\left[(1-P_k)\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}P_ix_i}{1-P_k}+P_k\right]=f\left(\sum_{i=1}^{k}P_ix_i\right).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f\left(\sum_{i=1}^{n}P_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P_if(x_i).$$

564. 设 $P_i>0$, $x_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $r>0$, 则切比晓夫不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n}P_ix_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}P_ix_i^{2r}\right)$ 成立.

［证］ 设 $P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=k$, 则

$$\frac{1}{k}P_1+\frac{1}{k}P_2+\cdots+\frac{1}{k}P_n=1.$$

对 $f(x)=x^2$, 有 $f''(x)>0$, 利用上一题的结论, 得

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}P_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P_if(x_i),$$

即
$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i}{k}\cdot x_i\right)\right]^2\leqslant 1\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i}{k}\right)\cdot x_i^2,$$

亦即
$$\left(\sum_{i=1}^{n}P_ix_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\sum_{i=1}^{n}P_ix_i^2.$$

565. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $g'(x)\neq 0$, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 求证: (1) 当 $g'(x)$ 与 $\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]'$ 同号时, 在 (a, b) 上有 $f(x)<g(x)$. (2) 当 $g'(x)$ 与 $\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]'$ 异号时, 在 (a, b) 上有 $f(x)>g(x)$.

［证］ 设 $g(x)=t$, $g(a)=t_1$, $g(b)=t_2$. $\because$ $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $\therefore$ $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g'(x)\neq 0$. $\therefore$ $t=g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在反函数. 设 $x=g^{-1}(t)$, $a=g^{-1}(t_1)$, $b=g^{-1}(t_2)$.

再设 $F(t)=f[g^{-1}(t)]$, 则

$$F'(t)=\frac{d}{dt}f[g^{-1}(t)]=\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad F''(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]=\frac{\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]'}{g'(x)}.$$

不妨设 $g'(x)>0$, 这时 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的增函数. $\therefore$ $g^{-1}(t)$ 是 $[t_1, t_2]$ 上的增函数. 又 $t_1<t<t_2$, $\therefore$ $g^{-1}(t_1)<g^{-1}(t)<g^{-1}(t_2)$ 即 $a<x<b$.

(i) 若 $\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]'<0$, 则 $F''(t)<0$, $F(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上是上凸函数, $\therefore$ 在 (t_1, t_2) 上有 $F(t)>t$. $\because$ $t=g(x)$, $F(t)=f(x)$, $\therefore$ 在 (a, b) 上有 $f(x)>g(x)$.

(ii) 若 $\left[\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right]'>0$，则 $F''(t)<0$，$F(t)$在$[t_1, t_2]$上为下凸函数，∴ 在(t_1, t_2)上有 $F(t)<t$．∵ $t=g(x)$，$F(t)=f(x)$，∴ 在(a, b)上有$f(x)<g(x)$．

同理可证 $g'(x)<0$ 的情况也有类似结论．

(4) 函 数 图 象

566．作出 $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$ 的图象．

［解］ $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$．

(1) 函数定义域为 $x\neq0$ 的一切实数．

(2) $y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}$，$y''=\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{9}{x^4}$．

由 $y'=\dfrac{x^3-7x+6}{2x^3}=0$ 解得 $x=1, 2, -3$．由 $y''=\dfrac{7x-9}{x^4}=0$ 解得 $x=\dfrac{9}{7}$．

(3) 列表：

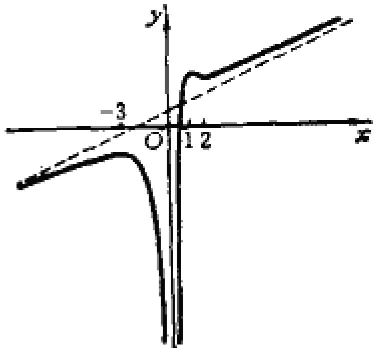
	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0
y'	+	0	−	不存在
y''	−	−	−	不存在
y	↗	极大 $-\dfrac{11}{6}$	↘	不存在
凸凹性	上凸区间			

	$(0, 1)$	1	$\left(1, \dfrac{9}{7}\right)$	$\dfrac{9}{7}$	$\left(\dfrac{9}{7}, 2\right)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大 $\dfrac{7}{2}$	↘	拐点	↘	极小 $\dfrac{27}{8}$	↗
凸凹性	上凸区间				下凸区间		

拐点是 $\left(\frac{9}{7},\ 2\frac{519}{1134}\right)$.

(4) 渐近线　a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^3}=\frac{1}{2}$,　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-3}{2x^2}=1$, ∴ 函数有斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x+1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}=-\infty$, ∴ 函数有垂直渐近线 $x=0$.



567. 作出 $y=\frac{x^4-1}{x^3+1}$ 的图象.

[分析]　将函数约简为 $y=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-x+1}$ $(x\neq -1)$, 更便于讨论.

[解]　(1) 函数的定义域为 $x\neq -1$ 的一切实数.

(2) $y=x-\frac{1}{x^2-x+1}$.

$$y'=1+\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^4-2x^3+3x^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^2(x^2-2x+3)}{(x^2-x+1)^2}.$$

由 $\frac{x^2}{(x^2-x+1)^2}\geqslant 0$, $x^2-2x+3>0$, ∴ $y'\geqslant 0$.

$$y''=\frac{6x(1-x)}{(x^2-x+1)^3}.$$

由 $y'=0$ 解得 $x=0$. 由 $y''=0$ 解得 $x=0$, $x=1$.

(3) 列表:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+		+	0	+		+
y''	−		−		+		−
y	↗		↗	拐点	↗	拐点	↗

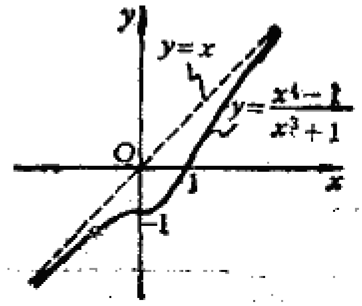
拐点为 (0, −1), (1, 0)

(4) 渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x(x^2-x+1)}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2-x+1}\right)=0.$$

∴ 有斜渐近线 $y=x$.



568. 作出函数 $y=(x-1)^2+\frac{1}{x-1}$ 的图象.

[解] (1) 函数的定义域是 $x\neq 1$ 的一切实数.

(2) $y'=2(x-1)-\frac{1}{(x-1)^2}$; $y''=2+\frac{2}{(x-1)^3}$.

令 $y'=0$, 得 $x=1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. $y''=0$, 得 $x=0$.

(3) 列表:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$\left(1,1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)$
y'	−		−	−	0	+
y''	+	0	−	+		+
y	↘	拐点	↘	↘	极小 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$	↗
	下凸		上凸	下凸区间		

拐点为(0, 0).

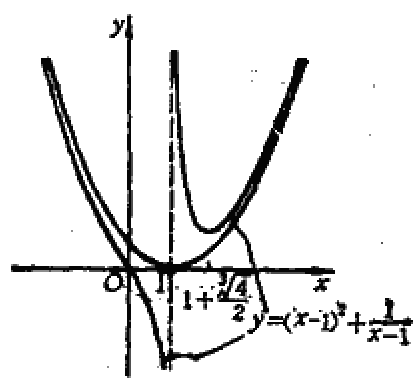
(4) 渐近线　无斜渐近线.

$$\lim_{x\to 1+0}\left[(x-1)^2+\frac{1}{x-1}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left[(x-1)^2+\frac{1}{x-1}\right]=-\infty.$$

函数有 $x=1$ 垂直渐近线. 再由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{(x-1)^2}=1,$$



所以当 $x\to\infty$ 时, $y=(x-1)^2\frac{1}{x-1}$ 的图象与 $y=(x-1)^2$ 的图象接近.

569. 作出 $y=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ 的图象，其中 $x\neq0$；而当 $x=0$ 时定义 $y=1$.

［解］ (1) $y=\begin{cases}1-xe^{-\frac{2}{x}}, & x>0\\ 1, & x=0\\ 1-x, & x<0.\end{cases}$

$$y'=\begin{cases}-\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}, & x>0\\ -1, & x<0.\end{cases}\qquad y''=\begin{cases}-\frac{4}{x^3}\cdot e^{-\frac{2}{x}}, & x>0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

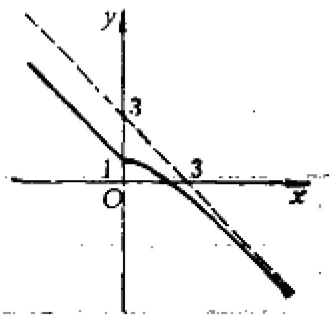
由上面的结果知道 y 无极值、无拐点．$x>0$ 时函数是上凸．

(2) 渐近线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\cdot e^{-\frac{2}{x}}}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^{-\frac{2}{x}}+x\right)$$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=3.$$



∴ 有斜渐近线 $y=-x+3$. 适当取些特殊点得函数的图象：

570. 作出 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的图象.

［解］ (1) 函数的定义域为 $x\neq1$ 的一切实数.

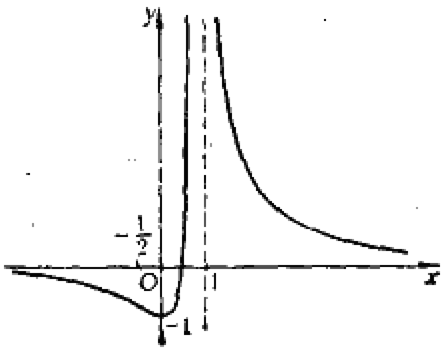
(2) $y'=-\dfrac{2x}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}$. 令 $y'=0$ 解得 $x=0$; 令 $y''=0$ 解得 $x=-\dfrac{1}{2}$.

(3) 列表：

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	(0, 1)	(1, +∞)
y'	−	−	−	0	+	−
y''	−	0	+	+	+	+
y	↘	拐点	↘	极小 −1	↗	↘
	上凸		下　凸			下凸

拐点是$\left(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9}\right)$.

(4) 渐近线



$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty,$$

∴ 有垂直渐近线 $x=1$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,$$

∴ 有水平渐近线 $y=0$.

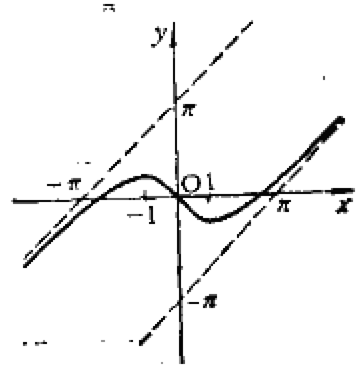
571. 作出 $y=x-2\operatorname{arc\,tg}x$ 的图象.

［解］ (1) 函数的定义域为一切实数. 是奇函数.

(2) $y'=1-\frac{2}{1+x^2}$; $y''=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$. 令 $y'=0$, 得 $x=\pm1$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大 $-1+\frac{\pi}{2}$	↘	拐点	↘	极小 $1-\frac{\pi}{2}$	↗

拐点是 (0, 0).



(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2\operatorname{arc\,tg}x}{x}=1,$

$\lim_{x\to+\infty}[(x-2\operatorname{arc\,tg}x)-x]=-\pi,$

$\lim_{x\to-\infty}[(x-2\operatorname{arc\,tg}x)-x]=\pi,$

∴ 函数有斜渐近线 $y=x-\pi$ 和 $y=x+\pi$.

572. 作出参数方程 $\begin{cases}x=t^3-3\pi\\ y=t^3-6\operatorname{arc\,tg}t\end{cases}$ 的图象.

［解］ (1) 函数的定义域为一切实数.

(2) $y'_x=\dfrac{3t^2-\dfrac{6}{1+t^2}}{3t^2}=\dfrac{(t^2-1)(t^2+2)}{t^2(1+t^2)}$;

$$y''_{xx}=\frac{4t(2t^2+1)}{3t^2\cdot(t^2+t^4)^2}=\frac{4(2t^2+1)}{3t^5(1+t^2)^2}.$$

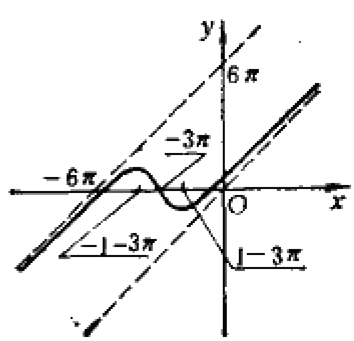
令 $y'_x=0$, 得 $t=1$ $\left(x=1-3\pi,\ y=1-\frac{3\pi}{2}\right)$; $t=-1\left(x=-1-3\pi,\ y=-1+\frac{3\pi}{2}\right)$. 此外 $t=0$ 为不可导点.

(3) 列表:

t	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$
x	$(-\infty, -1-3\pi)$	$-1-3\pi$	$(-1-3\pi, -3\pi)$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	↗	极大 $-1+\frac{3\pi}{2}$	↘
	上 凸		

t	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x	-3π	$(-3\pi, 1-3\pi)$	$1-3\pi$	$(1-3\pi, +\infty)$
y'	不存在	$-$	0	$+$
y''	不存在	$+$	$+$	$+$
y	拐 点	↘	极小 $1-\frac{3\pi}{2}$	↗
		下 凸		

(4) 渐近线



$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3-6\operatorname{arc\,tg}t}{t^3-3\pi}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(t^3-6\operatorname{arc\,tg}t-t^3+3\pi)=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$$

$$=\lim_{t\to-\infty}(t^3-6\operatorname{arc\,tg}t-t^3+3\pi)=6\pi.$$

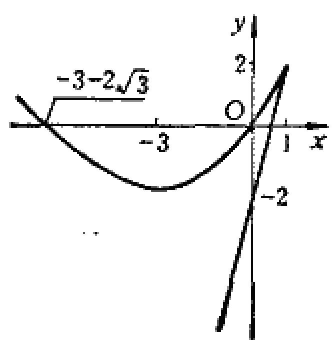
$\therefore y=x,\ y=x+6\pi$ 为渐近线.

573. 作出参数方程 $\begin{cases}x=2t-t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$ 的图象.

［解］ (1) $x'_t=2(1-t)$, $\therefore t=1$ 时 x 达最大, $x(1)=1$, $y'_t=3(1-t^2)$, 又, $y'_x=\frac{3}{2}(1+t)$, $y''_{xx}=\frac{3}{4(1-t)}$. 由上述分析, $t\in(-\infty,1)$ 时 x 从 $-\infty$ 趋于 1; $t\in(1,+\infty)$ 时 x 从 1 趋于 $-\infty$. 因此图形分为两支.

(2) 列表:

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$-\infty\to-3$	-3	$-3\to1$	1	$1\to-\infty$
y'_x	$-$	0	$+$		$+$
y''_x	$+$		$+$		$-$
y	↘	极小 -2	↗		↗



574. 作出参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}$ 的图象.

［解］ (1) 函数的定义域为一切实数.

(2) $y'_x=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$.

$$y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}.$$

令 $y'_x=0$, 得 $t=1$, $(x=5,\ y=-1)$; $t=-1$, $(x=-3,\ y=3)$. 令 $y''_{x^2}=0$, 得 $t=0$, $(x=1,\ y=1)$. 又由 $x'_t=3t^2+3>0$, 得 $x(t)=t^3+3t+1$ 是严

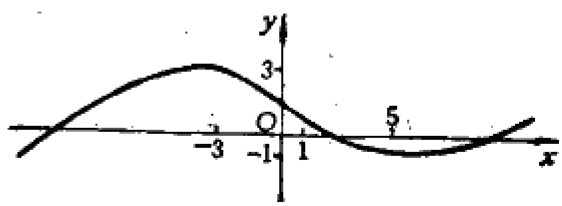
格增加的。

(3) 列表:

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大 3	↘	拐点	↘	极小 -1	↗

拐点是 (1, 1)。

(4) 渐近线



$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3-3t+1}{t^3+3t+1}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{t\to\infty}-6t=\infty.$$

∴ 无渐近线.

(5) 曲率、渐屈线

575. 求证曲线 $y=f(x)$ 在曲线上一点 P 的曲率等于 $|y''\cos^3\theta|$, 其中 θ 是 P 点的切线的倾角.

[证] 已知: $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, 由 $y'=\operatorname{tg}\theta$,

$$\therefore\quad k=|y''|\cdot\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=|y''|\cdot\frac{1}{|\sec^3\theta|}=|y''\cdot\cos^3\theta|.$$

576. 证明曲线在任意一点的曲率 k, 能用 $k=\left|\dfrac{d\sin\theta}{dx}\right|$ 表示, 其中 θ 为该点切线的倾角.

[证] 由导数的几何意义 $y'_x=\operatorname{tg}\theta$, 其中 θ 是曲线上一点的切线倾角, $\theta=\operatorname{arc\,tg}y'_x$.

两边求导得:

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{y''_{xx}}{1+y'^2_x}.$$

$$\therefore \quad \left|\frac{d\sin\theta}{dx}\right|=\left|\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}\right|=\left|\frac{1}{\sec\theta}\cdot\frac{y''_{x^2}}{1+y'^2_x}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{y''_{xx}}{1+y'^2_x}\right|=\left|\frac{y''_{xx}}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}\right|=k.$$

577. 求 $y=\ln\sec x$ 在任意一点的曲率.

［解］ $y'_x=\mathrm{tg}\,x$. $y''_{xx}=\sec^2 x$.

$$\therefore \quad k=\frac{y''_{xx}}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sec^2 x}{(1+\mathrm{tg}^2 x)^{\frac{3}{2}}}. \quad \therefore \quad \text{曲率 } k=|\cos x|.$$

578. 求 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 的曲率$(a>0)$.

［解］ $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=-\mathrm{tg}\,t$, $\quad y''_{xx}=\dfrac{\sec^2 t}{3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{1}{3a}\sec^4 t\csc t$.

$$k=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{3a}|\sec^4 t\cdot\csc t|}{(1+\mathrm{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a}|\sec t\cdot\csc t|.$$

579. 求 $\begin{cases} x=2a\cos t-a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$ 在曲线上某一点的曲率.

［解］ $y'_x=\dfrac{2a\cos t-2a\cos 2t}{-2a\sin t+2a\sin 2t}=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{\sin 2t-\sin t}$.

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{3-3\cos t}{(\sin 2t-\sin t)^2}}{2a(\sin 2t-\sin t)}=\frac{3(1-\cos t)}{2a(\sin 2t-\sin t)^3}.$$

$$\therefore \quad k=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{3(1-\cos t)}{2a(\sin 2t-\sin t)^3}}{\dfrac{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{(\sin 2t-\sin t)^3}}=\frac{3(1-\cos t)}{4\sqrt{2}a(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

580. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在顶点处的曲率.

［解］ $y'_x=-\dfrac{xb^2}{ya^2}$, $y''_{xx}=-\dfrac{b^2(y-xy'_x)}{a^2y^2}$.

∴ 椭圆上除顶点外的曲率为

$$k=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y'^2_x)^{3/2}}=\frac{\left|\dfrac{b^2\left(y+\dfrac{x^2b^2}{ya^2}\right)}{a^2y^2}\right|}{\left(1+\dfrac{x^2b^4}{y^2a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\dfrac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4|y^3|}}{\dfrac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{|y|a^2\cdot y^2a^4}}$$

$$=\frac{a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots①$$

(i) 由于$(a, 0)$处不可导，但由椭圆曲率变化的连续性可得$(a, 0)$处的曲率为:

$$\lim_{y\to 0}\frac{a^2b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{y\to 0}\frac{a^2b^2(a^2y^2+a^2b^2)}{(a^4y^2+a^2b^4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{b^2}.$$

同理，$(-a, 0)$处的曲率也为 $\frac{a}{b^2}$.

(ii) $(0, b)$、$(0, -b)$处的曲率: 由式 ① 得 $K=\frac{b^2}{a}$.

581. 求 $x^3+y^3=3axy$ 在 $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ 处的曲率$(a>0)$.

[解] 两边求关于 x 的导数: $3x^2+3y^2y'_x=3ay+3ax\cdot y'_x$.

$$y'_x=\frac{ay-x^2}{y^2-ax};\quad y''_{xx}=\frac{(ay'_x-2x)(y^2-ax)-(2y\cdot y'_x-a)(ay-x^2)}{(y^2-ax)^2}.$$

故在 $p_0=\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$处的导数为

$$y'_x|_{p_0}=-1,$$

$$y''_{xx}|_{p_0}=\frac{(-a-3a)\left(\frac{9}{4}a^2-\frac{3}{2}a^2\right)-(-3a-a)\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{9}{4}a^2\right)}{\left(\frac{9}{4}a^2-\frac{3}{2}a^2\right)^2}$$

$$=-\frac{32}{3a}.$$

$$\therefore\quad K=\frac{\left|-\dfrac{32}{3a}\right|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{32}{6\sqrt{2}\,a}=\frac{8\sqrt{2}}{3a}.$$

582. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切线夹在坐标轴间的线段被切

点所平分，求这些切点的曲率半径.

［解］ 先考虑第一象限的切点 P：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

设 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆上某一点，则该点的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

与坐标轴交点是 $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. 若中点即为切点，则

$$x_0=\frac{a^2}{2x_0},\quad y_0=\frac{b^2}{2y_0}.$$

解得 $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}b$. $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$.

下面求 P 的曲率半径.

$$y'_x=-\frac{xb^2}{ya^2},\quad \therefore\quad y'_x\Big|_P=-\frac{b}{a}$$

$$y''_{xx}=-\frac{b^2\left[y+\frac{x^2b^2}{ya^2}\right]}{a^2y^2}.\quad \therefore\quad y''_{xx}\Big|_P=-\frac{2\sqrt{2}\,b}{a^2}.$$

$$r=\frac{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_{xx}},$$

P 的曲率半径

$$r=\left|\frac{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{2\sqrt{2}\,b}{a^2}}\right|=\frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{2\sqrt{2}\,ab}$$

由对称性得，其余切点的曲率半径均为

$$r=\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\,ab}.$$

583. 求证伯努利双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ 的曲率半径$(a>0)$与对应点的极半径长成反比.

［解］ 对 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ 两边求关于 φ 的导数：

$$2\rho\cdot\rho'_\varphi=-2a^2\sin 2\varphi,\quad \rho'_\varphi=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{\rho},$$

$$\rho''_{\varphi\varphi}=-\frac{2a^2\cos 2\varphi\cdot\rho-\rho'_\varphi a^2\sin 2\varphi}{\rho^2}=-\frac{2a^4\cos^2 2\varphi+a^4\sin^2 2\varphi}{\rho^3}.$$

$$r=\frac{(\rho^2+\rho'^2_\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2_\varphi-\rho\cdot\rho''_{\varphi\varphi}}$$

$$=\frac{\left[a^2\cos 2\varphi+\dfrac{a^4\sin^2 2\varphi}{a^2\cos 2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos 2\varphi+\dfrac{2a^4\sin^2 2\varphi}{a^2\cos 2\varphi}+\dfrac{2a^4\cos^2 2\varphi+a^4\sin^2 2\varphi}{a^2\cos 2\varphi}}$$

$$=\frac{1}{3}a\left(\frac{1}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\therefore\quad \rho\cdot r=\frac{1}{3}a\left(\frac{1}{\cos 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot(\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}a^2$, ρ 与 r 之长成反比例.

584. 求 $y=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ 处的曲率圆.

［解］ $y'_x=\sec^2 x$. $\therefore\quad y'_x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$.

$$y''_{xx}=2\sec^2 x\cdot\operatorname{tg} x.\quad\therefore\quad y''_{xx}\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=4.$$

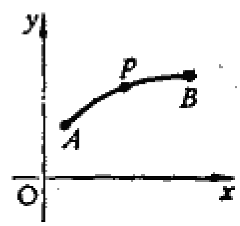
曲率中心$(\alpha,\ \beta)$为

$$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{2\cdot(1+4)}{4}=\frac{\pi}{4}-2.5;$$

$$\beta=1+\frac{1+4}{4}=2.25\quad\text{（见说明）}.$$

曲率半径为 $$r=\frac{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{xx}}=\frac{(1+4)^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

$$\therefore\quad\left(x-\frac{\pi}{4}+2.5\right)^2+(y-2.25)^2=\frac{125}{16}.$$



［说明］ 设曲线 $y=f(x)$ 的 P 处曲率圆的圆心(即曲率中心)坐标为$(\alpha,\ \beta)$，则曲率圆的方程为:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. 两边求一阶、二阶导数，则分别有:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,\quad 及\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

移项整理得 $$\beta=y+\frac{1+y'^2_x}{y''_{xx}}.$$

同理有
$$\alpha=x-\frac{y'_x\cdot(1+y'^2_x)}{y''_{xx}}.$$

585. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & -\infty<x\leqslant 1,\\ ax^2+bx+c, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ 问：a、b、c 取何值，使 $y=f(x)$ 的曲率处处连续.

［解］ 由 $f(x)$ 连续得 $f(1)=1=\lim\limits_{x\to1+0}(ax^2+bx+c)=a+b+c$.
即
$$a+b+c=1 \qquad \cdots①$$
由 $f(x)$ 可导得 $f'(x)=3x^2$，$x<1$，$f'(x)=2ax+b$，$x>1$，考虑函数在 $x=1$ 处可导，则
$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}=3,$$
$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{a(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)+c-(a+b+c)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{(2a+b)\Delta x+a\Delta x^2}{\Delta x}=2a+b.$$
$$\therefore\quad 2a+b=3 \qquad \cdots②$$
在 $x=1$ 处的曲率是
$$k=\frac{y''_{xx}}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}\dfrac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}}, & x<1,\\[2ex] \dfrac{2a}{[1+4a^2x^2+(3-2a)^2+4a(3-2a)x]^{3/2}}, & x>1.\end{cases}$$
要使在 $x=1$ 处曲率连续，则有
$$\frac{6\cdot1}{(1+9\cdot1^4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a}{(1+4a^2+9-12a+4a^2+12a-8a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
解得 $a=3$. 代入 ①、② 式，得 $a=3$，$b=-3$，$c=1$ 时，$y=f(x)$ 的曲率处处连续.

586. 求抛物线 $y=2x^2$ 的渐屈线方程.

［解］ 抛物线 $y=2x^2$ 的曲率中心 (α,β) 是
$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'_x(1+y'^2_x)}{y''_{xx}},\\[2ex] \beta=y+\dfrac{1+y'^2_x}{y''_{xx}}.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}\alpha=-16x^3,\\[1ex] \beta=\dfrac{1+24x^2}{4}.\end{cases}$$

消去 x、y，得渐屈线为：$4\beta=1+6\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

587. 求内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线方程.

［解］ $y'_x=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $y''_{xx}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 曲率中心$(\alpha,\beta)$为

$$\begin{cases}\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\\ \beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.\end{cases}$$

消去 x、y，得 $\alpha+\beta=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3$, $\alpha-\beta=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^3$.

$$\therefore\quad (\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{2}{3}}.$$

渐屈线方程为：$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

588. 求证摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的渐屈线是原摆线平移所得的一条摆线.

［证］ $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\quad y''_{xx}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}.$$

∴ 曲率中心(α,β)为

$$\alpha=a(t-\sin t)+\frac{4a\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\right)}{\csc^4\frac{t}{2}}=a(t+\sin t);$$

$$\beta=a(1-\cos t)+\frac{4a\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\right)}{-\csc^4\frac{t}{2}}=a(\cos t-1).$$

令 $t=\pi+s$,

$$\therefore\quad\begin{cases}\alpha=\pi a+a(s-\sin s),\\ \beta=-2a+a(1-\cos s).\end{cases}$$

由此可见渐屈线是原摆线在坐标轴平移而得到，也就是说，只要将原摆线沿 x 轴右移 πa，向 y 轴下移 $2a$ 即是.

第四章　不定积分

1. 不定积分的概念

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 连续并且 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 内的一个原函数. $f(x)$ 的原函数的一般表达式称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

C 是一个任意常数，称为积分常数.

2. 不定积分的基本性质

(1) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$，　　$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$,

$\int df(x)=f(x)+C$.

(2) $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$, C 是常数.

(3) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

3. 常用积分表

$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$；　$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；

$\int\cos x\,dx=\sin x+C$；　　$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$；

$\int\sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C$；　　$\int\csc^2 x\,dx=-\operatorname{ctg} x+C$；

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C; \qquad \int \csc x \operatorname{ctg} x\,dx = -\csc x + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a>0);$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C; \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C; \qquad \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) + C.$$

4. 积分法

(1) 换元积分法

(i) 求 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. 如果已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

(ii) 求 $\int f(x)dx$. 令 $x=\varphi(t)$ 且 φ' 连续, 如果已知

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C,$$

则 $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

(2) 分部积分法　设 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都连续，则

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

或者写为 $\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$

5. 有理函数的积分法

分子次数低于分母次数的有理函数总可以分解为下列简单分式之和:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n},\quad \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n},$$

其中 $p^2-4q<0$, A_n, B_n, C_n 都是常数, $n=1, 2, 3\cdots$.

形如上述的简单分式总可以积出:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} -\dfrac{A}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}+C, & 当\ n\neq 1, \\ A\ln|x-a|+C, & 当\ n=1, \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q^2-p}}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{2x+p}{\sqrt{4q^2-p}} + C_1,$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx \quad (n=2, 3, \cdots)$$

$$= -\frac{B}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

令　$$I_n = \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$$

其中 $t = x+\frac{p}{2}$, $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$, 则

$$I_n=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1},$$

$$(n=2,\ 3,\ \cdots),$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C_1.$$

6. 欧拉代换

形如 $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分，其中 $R(u,\ v)$ 是变量 $u,\ v$ 的有理函数．通过下列三种欧拉代换之一，可以将上述积分化为有理函数的积分．

(1) 第一种欧拉代换　设 $a>0$．令

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$　或　$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x$

可将被积表达式有理化．

(2) 第二种欧拉代换　设 $c>0$．令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$$

或

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

可将被积表达式有理化．

(3) 第三种欧拉代换　设 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha\neq\beta$．令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)\quad\text{或}\quad\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=t$$

可将被积表达式有理化．

7. 二项式微分式的积分

形如 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 的积分，$m,\ n,\ p$ 都是有理数．

(1) 当 p 是整数时．记 s 是分数 $m,\ n$ 的分母的最小公倍数，则令 $\sqrt[s]{x}=t$，可将被积表达式有理化．

(2) 当 p 是分数而 $\frac{m+1}{n}$ 是整数时．记 s 是分数 p 的分母，则令 $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$，可将被积表达式有理化．

(3) 当 p, $\frac{m+1}{n}$ 都是分数，而 $p+\frac{m+1}{n}$ 是整数时．记 s 是 p 的分母，则令 $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$，可将被积表达式有理化．

8．三角函数的积分法

形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分，其中 $R(u, v)$ 是变量 u, v 的有理函数．总可以通过代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ 将被积表达式有理化．即令 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则 $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，并且

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\therefore\quad \int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

右端的积分是一个有理函数的积分．

§1．简单的不定积分

589．求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$; (2) $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ $(a\neq b)$;

(3) $\frac{x^2}{a^2-x^2}$; (4) $\frac{x^2}{a^2+x^2}$ $(a\neq 0)$.

［解］ (1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx$

$$=\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}]+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx$

$$=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C.$$

(3) $\int\frac{x^2}{a^2-x^2}dx=\int\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}-1\right)dx=a^2\int\frac{dx}{a^2-x^2}-\int dx$

$$=\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx-\int dx$$

$$=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|-x+C.$$

(4) $\int\frac{x^2}{x^2+a^2}dx=\int\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)dx=x-a\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$

590. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$; (2) $\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$;

(3) $\operatorname{ctg}^2 x$; (4) $\arcsin x+\arccos x$.

[解] (1) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$$=\int\csc^2 x\,dx-\int\sec^2 x\,dx=-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+C.$$

(2) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x+C.$

(3) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-(\operatorname{ctg}x+x)+C.$

(4) $\int(\arcsin x+\arccos x)dx=\int\frac{\pi}{2}dx=\frac{\pi}{2}x+C.$

591. 下列函数的不定积分:

(1) $\frac{x}{\sqrt{a+bx}}$ $(b\neq 0)$; (2) $x\sqrt{x+a}$.

(1) [解一] $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{b}\int\frac{(a+bx)-a}{\sqrt{a+bx}}dx$

$$=\frac{1}{b}\int\sqrt{a+bx}\,dx-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$$

$$=\frac{2}{3b^2}(a+bx)^{\frac{3}{2}}-\frac{2a}{b^2}(a+bx)^{\frac{1}{2}}+C.$$

[解二]：令 $\sqrt{a+bx}=t$，则 $x=\frac{t^2-a}{b}$，$dx=\frac{2t}{b}dt$，

$$\therefore \int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}}=\int\frac{t^2-a}{b}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{2}{b}t\,dt=\frac{2}{b^2}\int(t^2-a)dt$$

$$=\frac{2}{b^2}\left(\frac{1}{3}t^3-at\right)+C$$

$$=\frac{2}{b^2}\left[\frac{1}{3}(a+bx)^{\frac{3}{2}}-a(a+bx)^{\frac{1}{2}}\right]+C.$$

(2) [解一] $\int x\sqrt{x+a}\,dx=\int[(x+a)-a]\sqrt{x+a}\,dx$

$$=\int(x+a)^{\frac{3}{2}}dx-a\int(x+a)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}(x+a)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}a(x+a)^{\frac{3}{2}}+C.$$

[解二] 令 $\sqrt{x+a}=t$，则 $x=t^2-a$，$dx=2t\,dt$，

$$\therefore \int x\sqrt{x+a}\,dx=\int(t^2-a)t\cdot2t\,dt=2\int(t^4-at^2)dt$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{a}{3}t^3\right)+C=2\left[\frac{1}{5}(x+a)^{\frac{5}{2}}-\frac{a}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$$

[说明] 解一较简单，解二称为换元积分法.

592. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{1+x+x^2}$； (2) $\frac{1}{1+x-x^2}$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ $(a\neq0)$； (4) $\frac{1}{\sqrt{ax+x^2}}$ $(a\neq0)$.

[解] (1) $\int\frac{dx}{1+x+x^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{1+x-x^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-x}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2x}{\sqrt{5}+1-2x}\right|+C.$$

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}+C$

$$=\arcsin\frac{2x-a}{a}+C.$$

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\ln\left|x+\frac{a}{2}+\sqrt{ax+x^2}\right|+C.$

593. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}\quad(\alpha\neq0)$;　　(2) $\frac{1}{x(1+x^\alpha)}$;

(3) $\frac{x}{1+x^2}$;　　(4) $\frac{x-b}{x^2+a^2}\quad(a\neq0)$.

[解] (1) $\int\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dx^\alpha}{1+x^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\ln|1+x^\alpha|+C.$

(2) $\int\frac{1}{x(1+x^\alpha)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{\alpha}\ln|1+x^\alpha|+C.$

(3) $\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

(4) $\int\frac{x-b}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+a^2}-b\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)-\frac{b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

594. 求下列不定积分:

(1) $e^x(1+e^x)^\alpha$;　　(2) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(3) $\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}$;　　(4) $\frac{1}{x}\ln^\alpha x$.

［解］ (1) $\int e^x(1+e^x)^\alpha dx=\int (1+e^x)^\alpha de^x$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}(1+e^x)^{\alpha+1}+C, & \alpha\neq -1,\\ \ln(1+e^x)+C, & \alpha=-1.\end{cases}$$

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{de^x}{1+e^{2x}}=\operatorname{arc\,tg} e^x+C.$

(3) $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\,d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C.$$

(4) $\int\frac{1}{x}\ln^\alpha x\,dx=\int\ln^\alpha x\,d\ln x=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}\ln^{\alpha+1}x+C, & \alpha\neq-1,\\ \ln|\ln x|, & \alpha=-1.\end{cases}$

595. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{x}{x^2-ax-a^2}$; (2) $\frac{x}{1+x^4}$;

(3) $\frac{x^2+1}{x^4+1}$; (4) $\frac{x^2-1}{x^4+1}$.

［解］ (1) $\int\frac{x\,dx}{x^2-ax-a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-ax-a^2)}{x^2-ax-a^2}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{x^2-ax-a^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-ax-a^2|+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-ax-a^2|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-a(1+\sqrt{5})}{2x-a(1-\sqrt{5})}\right|+C.$$

(2) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2+C.$

(3) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

(4) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

596. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$; (2) $\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$;

(3) $\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

(1) [解一] 当 $x>a$ 时,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C;$$

当 $x<-a$ 时,令 $x=-y$, $y>0$, 则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-a^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{y}+C$$

$$=\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

[解二] 令 $x=a\sec t$, $\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$dx=a\operatorname{tg}t\sec t\,dt,\ \sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg}t,$$

$$\therefore\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\int dt=\frac{t}{a}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

[解三] 作代换,令 $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\therefore\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-a^2t^2}}=-\frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{\sqrt{1-a^2t^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\arcsin at+C=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

(2) [解一] 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+C;$$

当 $x<0$ 时，令 $x=-y$, $y>0$, 则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2+a^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+C.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C.$$

[解二] 用换元法求解，令 $x=a\operatorname{tg}t\left(0<|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\sec^2t\,dt$,

$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$,

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=-\frac{1}{a}\ln|\operatorname{ctg}t+\csc t|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{a\operatorname{tg}t}+\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2\operatorname{tg}^2t}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+C.$$

(3) [解一] 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C;$$

当 $x<0$ 时，令 $x=-y$, $y>0$, 则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{a^2-y^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

[解二]用换元积分法求解，令 $x=a\sin t\left(0<|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\cos t\,dt$,

$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$,

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=-\frac{1}{a}\ln|\operatorname{ctg}t+\csc t|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\sqrt{\frac{a^2}{a^2\sin^2t}-1}+\frac{a}{a\sin t}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}+a}{x}\right|+C.$$

597. 求解下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x+1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a\neq0)$;　　(2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+a^4}}$;

(3) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$;　　(4) $x^3\sqrt{a+x^2}$.

[解] (1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+a^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{(x^2)^2+a^4}}=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+a^4})+C.$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin x^3+C.$

(4) $\displaystyle\int x^3\sqrt{a+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{a+x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}\int[(a+x^2)-a]\sqrt{a+x^2}\,dx^2$

$$=\frac{1}{2}\int(a+x^2)^{\frac{3}{2}}dx^2-\frac{a}{2}\int(a+x^2)^{\frac{1}{2}}dx^2$$

$$=\frac{1}{5}(a+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{a}{3}(a+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

用分部积分法求解,

$$\int x^3\sqrt{a+x^2}\,dx=\int x^2 d\left[\frac{1}{3}(a+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{x^2}{3}(a+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(a+x^2)^{\frac{3}{2}}d(x^2)$$

$$=\frac{x^2}{3}(a+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}(a+x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

598. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^4}}$; (2) $\dfrac{a-x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a\neq 0)$.

[解] (1) $\displaystyle\int\frac{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{a-x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{x[(a^2-x^2)-a^2]}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}+\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx-a^2\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx^2-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+a^2\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

599. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{x+2}{\sqrt{1+4x-x^2}}$; (2) $\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

(3) $(x-3)\sqrt{2-4x-x^2}$; (4) $(3x+1)\sqrt{x^2+6x+11}$.

[解] (1) $\displaystyle\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+4x-x^2)}{\sqrt{1+4x-x^2}}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}$

$$=-\sqrt{1+4x-x^2}+4\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}}$$

$$=-\sqrt{1+4x-x^2}+4\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C.$$

(2) $\int\frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{\sqrt{x^2+2x+3}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

$$=3\sqrt{x^2+2x+3}-2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+3}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C.$$

(3) $\int(x-3)\sqrt{2-4x-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{2-4x-x^2}\,d(2-4x-x^2)$

$-5\int\sqrt{2-4x-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(2-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}-5\int\sqrt{6-(x+2)^2}\,dx$

$=-\frac{1}{3}(2-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{2}(x+2)\sqrt{2-4x-x^2}$

$-15\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$

(4) $\int(3x+1)\sqrt{x^2+6x+11}\,dx=\frac{3}{2}\int\sqrt{x^2+6x+11}\,d(x^2+6x+11)$

$-8\int\sqrt{x^2+6x+11}\,dx=(x^2+6x+11)^{\frac{3}{2}}-8\int\sqrt{2+(x+3)^2}\,dx$

$=(x^2+6x+11)^{\frac{3}{2}}-4(x+3)\sqrt{x^2+6x+11}$

$-8\ln|(x+3)+\sqrt{x^2+6x+11}|+C.$

600. 求下列函数的不定积分:

(1) $2^{\sin x}\cos x$; (2) $\frac{\sin x}{a+b\cos x}$ $(b\neq0)$;

(3) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$; (4) $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}$;

(5) $\frac{\cos x}{\sqrt{a+b\cos 2x}}$ $(a>0,b>0)$; (6) $a^{\ln\sin x}\operatorname{ctg}x$ $(a>0)$.

[解] (1) $\int2^{\sin x}\cos x\,dx=\int2^{\sin x}d\sin x=\frac{1}{\ln2}2^{\sin x}+C.$

(2) $\int\frac{\sin x}{a+b\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{a+b\cos x}=-\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|+C.$

(3) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C.$

(4) 当 $|a|=|b|$ 时,

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx=\frac{1}{|a|}\int\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{|a|}\int\sin x d\sin x=\frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C.$$

当 $|a|\neq|b|$ 时，

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx=\int\frac{d\sin^2 x}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos x}+C.$$

(5) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a+b\cos x}}=\int\frac{d\sin x}{\sqrt{a+b-2b\sin^2 x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2b}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\sin x\right)+C.$$

(6) $\int a^{\ln\sin x}\operatorname{ctg} x\,dx=\int a^{\ln\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int a^{\ln\sin x}\frac{d\sin x}{\sin x}$

$$=\int a^{\ln\sin x}d\ln\sin x=\frac{1}{\ln a}a^{\ln\sin x}+C.$$

601．求下列函数的不定积分：

(1) $\sin ax\cos bx$　$(|a|\neq|b|)$；

(2) $\sin ax\sin bx$　$(|a|\neq|b|)$；

(3) $\cos ax\cos bx$　$(|a|\neq|b|)$．

［解］ (1) $\int\sin ax\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(b-a)x}{b-a}-\frac{\cos(b+a)x}{b+a}\right]+C.$$

(2) $\int\sin ax\sin bx\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]+C.$$

(3) $\int\cos ax\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b}+\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]+C.$$

602. 求下列函数的不定积分:

(1) $\sin^2 ax \quad (a\neq 0)$; (2) $\cos^2 ax \quad (a\neq 0)$;

(3) $\sin^3 x$; (4) $\sin^4 x$.

[解] (1) $\int \sin^2 ax\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2ax)\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2ax}{2a}\right)+C$.

(2) $\int \cos^2 ax\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2ax)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2ax}{2a}\right)+C$.

(3) $\int \sin^3 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int \sin x\,dx+\int\cos^2 x\,d\cos x$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

(4) $\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

603. 求下列函数的不定积分:

(1) $\sin x\cos^\alpha x$; (2) $\sin^\alpha x\cos x$;

(3) $\sin^2 x\cos^2 x$; (4) $\sin^3 x\cos^2 x$;

(5) $\frac{1}{\sin x\cos x}$.

[解] (1) $\int\sin x\cos^\alpha x\,dx=-\int\cos^\alpha x\,d\cos x$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{\alpha+1}\cos^{\alpha+1}x+C, & \alpha\neq -1,\\ \ln|\sec x|+C, & \alpha=-1.\end{cases}$$

(2) $\int\sin^\alpha x\cos x\,dx=\int\sin^\alpha x\,d\sin x=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}\sin^{\alpha+1}x+C, & \alpha\neq -1,\\ \ln|\sin x|+C, & \alpha=-1.\end{cases}$

(3) $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)\,dx$

$$=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

(4) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\int \sin^2 x\cos^2 x\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,d\cos x$

$$= \int \cos^4 x\,d\cos x - \int \cos^2 x\,d\cos x$$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

(5) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

604. 求下列函数的不定积分:

(1) $(\sin x+\cos x)^n(\sin^2 x-\cos^2 x)$;

(2) $\frac{1}{\sin x}$; (3) $\frac{1}{\cos x}$;

(4) $\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$.

[解] (1) $\int (\sin x+\cos x)^n(\sin^2 x-\cos^2 x)dx$

$$= \int (\sin x+\cos x)^{n+1}(\sin x-\cos x)dx$$

$$= -\int (\sin x+\cos x)^{n+1}d(\cos x+\sin x)$$

$$= -\frac{1}{n+2}(\sin x+\cos x)^{n+2}+C.$$

(2) [解一] $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right)d\cos x$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C = -\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x}+C$$

$$= -\ln|\operatorname{ctg} x+\csc x|+C.$$

[解二] $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$(参见第603(5)题).

(3) [解一] $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+C$$

$$=\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|+C.$$

[解二] $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

(参见本题 (2))

(4) $\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}=\int\frac{dx}{b\cos^2 x\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}^2 x+1\right)}=\frac{1}{b}\int\frac{d\operatorname{tg}x}{\frac{a}{b}\operatorname{tg}^2 x+1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

605. 求下列函数的积分:

(1) $(\sec x+\operatorname{tg}x)^{10}\sec x$;　　(2) $\operatorname{tg}^6 x\sec^2 x$;

(3) $\sec^7 x\operatorname{tg}^3 x$;　　(4) $\operatorname{tg}^3\sec^2 x$.

[解] (1) $\int(\sec x+\operatorname{tg}x)^{10}\sec x\,dx=\int(\sec x+\operatorname{tg}x)^9(\sec x+\operatorname{tg}x)\sec x\,dx$

$$=\int(\sec x+\operatorname{tg}x)^9 d(\sec x+\operatorname{tg}x)=\frac{1}{10}(\sec x+\operatorname{tg}x)^{10}+C.$$

(2) $\int\operatorname{tg}^6 x\sec^2 x\,dx=\int\operatorname{tg}^6 x\,d\operatorname{tg}x=\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x+C.$

(3) $\int\sec^7 x\operatorname{tg}^3 x\,dx=\int\sec^6 x\operatorname{tg}^2 x\,d\sec x=\int(\sec^8 x-\sec^6 x)\,d\sec x$

$$=\frac{1}{9}\sec^9 x-\frac{1}{7}\sec^7 x+C.$$

(4) $\int\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x\,dx=\int\operatorname{tg}^3 x\,d\operatorname{tg}x=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$

606. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1}{\operatorname{sh}x}$;　　(2) $\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}$;

(3) $\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}$.

［解］ (1) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x}=\int\frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{d\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) $\int\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)^2-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{2\operatorname{ch}^2x-1}|+C.$$

(3) $\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}\,dx=\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\,dx}{\sqrt{\frac{(\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x)^2+(\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x)}{2}}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sh}2x\,dx}{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 2x+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{d\operatorname{ch}2x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x+1})+C.$$

607. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{\operatorname{ch}^2x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}$;　　(2) $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x$;　　(3) $\frac{1}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}$.

［解］ (1) $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}=\int\operatorname{th}^{-\frac{2}{3}}x\,d\operatorname{th}x=3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C.$

(2) $\int\operatorname{ch}x\operatorname{ch}3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2x+\operatorname{ch}4x)\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x+C.$

(3) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}=\int\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}-\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}$

$$=-\operatorname{cth}x-\operatorname{th}x+C.$$

608. 求下列函数的不定积分：(1) $e^{-|x|}$; (2) $\min\{1, x^2\}$.

［分析］ (1)和(2)都是分段函数，以(1)为例：

$$e^{-|x|}=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ e^{x}, & x<0.\end{cases}$$

自然会想到可以分段求不定积分，对于出现的两个积分常数，则利用原函数在 $x=0$ 的连续性，给出它们之间的关系，从而使所求的不定积分中只含有一个积分常数。

［解］ (1) $I=\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ e^{x}+C_2, & x<0.\end{cases}$

由于 $I'=e^{-|x|}$ 对每一点 x 都成立，所以 I 是连续函数，它在 $x=0$ 处应有 $\lim\limits_{x\to+0}I=\lim\limits_{x\to-0}I$，由此得 $C_1=C_2+2$，取 $C=C_1$，即有

$$I=\begin{cases}-e^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ e^{x}+C-2, & x<0.\end{cases}$$

(2) 因为
$$\min\{1,x^2\}=\begin{cases}1, & x\geqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x<-1.\end{cases}$$

所以
$$I=\int\min\{1,x^2\}dx=\begin{cases}x+C_1, & x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+C_2, & -1\leqslant x<1,\\ x+C_3, & x<-1.\end{cases}$$

再由 I 的连续性，在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处有
$$\lim_{x\to1+0}I(x)=\lim_{x\to1-0}I(x),\quad \lim_{x\to-1+0}I(x)=\lim_{x\to-1-0}I(x),$$

即
$$1+C_1=\frac{1}{3}+C_2,\quad -\frac{1}{3}+C_2=-1+C_3,$$

解得
$$C_2=\frac{2}{3}+C_1,\quad C_3=\frac{2}{3}+C_2=\frac{4}{3}+C_1.$$

$$\therefore\quad I=\begin{cases}x+C, & x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}+C, & -1\leqslant x<1,\\ x+\dfrac{4}{3}+C, & x<-1.\end{cases}$$

609. 设函数 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离，求 $\int\varphi(x)dx$。

［解］ 按 $\varphi(x)$ 的定义，
$$\varphi(x)=|x-n|,\quad n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots).$$

$$\therefore\quad I(x)=\int\varphi(x)\,dx=\pm\int(x-n)\,dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x-n)^2}{2}+C_{n,1}, & n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{(n-x)^2}{2}+C_{n,2}, & n-\dfrac{1}{2}\leqslant x<n.\end{cases}$$

由 $I(x)$ 在 $x=n$ 的连续性,得 $C_{n,1}=C_{n,2}$

$$\therefore\quad I(x)=\int\varphi(x)\,d(x)=\frac{1}{2}(x-n)|x-n|+C_n$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\right).$$

再由 $I(x)$ 在 $x=n+\dfrac{1}{2}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 的连续性,有

$$\lim_{\substack{x\to n+\frac{1}{2}\\ x<n+\frac{1}{2}}} I(x)=\lim_{\substack{x\to n+\frac{1}{2}\\ x<n+\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2}(x-n)|x-n|+C_n\right]=\frac{1}{8}+C_n$$

$$=\lim_{\substack{x\to n+\frac{1}{2}\\ x>n+\frac{1}{2}}} I(x)=\lim_{\substack{x\to n+\frac{1}{2}\\ x>n+\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{2}(x-(n+1))|x-(n+1)|+C_{n+1}\right]$$

$$=-\frac{1}{8}+C_{n+1}.$$

$$\therefore\quad C_{n+1}=C_n+\frac{1}{4}=C_0+\frac{n+1}{4}\quad(n=\pm1,\ \pm2\cdots).$$

视 C_0 为任意常数,则

$$\int\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2}(x-n)|x-n|+\frac{n}{4}+C_0,\ n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}.$$

610. 设 $f(x)$ 是严格单调的连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,证明:

$$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$$

并考察例子: (1) $f(x)=x^n(n>0)$; (2) $f(x)=e^x$.

[证] $\because$ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx=f^{-1}(x),$

$$\frac{d}{dx}[xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C]$$

$$=f^{-1}(x)+\frac{x}{f'(x)}-f(f^{-1}(x))\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=f^{-1}(x)+\frac{x}{f'(x)}-x\frac{1}{f'(x)}=f^{-1}(x),$$

$$\therefore\quad\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

考察例子:

(1) $\int x^{\frac{1}{n}}dx=x\cdot x^{\frac{1}{n}}-\frac{(x^{\frac{1}{n}})^{n+1}}{n+1}+C=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C.$

(2) $\int\ln x\,dx=x\ln x-e^{\ln x}+C=x\ln x-x+C.$

§2. 换元积分法

611. 求下列函数的不定积分:

(1) $x^2(ax+b)^\alpha\quad(a\neq0,\ \alpha\neq-1,\ -2,\ -3)$;

(2) $\frac{x+3}{(2x+1)^2}$.

[解] (1) 令 $ax+b=t$, 则 $x=\frac{t-b}{a}$, $dx=\frac{1}{a}dt$,

$$\therefore\quad\int x^2(ax+b)^\alpha dx=\int\frac{(t-b)^2}{a^2}\frac{t^\alpha}{a}dt=\frac{1}{a^3}\int t^\alpha(t-b)^2dt$$

$$=\frac{1}{a^3}\int(t^{\alpha+2}-2bt^{\alpha+1}+b^2t^\alpha)dt$$

$$=\frac{1}{a^3}\left(\frac{t^{\alpha+3}}{\alpha+3}-\frac{2bt^{\alpha+2}}{\alpha+2}+\frac{b^2t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)+C$$

$$=\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^2}{\alpha+3}-\frac{2b(ax+b)}{\alpha+2}+\frac{b^2}{\alpha+1}\right]+C.$$

(2) $2x+1=t$, 则 $dx=\frac{1}{2}dt$, $x+3=\frac{1}{2}(t+5)$,

$$\therefore \int \frac{x+3}{(2x+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{t+5}{t^2}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{5}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln|t|-\frac{5}{t}\right)+C=\frac{1}{4}\left(\ln|2x+1|-\frac{5}{2x+1}\right)+C.$$

612. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x^3-x}{(x-2)^3}$； (2) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}$.

［解］ (1) 令 $x-2=t$，则 $x=t+2$．$dx=dt$.

$$\therefore \int\frac{x^3-x}{(x-2)^3}dx=\int\frac{(t+2)^3-(t+2)}{t^3}dt$$

$$=\int\frac{t^3+6t^2+11t+6}{t^3}dt=\int\left(1+\frac{6}{t}+\frac{11}{t^2}+\frac{6}{t^3}\right)dt$$

$$=t+6\ln|t|-\frac{11}{t}-\frac{3}{t^2}+C$$

$$=x+6\ln|x-2|-\frac{11}{x-2}-\frac{3}{(x-2)^2}+C'.$$

(2) ［解一］ 令 $1-x=t$，则 $x=1-t$，$dx=-dt$.

$$\therefore \int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=-\int\frac{(1-t)^2}{t^{100}}dt=-\int\left(\frac{1}{t^{100}}-\frac{2}{t^{99}}+\frac{1}{t^{98}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{99t^{99}}-\frac{1}{49t^{98}}+\frac{1}{97t^{97}}+C$$

$$=\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}+C.$$

［解二］ 将 $f(x)=x^2$ 展开为 $x-1$ 的多项式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2,$$

即 $$x^2=1+2(x-1)+(x-1)^2=1-2(1-x)+(1-x)^2,$$

$$\therefore \int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\left[\frac{1}{(1-x)^{100}}-\frac{2}{(1-x)^{99}}+\frac{1}{(1-x)^{98}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}+C.$$

613. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x-1}}$； (2) $\dfrac{1}{x(a^3+x^3)}\ (a\neq 0)$.

［解］ (1) 令 $\sqrt{x-1}=t$, 则 $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int\frac{(t^2+1)^3}{t}\cdot 2t\,dt=2\int(t^6+3t^4+3t^2+1)\,dt$$

$$=2\left(\frac{t^7}{7}+\frac{3}{5}t^5+t^3+t\right)+C$$

$$=\frac{2}{35}\sqrt{x-1}\,(5x^3+6x^2+8x+16)+C$$

(2) ［解一］ 令 $t=x^3$, 则 $x=t^{\frac{1}{3}}$, $dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x(a^3+x^3)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t(a^3+t)}=\frac{1}{3a^3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a^3+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3a^3}(\ln|t|-\ln|a^3+t|)+C=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|+C.$$

［解二］ 令 $x=\frac{1}{t}$, $dx=\frac{-1}{t^2}dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x(a^3+x^3)}=-\int\frac{t^2}{a^3t^3+1}\,dt=-\frac{1}{3a^3}\int\frac{d(a^3t^3+1)}{a^3t^3+1}$$

$$=-\frac{1}{3a^3}\ln|a^3t^3+1|+C=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|+C.$$

614. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;　　　(2) $x^x(1+\ln x)$.

［解］ (1) 令 $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=t$, 则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,\quad dx=\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\,dt$$

$$\therefore\quad \int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^2}+C$$

$$=\frac{t^2-1}{2t}-\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{4t^2}+C$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C_1.$$

(2) 令 $x^x=t$, 则 $dt=x^x(1+\ln x)\,dx$,

$$\therefore\quad \int x^x(1+\ln x)\,dx=\int dt=t+C=x^x+C.$$

615. 求下列函数的不定积分：

(1) $(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$　$(a>0)$；　　(2) $(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$　$(a>0)$；

(3) $(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}$　$(a>0)$.

［解］ (1) 令 $x=a\sin t$, $\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$,

$$\therefore\quad \int(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\int\frac{1}{a^3\cos^3 t}a\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\int\sec^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\operatorname{tg} t+C=\frac{1}{a^2}\ \frac{a\sin t}{a\cos t}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

(2) 令 $x=a\operatorname{tg} t$　$\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\sec^2 t\,dt$,　$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$,

$$\therefore\quad \int(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\ \sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}(a\operatorname{tg} t)\frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

(3) 令 $x=a\sec t$　$\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\operatorname{tg} t\sec t\,dt$,　$\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$,

$$\therefore\quad \int(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\int\frac{1}{a^3\operatorname{tg}^3 t}\cdot a\operatorname{tg} t\sec t\,dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=\frac{-1}{a^2\sin t}+C=\frac{x}{a^2(x^2-a^2)^{1/2}}+C.$$

616. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{a^2-x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a\neq0)$；　　(2) $x^3\sqrt{a-x^2}$　$(a\neq0)$.

［解］　用换元法求解，

$$I=\int\frac{a-x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

在后一积分中令 $x=a\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$,

$$\therefore \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a^3 \sin^3 t}{a \cos t}\cdot a \cos t\, dt=a^3\int \sin^3 t\, dt$$

$$=-a^3\int (1-\cos^2 t) d\cos t=a^3\left(-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t\right)+C$$

$$=-a^2(a^2-a^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(a^2-a^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-a^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+C,$$

$$\therefore \quad I=a \arcsin\frac{x}{a}+a^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) 令 $x=a\sin t\left(|t|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$,

$$\therefore \quad \int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a^3\sin^3 t\; a\cos t\; a\cos t\,dt=a^5\int \sin^3 t\cos^2 t\,dt$$

$$=-a^5\int(1-\cos^2 t)\cos^2 t\; d\cos t=-a^5\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{a^2}{3}(a^2-a^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(a^2-a^2\sin^2 t)^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=-\frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

[说明](1)的另一解法见第598(2)题.

617. 求函数 $\dfrac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ 的不定积分.

[解] (1) 令 $x=\operatorname{tg} t$, 则 $dx=\sec^2 t\,dt$,

$$\therefore \quad \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\sec^2 t\sec t}\cdot\sec^2 t\,dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt=\ln|\operatorname{tg} t+\sec t|-\sin t+C$$

(参见第604(3)题)

$$=\ln|\operatorname{tg} t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}|-\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C$$

$$=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

618. 求函数 $\operatorname{tg}^3 x$ 的不定积分.

［解一］ 令 $\operatorname{tg} x=t$, 则 $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$,

$$\therefore \int \operatorname{tg}^3 x\,dx=\int \frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{1+t^2}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\sec x|+C$$

［解二］ $$\int \operatorname{tg}^3 dx=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx=-\int\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x}d\cos x$$

$$=-\int\left(\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}\right)d\cos x$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C.$$

［解三］ $$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx=\int \operatorname{tg} x(\sec^2 x-1)\,dx=\int \operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg} x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

619. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

(2) $\frac{1}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ ($a\neq b$, n 是正整数).

［解］ (1) 作代换 $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$x-a=(b-a)\sin^2\theta,\ b-x=(b-a)\cos^2\theta,$$
$$dx=2(b-a)\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

$$\therefore \int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int d\theta=2\theta+C=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C.$$

(2) $$I=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}}}$$

令 $t^n=\frac{x-b}{x-a}$, 则 $\frac{dx}{(x-a)^2}=\frac{n}{b-a}t^{n-1}dt$,

$$\therefore\quad I=\frac{n}{b-a}\int\frac{t^{n-1}dt}{t^{n-1}}=\frac{n}{b-a}\int dt=\frac{n}{b-a}\,t+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

620. 求下列函数的不定积分:

(1) $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$;　　(2) $\dfrac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}$;

(3) $\dfrac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$;　(4) $\dfrac{1}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

［解］ (1) 令 $\sin x=t^2$, 则 $\cos x\,dx=2t\,dt$, $\cos^4 x=(1-t^4)^2$,

$$\therefore\quad \int\cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx=2\int(1-t^4)^2t^2dt$$

$$=\frac{2}{3}t^3-\frac{4}{7}t^7+\frac{2}{11}t^{11}+C$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

(2) 令 $1+\cos^2 x=t$, 则 $-2\cos x\sin x\,dx=dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-1\right)dt=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{t}{2}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)-\frac{1}{2}\cos^2 x+C'.$$

(3) 令 $\cos x=t$, 则 $-\sin x\,dx=dt$, $1+\sin^2 x=2-t^2$,

$$\therefore\quad I=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}}.$$

当 $t>0$ 时,

$$\int\frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}}=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t}+\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right|+C.$$

当 $t<0$ 时,

$$\int\frac{dt}{t\sqrt{2-t^2}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{t}+\sqrt{\frac{2}{t^2}-1}\right|+C.$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-t^2}}{|t|}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C.$$

(4) $\because\quad \dfrac{1}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x(3\,\mathrm{tg}^2 x-8\,\mathrm{tg}\, x+5)}$,

$\therefore$ 令 $\mathrm{tg}\, x=t$，则 $\sec^2 x\,dx=dt$，

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\int\frac{dt}{3t^2-8t+5}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-\frac{5}{3}}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3t-5}{t-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$$

621. 利用代换 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$ 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ (m, n 都是正整数)，并由此求 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

[解] 令 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$，则 $dt=\dfrac{b-a}{(x+b)^2}\,dx$，

$$\frac{1}{x+b}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{x+b}=\frac{1}{b-a}\left(1-\frac{x+a}{x+b}\right)=\frac{1}{b-a}(1-t),$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\int\frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m(x+b)^{n+m-2}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\int\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}\,dt.$$

再计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$，这时 $a=-2$, $b=3$, $m=2$, $n=3$. 令 $t=\dfrac{x-2}{x+3}$，则

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{625}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\,dt$$
$$=\int\frac{1}{625}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)dt$$
$$=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{1}{2}t^2\right)+C$$
$$=\frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right.$$
$$\left.+3\frac{x-2}{x+3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2\right]+C.$$

622. 设

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 当\ 0<x\leqslant 1,\\ x, & 当\ 1<x<+\infty.\end{cases}$$

并且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

［分析］ $f'(\ln x)$ 表示在函数 $f'(t)$ 中 $t=\ln x$, 它是由 $f'(t)$ 和 $t=\ln x$ 复合而成的函数. 这表明在解题中可以利用代换 $t=\ln x$ 将问题化简.

［解］ 令 $t=\ln x$, 则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(t)=\int f'(t)dt=\begin{cases}t+C_1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t+C_2, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

因为 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续, 所以 $C_1=1+C_2$, 得

$$f(t)=\begin{cases}t+C_1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t-1+C_1, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

再由条件 $f(0)=0$, $\therefore C_1=0$.

$$\therefore\quad f(t)=\begin{cases}t, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t-1, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

§3. 分部积分法

623. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$; (2) xa^x $(a>0)$; (3) $e^x(ax^2+bx+c)$.

[解]

(1) $\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{x}{1+x}\ln x-\ln(1+x)+C.$$

(2) $\int xa^x dx=\int x\,d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=x\frac{a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln^2 a}(x\ln a-1)+C.$

(3) $\int e^x(ax^2+bx+c)dx=\int(ax^2+bx+c)de^x$

$$=e^x(ax^2+bx+c)-\int(2ax+b)e^x dx$$

$$=e^x(ax^2+bx+c)-\int(2ax+b)de^x$$

$$=e^x(ax^2+bx+c)-e^x(2ax+b)+2a\int e^x dx$$

$$=e^x[ax^2+(b-2a)x+c-b+2a]+C.$$

624. 求下列函数的不定积分：

(1) $x\ln x$;　(2) $x^n\ln x$;　(3) $x(\ln x)^2$;　(4) $\ln(1+x^2)$.

[解]　(1) $\int x\ln x\,dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

(2) $\int x^n\ln x\,dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$$

(3) $\int x(\ln x)^2dx=\int(\ln x)^2d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\int x\ln x\,dx$

$$=\frac{x^2}{2}(\ln x)^2-\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

(4) $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int x\,d\ln(1+x^2)$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

625. 求下列函数的不定积分：

(1) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(2) $\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

［解］ (1) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

(2) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$$-2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$+2\int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

(3) $\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{4}[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

$$= \frac{1}{4}[(2x^2+1)\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x\sqrt{1+x^2}] + C.$$

626. 求下列函数的不定积分:

(1) $\cos(\ln x)$;　　(2) $\cos x\cdot\ln\sin x$.

[解] (1) $I=\int\cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)-\int xd\cos(\ln x)$

$$=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$$

$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int xd\sin(\ln x)$$

$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx,$$

$$\therefore\quad I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

(2) $\int\cos x\ln\sin x\,dx=\int\ln\sin x d\sin x=\sin x\ln\sin x-\int\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$$=\sin x(\ln\sin x-1)+C.$$

627. 求下列函数的不定积分:

(1) $x^2\sin x$;　　(2) $x\cos^3 x$;

(3) $\frac{x}{\sin^2 x}$;　　(4) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

[解] (1) $\int x^2\sin x\,dx=-\int x^2d\cos x=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$

$$=-x^2\cos x+2\int xd\sin x=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx$$

$$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C.$$

(2) $\because\quad\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C,$

$$\therefore\quad\int x\cos^3 x\,dx=\int xd\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)$$

$$=x\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)-\int\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)dx$$

$$=x\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+\cos x-\frac{1}{3}\int(1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$=x\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{9}\cos^3 x+C.$$

(3) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = -\int x\,d\,\mathrm{ctg}\,x = -x\,\mathrm{ctg}\,x + \int \mathrm{ctg}\,x\,dx$

$$= -x\,\mathrm{ctg}\,x + \ln|\sin x| + C.$$

(4) $I = \int \mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx = x\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$, 在后一积分中令 $\sqrt{x} = t$, 则

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - \mathrm{arc\,tg}\,t) + C$$

$$= 2(\sqrt{x} - \mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}) + C,$$

$$\therefore\quad I = (x+1)\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

628. 求下列函数的不定积分:

(1) $\arcsin x$; (2) $\arccos x$;

(3) $(\arcsin x)^2$; (4) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$.

[解] (1) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(2) $\int \arccos x\,dx = x\arccos x + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

(3) $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int x\,d(\arcsin x)^2$

$$= x(\arcsin x)^2 - 2\int x\arcsin x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

(4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \arcsin x\,d(-2\sqrt{1-x})$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\sqrt{1-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C.$$

629. 求下列函数的不定积分:

(1) $x^2\operatorname{arc\,tg} x$; (2) $x^2\arcsin x$.

[解] (1) $\int x^2\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int x^3\,d\operatorname{arc\,tg} x$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

(2) $\int x^2\arcsin x\,dx=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int x^3 d\arcsin x$

$$=\frac{x^3}{3}\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x-\frac{1}{3}\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{1}{3}\int x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arcsin x+\frac{1}{9}(2+x^2)\sqrt{1-x^2}+C.$$

630. 求下列函数的不定积分:

(1) $x\arcsin(1-x)$; (2) $x\arccos\frac{1}{x}$ $(|x|>1)$.

[解] (1) 令 $t=1-x$, $dx=-dt$,

$$\int x\arcsin(1-x)dx=\int t\arcsin t\,dt-\int\arcsin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2\arcsin t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt-t\arcsin t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}t(t-2)\arcsin t-\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

最后一个积分作代换 $t=\sin\theta$,

$$\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\int\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\theta}{4}-\frac{1}{8}\sin 2\theta+C$$

$$=\frac{1}{4}\arcsin t-\frac{t}{4}\sqrt{1-t^2}+C,$$

$$\therefore\quad\int x\arcsin(1-x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\arcsin(1-x)-\sqrt{2x-x^2}$$

$$-\frac{1}{4}\arcsin(1-x)+\frac{1-x}{4}\sqrt{2x-x^2}+C$$

$$=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)-\frac{x+3}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

(2) $\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\arccos\frac{1}{x}d(x^2)$

$$=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{|x|dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x\sqrt{x^2-1}+C\quad(|x|>1).$$

631. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; (2) $e^{ax}\sin bx\quad(a\neq 0)$.

［解］ (1) 令 $\arcsin x=t$, 则 $x=\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$,

$1-x^2=\cos^2 t,\ dx=\cos t\,dt,$

$$\therefore \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx = \int t\sec^2 t\,dt = \int t\,d\,\mathrm{tg}\,t$$

$$= t\cdot \mathrm{tg}\,t - \int \mathrm{tg}\,t\,dt = t\cdot \mathrm{tg}\,t + \ln\cos t + C$$

$$= \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2} + C.$$

(2) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\,de^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,de^{ax}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2}b\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

移项并经整理后得

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

632. 求不定积分:

$$I = \int xe^{ax}\sin bx\,dx, \quad J = \int xe^{ax}\cos bx\,dx \quad (a\neq 0).$$

［解］ $I = \int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int x\sin bx\,de^{ax}$

$$= \frac{e^{ax}}{a}x\sin bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}(\sin bx + bx\cos bx)dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}x\sin bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx - \frac{b}{a}J$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}x\sin bx - \frac{e^{ax}}{a(a^2+b^2)}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{b}{a}J$$

(参见第 631(2) 题),

$$\therefore \quad aI + bJ = xe^{ax}\sin bx - \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

同样有:

$$bI - aJ = -xe^{ax}\cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$$

解得

$$I = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx] + C,$$

$$J=\frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$
$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx+2ab\sin bx]+C.$$

633. 求下列不定积分的递推公式:

(1) $I_n=\int x^n\sin x\,dx$; (2) $I_n=\int(\ln x)^n dx$.

[解] (1) $I_n=\int x^n\sin x\,dx=-\int x^n d\cos x=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

$$=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}d\sin x$$
$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx,$$

得递推公式:

$$I_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)I_{n-2}.$$

(2) $I_n=\int(\ln x)^n dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}dx$, 得递推公式:

$$I_n=x(\ln x)^n-nI_{n-1}.$$

634. 求下列不定积分的递推公式:

(1) $I_n=\int(\arcsin x)^n dx$; (2) $I_n=\int x^n e^{ax}dx \quad (a\neq 0)$.

[解] (1) 令 $t=\arcsin x \quad \left(|t|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$,

$$\therefore\quad I_n=\int(\arcsin x)^n dx=\int t^n\cos t\,dt$$
$$=\int t^n d\sin t=t^n\sin t-n\int t^{n-1}\sin t\,dt$$
$$=t^n\sin t+n\int t^{n-1}d\cos t$$
$$=t^n\sin t+nt^{n-1}\cos t-n(n-1)\int t^{n-2}\cos t\,dt,$$

得递推公式:

$$I_n=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}.$$

(2) $I_n=\int x^n e^{ax}\,dx=\int x^n d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx,$

得递推公式:

$$I_n=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}.$$

635. 求 $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推公式(n 是正整数, $n>1$).

[解] $I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.$$

636. 设 $f''(x)$ 连续,求下列不定积分:

(1) $\int xf''(x)dx$; (2) $\int\sin 2xf''(\sin x)dx$.

[解] (1) $\int xf''(x)\,dx=\int x\,df'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx$

$$=xf'(x)-f(x)+C.$$

(2) $\int\sin 2xf''(\sin x)dx=2\int\sin x\cos xf''(\sin x)dx=2\int\sin x\,df'(\sin x)$

$$=2\sin xf'(\sin x)-2\int f'(\sin x)\,d\sin x$$

$$=2\sin xf'(\sin x)-2f'(\sin x)+C.$$

§4. 有理函数的积分

637. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{x^5-2x^3-1}{x^3-x^2}$; (2) $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$.

〔解〕 (1) $\frac{x^5-2x^3-1}{x^3-x^2}=x^2+x-1-\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$. 设

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1},$$

右端通分后将分子中的同类项合并. 两端的分子应相等,即

$$x^2+1=(A+C)x^2+(-A+B)x-B.$$

比较系数有: $A+C=1$, $-A+B=0$, $-B=1$. 解得$A=-1$, $B=-1$, $C=2$.

$$\therefore\quad \int\frac{x^5-2x^3-1}{x^3-x^2}\,dx=\int\left(x^2+x-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x}+\ln\frac{|x|}{(x-1)^2}+C.$$

(2) 设 $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$, 右端通分后将分子中的同类项合并,两端的分子应相等,即

$$2x+3=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A.$$

比较系数有: $A+B+C=0$, $A+2B-C=2$, $-2A=3$, 解得 $A=-\frac{3}{2}$, $B=\frac{5}{3}$, $C=-\frac{1}{6}$.

A, B, C 也可以这样求得,将上述分式右端通分后,由两端分子相等得

$$2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

令 $x=0$, 得 $3=-2A$, $\therefore A=-\frac{3}{2}$; 令 $x=1$, 得 $5=3B$, $\therefore B=\frac{5}{3}$; 令 $x=-2$, 得 $-1=6C$, $\therefore C=-\frac{1}{6}$.

$$\therefore\quad \int\frac{2x+3}{x^3+x-2x}\,dx=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C.$$

638. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$; (2) $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$.

[解] (1) 解：设 $\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$，右端通分后，两端分子相等，即 $x+1=A(x-1)+B$. 令 $x=1$，得 $B=2$；再令 $x=0$，得 $A=1$.

$$\therefore \int\frac{x+1}{(x-1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

(2) 设 $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$，右端通分后，两端分子相等，即

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx.$$

令 $x=0$，得 $1=-A$；令 $x=1$，得 $2=D$. 将 A, D 代入上式得

$$x^2=(B-1)x^2+(C-2B+3)x+(B-C-1).$$

比较系数有：$B-1=1$, $C-2B+3=0$, $B-C-1=0$，解得 $B=2$, $C=1$.

$$\therefore \int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

639. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$； (2) $\frac{1}{x^3+1}$.

[解] (1) $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{[(x-2)^2+1]-(x-2)^2}{(x-2)^2[(x-2)^2+1]}$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2+1}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C.$$

(2) 设 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，则

$$1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C.$$

$\therefore A+B=0$, $-A+B+C=0$, $A+C=1$，解得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$.

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

640. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$;　　(2) $\dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

(1)［解一］ 设 $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，则有

$$x^2=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

令 $x=1$ 得 $1=2B$，$\therefore B=\dfrac{1}{2}$. 令 $x=i$ 得 $-1=2C-2Di$，$\therefore C=-\dfrac{1}{2}$，$D=0$. 令 $x=0$ 得 $0=-A+B+D$，$\therefore A=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\ \int\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2(x-1)}+C.$$

［解二］ 设 $x-1=\dfrac{1}{t}$，$dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$，

$$\int\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=-\int\frac{t^2+2t+1}{2t^2+2t+1}dt=-\int\left(\frac{1}{2}+\frac{t+\frac{1}{2}}{2t^2+2t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{d(2t^2+2t+1)}{2t^2+2t+1}=-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\ln|2t^2+2t+1|+C$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+C.$$

(2) [解] 设 $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$，则有

$$x=A(1+x^2)^2+(Bx+C)(1+x)(1+x^2)+(Dx+E)(1+x).$$

令 $x=i$ 得 $i=E-D+(E+D)i$，$\therefore E-D=0, E+D=1, E=\frac{1}{2}, D=\frac{1}{2}$.
令 $x=-1$ 得 $-1=4A$，$\therefore A=-\frac{1}{4}$。比较上式两端 x^4 项的系数和 x^3 项的系数，分别得 $A+B=0$, $C+B=0$，$\therefore B=\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{4}$.

$$\therefore \int\frac{x}{(1+x)(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{4}\int\frac{x-1}{1+x^2}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{4}\ln|1+x|+\frac{1}{8}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|1+x|+\frac{1}{8}\ln(1+x^2)-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4(1+x^2)}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg}x\right)+C \qquad \text{(参见第 635 题)}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|1+x|+\frac{1}{8}\ln(1+x^2)+\frac{x-1}{4(1+x^2)}+C.$$

641. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$；　　　　(2) $\frac{4}{x^3+4x}$.

[解] (1) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2-1)}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2+2}+\frac{1}{x^2-1}\right),$$

$$\therefore \int\frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

(2) 设 $\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{(x^2+4)-x^2}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$,

$$\therefore\quad \int\frac{4}{x^3+4x}\,dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+4}\,dx$$
$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}+C.$$

642. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$; (2) $\dfrac{1}{x(a+bx^3)^3}$ $(a\neq 0)$.

[解] (1) $$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-2x+1)-1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

设 $$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

则有:
$$1=A(x-1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)(x-1)^2(x^2+1)$$
$$+(Ex+F)(x-1)^2.$$

令 $x=1$ 得 $4B=1$, $\therefore B=\frac{1}{4}$. 令 $x=i$ 得 $1=2E-2Fi$, $\therefore E=\frac{1}{2}$, $F=0$. 再比较上式两端 x^3, x^4, x^5 项的系数, 得 $2A+2C-2D+E=0$, $-A+B-2C+D=0$, $A+C=0$. 解出 $A=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{4}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$
$$+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4(x^2+1)}+C.$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg}x\right)+C$$ (参见第 635 题).

$$\therefore\quad \int\frac{x^2-2x}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right.$$
$$\left.+\frac{2x-1}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right]+C.$$

(2) $$\frac{1}{x(a+bx^3)^3}=\frac{a+bx^3-bx^3}{ax(a+bx^3)^3}=\frac{1}{ax(a+bx^3)^2}-\frac{bx^2}{a(a+bx^3)^3}$$

$$=\frac{a+bx^3-bx^3}{a^2x(a+bx^3)^2}-\frac{bx^2}{a(a+bx^3)^3}$$

$$=\frac{1}{a^2x(a+bx^3)}-\frac{bx^2}{a^2(a+bx^3)^2}-\frac{bx^2}{a(a+bx^3)^3}$$

$$=\frac{a+bx^3-bx^3}{a^3x(a+bx^3)}-\frac{bx^2}{a^2(a+bx^3)^2}-\frac{bx^2}{a(a+bx^3)^3}$$

$$=\frac{1}{a^3x}-\frac{bx^2}{a^3(a+bx^3)}-\frac{bx^2}{a^2(a+bx^3)^2}-\frac{bx^2}{a(a+bx^3)^3}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x(a+bx^3)^3}=\frac{1}{a^3}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\left(\int\frac{bd(x^3)}{a^3(a+bx^3)}\right.$$

$$\left.+\int\frac{bd(x^3)}{a^2(a+bx^3)^2}+\int\frac{bd(x^3)}{a(a+bx^3)^3}\right)$$

$$=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{a+bx^3}\right|+\frac{1}{3a^2(a+bx^3)}+\frac{1}{6a(a+bx^3)^2}+C.$$

643. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{x^3-1}$； (2) $\frac{x}{x^3-1}$.

［解］ (1) 设 $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，则有

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

令 $x=1$ 得 $1=3A$，$\therefore A=\frac{1}{3}$. 比较上式两端 x^2 项的系数和常数项，有 $0=A+B$，$1=A-C$，$\therefore B=-\frac{1}{3}$，$C=-\frac{2}{3}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(3) $\frac{x}{x^3-1}=\frac{(x-1)+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-1}$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

(利用上题的结果)

$$\therefore\quad\int\frac{x\,dx}{x^3-1}=\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{x^3-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

644. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{x^2}{(1+x^2)^3}$;　　(2) $\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}$.

［解］ (1) $\frac{x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2)^3}$,

$$\therefore\quad\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}=-\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{x}{8(1+x^2)}+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

(参见第 635 题).

(2) $\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{2x+2}{2(x^2+2x+2)^2}+\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}$,

$$\therefore\quad\int\frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}+\int\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+2x+1}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]+C$$

(参见第 635 题).

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]+C.$$

645. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{x^4}{(x^2+1)^5}$; (2) $\dfrac{1}{x^4+1}$.

［解］ (1) $$\frac{x^4}{(x^2+1)^5}=\frac{(x^4+2x^2+1)-(2x^2+2)+1}{(x^2+1)^5}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^3}-\frac{2}{(x^2+1)^4}+\frac{1}{(x^2+1)^5}.$$

由第635题得

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^5}=\frac{x}{8(x^2+1)^4}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{(x^2+1)^4},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{x}{6(x^2+1)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(x^2+1)^3},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x+C,$$

$$\therefore\quad \int\frac{x^4}{(x^2+1)^5}\,dx=\frac{x}{8(x^2+1)^4}-\frac{3x}{16(x^2+1)^3}+\frac{x}{64(x^2+1)^2}$$

$$+\frac{3x}{128(x^2+1)}+\frac{3}{128}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

(2) 设 $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

用 $-x$ 代 x 得

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{-Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{-Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$

$\therefore A=-C,\ B=D$. 此外又有

$$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

比较两端 x^2 项的系数和常数项，得 $-2\sqrt{2}A+2B=0,\ 2B=1$,

$\therefore A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ B=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx-\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\right)$$

$$\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C.$$

同样有

$$\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+C.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)]+C.$$

再由 $\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}+n\pi\quad(n=0,\ \pm1,\cdots)$，所以

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+n\pi,$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C.$$

646. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{x^6+1}$；　　(2) $\dfrac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

［解］ (1) $$\frac{1}{x^6+1}=\frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)}=\frac{x^4+1}{2(x^6+1)}+\frac{1-x^4}{2(x^6+1)}$$

$$=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^4-x^2+1)(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x^2}{2(x^6+1)}-\frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}$$

而
$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C,$$

$$\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^6+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C.$$

设 $\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}$，用 $-x$ 代 x 得

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-Ax+B}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{-Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1},$$

$\therefore A=-C,\ B=D$. 此外又有

$$x^2-1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1).$$

比较两端 x^2 项和常数项的系数，有 $-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D=1$；$B+D=-1$，解得 $A=-C=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$B=D=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx=-\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{d(x^2+\sqrt{3}x+1)}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{d(x^2-\sqrt{3}x+1)}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+C.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}x^3$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+C.$$

(2) 设 $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1},$$

则有

$$1=A(x^4+x^2+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)$$
$$+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$$

令 $x=1$，得 $1=3A$，$\therefore A=\frac{1}{3}$. 比较上式两端 x^4，x^3，x^2，x 和常数项的系数得 $A+B+D=0$，$-2B+C+E=0$，$A+2B-2C=0$，$-B+2C-D=0$，$A-C-E=1$. 解出 $B=-\frac{1}{3}$，$C=-\frac{1}{6}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$
$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

647. 求下列函数的积分：

$$\frac{1}{(x+2)^4(x-1)^2}$$

［解］ 令 $\frac{x-1}{x+2}=t$, $dt=\frac{3}{(x+2)^2}dx$, $dx=\frac{(x+2)^2}{3}dt$,

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}(1-t)$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(x+2)^4(x-1)^2}=\frac{1}{3^5}\int\frac{(1-t)^4}{t^2}dt$$
$$=\frac{1}{3^5}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+6-4t+t^2\right)dt$$
$$=\frac{1}{3^5}\left(-\frac{1}{t}-4\ln|t|+6t-2t^2+\frac{1}{3}t^3\right)+C$$
$$=\frac{1}{3^5}\left[\frac{x+2}{1-x}-4\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+\frac{6(x-1)}{x+2}-\frac{2(x-1)^2}{(x+2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(x-1)^3}{3(x+2)^3}\right]+C.$$

［说明］ 一般的形如 $\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ 的积分（m, n 是正整数），参见第 621 题.

648. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{x^4+1}{x^6+1}$; (2) $\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}$;

(3) $\dfrac{1}{x(x^{10}+1)^2}$; (4) $\dfrac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

［解］ (1) $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}=\dfrac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{x^6+1}$

$$\therefore\quad \int\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^6+1}$$

$$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3+C.$$

(2) $$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx=\frac{1}{n}\int\frac{x^n dx^n}{x^n+1}=\frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)dx^n$$

$$=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C.$$

(3) $$\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dx^5}{x^5(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t(t^2+1)^2}\quad(令\ t=x^5)$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{(t^2+1)-t^2}{t(t^2+1)^2}\,dt=\frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{t(t^2+1)}-\frac{t}{(t^2+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{5}\int\left[\frac{t^2+1-t^2}{t(t^2+1)}-\frac{t}{(t^2+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}-\frac{t}{(t^2+1)^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\frac{1}{2(t^2+1)}\right)+C$$

$$=\frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{x^{10}+1}\right)+C.$$

(4) $$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx=\int\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\,dx$$

$$=\int\frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1}=\int\frac{dt}{t^2+t-1}\quad\left(令\ t=x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

649. 求 $I_n=\int\frac{dx}{(x^3+1)^n}$ 的递推公式.

［解］ $\because\quad \left[\frac{x}{(x^3+1)^{n-1}}\right]'=\frac{1}{(x^3+1)^{n-1}}-\frac{3(n-1)x^3}{(x^3+1)^n}$

$$=\frac{1}{(x^3+1)^{n-1}}-\frac{3(n-1)(x^3-1+1)}{(x^3+1)^n}$$

$$=\frac{4-3n}{(x^3+1)^{n-1}}+\frac{3(n-1)}{(x^3+1)^n},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(x^3+1)^n}=\frac{1}{3(n-1)}\left\{\left[\frac{x}{(x^3+1)^{n-1}}\right]'+\frac{3n-4}{(x^3+1)^{n-1}}\right\},$$

两端积分得 $\quad I_n=\frac{1}{3(n-1)}\left[\frac{x}{(x^3+1)^{n-1}}+(3n-4)I_{n-1}\right].$

又 $\quad I_1=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

（参见第 639(2) 题）.

650. 给出积分 $I=\int\frac{px^2+qx+r}{x^2(x-1)}dx$ 是有理函数的条件.

［分析］ 形如 $\frac{P(x)}{(x-a)^m(x-b)^n}$ 的有理函数（其中 m, n 都是正整数，$P(x)$ 是次数低于 $m+n$ 的多项式），总可以化为下列简单分式之和:

(i) $\frac{A_1}{x-a}$, (ii) $\frac{A_n}{(x-a)^n}\ (n\geqslant 2)$,

(iii) $\frac{B_1}{(x-b)}$, (iv) $\frac{B_n}{(x-b)^n}\ (n\geqslant 2)$,

只有(ii)和(iv)的积分是有理函数，所以欲使 $\int\frac{P(x)}{(x-a)^m(x-b)^n}dx$ 是有理函数当且仅当 $A_1=B_1=0$.

［解］ 设 $\frac{px^2+qx+r}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$，欲使 I 为有理函数，当且仅当 $A=0$, $C=0$, 而

$$px^2+qx+r=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2,$$

令 $x=1$ 得 $C=p+q+r$, 比较两端 x^2 项的系数得 $A+C=p$, $\therefore A=0$, $C=0$ 即 $p+q+r=0$, 亦即 $p=0$, $q+r=0$.

651. 设 $P(x)$ 是一多项式，其次数低于 n. 在什么条件下

$\int \frac{P(x)}{(x-a)^n}dx$ 是有理函数.

[分析] 参见上一题的分析.

[解] 将 $P(x)$ 展开为 $x-a$ 的多项式:

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$\therefore \int\frac{P(x)}{(x-a)^n}dx=P(a)\int\frac{dx}{(x-a)^n}+P'(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\int\frac{dx}{x-a}.$$

欲使 $\int\frac{P(x)}{(x-a)^n}dx$ 是有理函数,当且仅当 $P^{(n-1)}(a)=0$, 即 $P(x)$ 是一个次数不超过 $n-2$ 的多项式.

652. 给出积分 $I=\int\frac{x^2+px+q}{(x-a)^2(x-b)^2}dx$ 是有理函数的条件.

[解] 当 $a=b$ 时,

$$\frac{x^2+px+q}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{(x-a)^2+(2a+p)(x-a)+a^2+pa+q}{(x-a)^4}$$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{2a+p}{(x-a)^3}+\frac{a^2+pa+q}{(x-a)^4}$$

这时, I 必定是有理函数.

当 $a\neq b$ 时,令 $\frac{x-a}{x-b}=t$; 则

$$x-a=\frac{(a-b)t}{1-t},\quad x-b=\frac{a-b}{1-t},\quad \left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx=\frac{1}{t}dt.$$

$$\therefore \int\frac{x^2+px+q}{(x-a)^2(x-b)^2}dx$$

$$=\frac{1}{(a-b)^3}\int\frac{(a-bt)^2+p(a-bt)(1-t)+q(1-t)^2}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{(a-b)^3}\int\left[\frac{a^2+pa+q}{t^2}-\frac{2ab+p(a+b)+2q}{t}+b^2+pb+q\right]dt$$

可见, I 是有理函数当且仅当 $2ab+p(a+b)+2q=0$.

653. 证明

(1) $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

(n 是正整数, $n\geqslant2$, $4q-p^2>0$). $Q(x)$ 是一个次数低于 $2n-2$ 的多项式, λ 是一常数.

(2) 设 P, Q 都是多项式, $Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$, $(4q-p^2>0)$, P 的次数低于 Q 的次数, 则

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

其中 P_1, Q_1, P_2, Q_2 都是多项式, P_1 的次数低于 Q_1, P_2 的次数低于 Q_2, 并且 $Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$, $Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$.

[证] (1) 作代换 $x+\frac{p}{2}=t$, 则 $dx=dt$, $x^2+px+q=t^2+a^2$,

$$a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},\quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right),$$

$$\therefore\quad\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}dt$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

$$\therefore\quad\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}=\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

再由第 635 题关于 $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ 的递推公式, 便得到

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

重复上面的步骤, 又得到

$$\int\frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}=\frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{n-2}}+\beta\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-2}}.$$

继续下去，最后有

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{n-2}}+\cdots$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

(2) 先将 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 表示为部分分式之和：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\cdots,$$

$$\therefore\quad\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1dx}{x-a}+\cdots+\int\frac{A_k}{(x-a)^k}dx+\cdots$$

$$+\int\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}dx+\cdots+\int\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}dx+\cdots,$$

而

$$\sum_{i=2}^{k}\int\frac{A_i}{(x-a)^i}dx=\frac{P'(x)}{(x-a)^{k-1}}+C,$$（P' 是次数低于 $k-1$ 的多项式）。

利用(1)的结果又有

$$\sum_{i=2}^{m}\int\frac{M_ix+N_i}{(x^2+px+q)^i}dx=\frac{P''(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q},$$

$$\therefore\quad\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P'(x)}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P''(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}+\cdots+\int\frac{A_1dx}{x-a}+\int\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}dx+\cdots$$

$$=\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots}+\int\frac{P_2(x)}{(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots}dx$$

$$=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

654. 利用上一题的结果，求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{(x^4-1)^3}$；　　(2) $\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

［解］ (1) 先将积分表示为

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}=\frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2}$$
$$+\int\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}\,dx,$$

两端求导后，右端通分，并比较分子的同次幂的系数，有

$$\begin{array}{c|l}
x^{11} & K=0,\\
x^{10} & -A+L=0,\\
x^{9} & -2B+M=0,\\
x^{8} & -3C+N=0,\\
x^{7} & -4D-2K=0,\\
x^{6} & -7A-5E-2L=0,\\
x^{5} & -6B-6F-2M=0,\\
x^{4} & -5C-7G-2N=0,\\
x^{3} & -4D-8H+K=0,\\
x^{2} & -3E+L=0,\\
x & -2F+M=0,\\
x^{0} & -G+N=1.
\end{array}$$

解得 $A=B=D=E=F=H=K=L=M=0$, $C=\frac{7}{32}$, $G=-\frac{11}{32}$, $N=\frac{21}{32}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(x^4-1)^3}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}.$$

后一个积分的计算如下：

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2+1)(x^2-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(x^4-1)^3}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

(2) 将积分表示为

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^3}\,dx=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+1)(x^2+1)}$$
$$+\int\frac{Dx^2+Ex+F}{(x+1)(x^2+1)}\,dx,$$

两端求导后，右端通分并比较分子同次幂的系数，有

$$\begin{array}{c|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+D+E=4, \\ x^3 & -2B+D+E+F=4, \\ x^2 & A-B-3C+D+E+F=16, \\ x & 2A-2C+E+F=12, \\ x^0 & B-C+F=8. \end{array}$$

解得 $A=-1,\ B=1,\ C=-4,\ D=0,\ E=3,\ F=3,$

$$\therefore\ \int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\operatorname{arctg}x+C.$$

§5. 无理函数的积分

655. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$；　　(2) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$；

(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$；　　(4) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

［解］ (1) 令 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $\sqrt{x}=t^2,\ dx=4t^3$；

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}=\int\frac{4t^3}{t^2(1+t)^3}\,dt=4\int\frac{t\,dt}{(1+t)^3}$$

$$=4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right]dt$$

$$=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C=-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}+C.$$

(2) 令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1,\ dx=2t\,dt$，

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}=\int\frac{2t\,dt}{t^2+t+1}=\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}-\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$=\ln(t^2+t+1)-\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\ln(t^2+t+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x-1})-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(3) 令 $\sqrt{x+1}=t$, 则 $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=2\int\frac{t\,dt}{(t^2-1)t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

(4) 令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$, 则 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$,

$$\therefore\quad \int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$=-4\int\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$=\int\left(\frac{-2}{1-t^2}+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+2\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

656. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}$; (2) $\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}$.

[解] (1) 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 则 $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$,

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^2}{1-t^2}\,dt=6\int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt$$

$$=3\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-6t+C=3\ln\left|\frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\right|-6\sqrt[6]{x}+C.$$

(2) 令 $\sqrt[6]{1+x}=t$, 则 $x=t^6-1$, $dx=6t^5\,dt$,

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}\,dx=\int \frac{t^6-1}{t^3-t^2}\cdot 6t^5\,dt$$

$$=6\int \frac{t^3(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}{t-1}\,dt$$

$$=6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right)+C$$

$$=6\left[\frac{1}{9}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}(1+x)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(1+x)^{\frac{7}{6}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}(1+x)+\frac{1}{5}(1+x)^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{4}(1+x)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$$

657. 求下列函数的不定积分：

(1) $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$；　　(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$；　　(4) $\dfrac{x^2}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\ (b\neq 0)$。

［解］ (1) 令 $\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}=t$, 则 $x=\dfrac{1-t^2}{2(1+t^2)}$, $dx=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$,

$$\therefore \int\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}\,dx=-2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}+2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$=-2\operatorname{arc\,tg} t+\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arc\,tg} t+C\text{（参见第 635 题）}$$

$$=\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{arc\,tg} t+C$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+C.$$

(2) 令 $\sqrt[3]{x+1}=t$, 则 $x=t^3-1$, $dx=3t^2\,dt$.

$$\therefore \int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=3\int\frac{t^2\,dt}{1+t}=3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C$$

$$=3\left[\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{3}}+\ln|\sqrt[3]{x+1}+1|\right]+C.$$

(3) 令 $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=t$ 则 $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$

$$\therefore \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=12\int (t^6-t^3)\,dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C$$

$$=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C$$

$$=\frac{3}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}[4(1+x^{\frac{1}{4}})-7]+C.$$

(4) 令 $\sqrt{a+bx}=t$，则 $x=\frac{1}{b}(t^2-a)$，$dx=\frac{2t}{b}dt$，

$$\therefore \int \frac{x^2}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{2}{b^3}\int \frac{(t^2-a)^2}{t^2}\,dt$$

$$=\frac{2}{b^3}\int\left(t^2-2a+\frac{a^2}{t^2}\right)dt=\frac{2}{b^3}\left(\frac{t^3}{3}-2at-\frac{a^2}{t}\right)+C$$

$$=\frac{2}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3}-2a\sqrt{(a+bx)}-\frac{a^2}{\sqrt{(a+bx)}}\right]+C$$

$$=\frac{2(b^2x^2-4abx-8a^2)}{3b^3\sqrt{(a+bx)}}+C.$$

658. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$；　　(2) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}$.

(1) [解] 令 $(1+x)^{\frac{1}{2}}=t$，则 $x=t^2-1$，$dx=2t\,dt$，

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=2\int\frac{t\,dt}{t^3+t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg} t+C=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+x}+C.$$

(2) [解一] $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)\,dx^2}{x^2\sqrt{x^4+1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)\,dt}{t\sqrt{t^2+1}}\quad(\text{令 } t=x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}\right|+C$$

(参见第596(2)题).

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right|\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})-\ln|1+\sqrt{x^4+1}|\right]$$

$$+\ln|x|+C.$$

［解二］ $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$

$$=\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right|+C$$

$$=\ln|x^2-1+\sqrt{x^4+1}|-\ln|x|+C.$$

659．求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$；　　(2) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$.

(1)［解一］ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$，令 $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=t$，则

$$x=\frac{1}{1+t^2},\quad dx=\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\,\mathrm{arc\,tg}\,t+C$$

$$=-2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C.$$

［解二］ 当 $x>0$ 时令 $x=t^2$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}}=2\arcsin t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

(2)［解］ $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{(a+x)(a-x)}=(a+x)\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$，

$$令\quad\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=t,$$

则 $dx=-\dfrac{4at}{(1+t^2)^2}\,dt$，$\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{1+t^2}$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{2}{a^2}\int \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}dt = -\frac{2}{a^2}\int \frac{2+(t^2-1)}{(1-t^2)^2}dt$$

$$= -\frac{2}{a^2}\left[2\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} + \int \frac{dt}{t^2-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t-1)^2} - \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{(t+1)^2} + \int \frac{dt}{t+1}\right]$$

$$-\frac{2}{a^2}\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{t-1} - \ln|t-1| - \frac{1}{t+1} + \ln|t+1|\right]$$

$$-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2t}{t^2-1} + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{2t}{a^2(t^2-1)} + C = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$$

660. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ $(a\neq 0)$; (2) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

(1) [解一] 令 $\sqrt{x^2-a^2}=t$, 则 $x^2=t^2+a^2$, $dx=\dfrac{t\,dt}{x}$.

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \int \frac{t^2}{a^2+t^2}dt = \int dt - a^2\int \frac{dt}{a^2+t^2}$$

$$= t - a\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a} + C = \sqrt{x^2-a^2}$$

$$- a\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C.$$

[解二] 令 $x=a\sec t$, 则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg}t$, $dx=a\operatorname{tg}t\sec t\,dt$.

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = a\int \operatorname{tg}^2 t\,dt = a\int (\sec^2 t - 1)dt$$

$$= a\operatorname{tg}t - at + C = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a} + C.$$

(2) [解] $I=\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}dx=\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}}dx$

$$=\mp\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}}$$

($x>0$ 时取“$-$”，$x<0$ 时取“$+$”)。

令 $t=x+\frac{1}{x}$，则 $dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$，

$$\therefore\quad I=\mp\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}$$

再令 $\sqrt{t^2-2}=u$，$\therefore t^2=u^2+2$，$t\,dt=u\,du$，

$$\therefore\quad \int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{2}}.$$

将 $\sqrt{t^2-2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{|x|}$ 代入，得

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}.$$

661. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$;　　　　(2) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-x+2}}$.

[解] (1) 利用第一种欧拉代换，令 $\sqrt{x^2+2x-1}=t-x$，则

$$x=\frac{1+t^2}{2(1+t)},\quad dx=\frac{t^2+2t-1}{2(1+t)^2}dt,\quad \sqrt{x^2+2x-1}=\frac{t^2+2t-1}{2(1+t)}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C.$$

(2) 利用第一种欧拉代换，令 $\sqrt{x^2-x+2}=t+x$，则

$$x=\frac{2-t^2}{1+2t},\quad dx=\frac{-2(t^2+t+2)}{(1+2t)^2}dt,\quad \sqrt{x^2-x+2}=\frac{2+t+t^2}{1+2t}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}=\int\frac{2}{t^2-2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+2}-x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}-x+\sqrt{2}}\right|+C.$$

[说明] (1)和(2)亦可作代换 $\sqrt{x^2+2x-1}=t+x$, $\sqrt{x^2-x+2}=t-x$.

662. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a\neq0)$; (2) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

(1) [解一] 利用第一种欧拉代换, 令 $\sqrt{x^2-a^2}=t-x$, 则

$$x=\frac{t^2+a^2}{2t},\quad dx=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt,\quad \sqrt{x^2-a^2}=\frac{t^2-a^2}{2t}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=4\int\frac{t}{(t^2+a^2)^2}\,dt=2\int\frac{dt^2}{(t^2+a^2)^2}=-\frac{2}{t^2+a^2}+C$$

$$=-\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-a^2}}+C.$$

[解二] 令 $x=a\sec t\left(0<t<\pi,\quad t\neq\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$dx=a\,\mathrm{tg}\,t\sec t\,dt,\quad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a^3\sec^2 t\,\mathrm{tg}\,t}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2\sec^2 t}}+C=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$$

(2) [解一] 利用第一种欧拉代换, 令 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$, 则

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\,\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|-\frac{3}{2(2t-1)}+C$$

$$=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1|$$

$$-\frac{3}{2[2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1]}+C.$$

［解二］ 利用第二种欧拉代换，令 $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$，则 $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$，

$$dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt,\quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{2(t+1)}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{t+1}+C$$

$$=2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1-x}{x}\right|$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1+x}{x}\right|$$

$$+\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+1+x}+C.$$

(3) ［解］ 利用第二种欧拉代换，令 $\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1$，则

$$x=\frac{2(t-1)}{1+t^2},\quad dx=\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}dt,\quad 1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2t(t-1)}{1+t^2}.$$

$$\therefore \int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt$$

$$=\int\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t^2+1}\right]dt$$

$$=-\ln|t|+\ln|t-1|-2\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right|-2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}+C.$$

663. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ $(a<b<x)$; (2) $\dfrac{1}{x\sqrt{-3+4x-x^2}}$;

(3) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

[解] (1) 利用第三种欧拉代换，令 $\sqrt{\dfrac{(x-b)}{(x-a)}}=t$, 则 $x=\dfrac{at^2-b}{t^2-1}$,

$$dx=\frac{2(b-a)t}{(t^2-1)^2}dt,\ \sqrt{(x-a)(x-b)}=(x-a)t=\frac{(a-b)t}{t^2-1}.$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\int\frac{t^2-1}{(a-b)t}\cdot 2\frac{(b-a)t}{t^2-1}dt$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b}-\sqrt{x-a}}\right|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a})+C.$$

(2) $-3+4x-x^2=(x-1)(3-x)$, 利用第三种欧拉代换，

$$令\quad \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=t,$$

则 $x=\dfrac{3t^2+1}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$, $\sqrt{-3+4x-x^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x\sqrt{-3+4x-x^2}}=\int\frac{1+t^2}{3t^2+1}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=\int\frac{dt}{3t^2+1}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}t)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3x-3}{3-x}}+C.$$

(3) $1+x-x^2=(x-\alpha)(\beta-x)$, $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 利用第三种欧拉代换，令 $\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$, 则

$$x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{1+x-x^2}=(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=\frac{(\beta-\alpha)t}{1+t^2}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}=2\int\frac{dt}{1+\alpha+(1+\beta)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{(1+\beta)(x-\alpha)}{(1+\alpha)(\beta-x)}}+C$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{2x-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-2x}}\right)+C.$$

664. 求下列函数的不定积分:

(1) $x^2(x^3+1)^{\frac{5}{3}}$; (2) $\dfrac{x}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$.

[解] (1) 在形式 $x^m(a+bx^n)^p$ 中, $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{2+1}{3}=1$, 令 $\sqrt[3]{x^3+1}=t$, 则 $x=(t^3-1)^{\frac{1}{3}}$, $dx=t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}dt$.

$$\therefore\quad \int x^2(x^3+1)^{\frac{5}{3}}dx=\int(t^3-1)^{\frac{2}{3}}t^5\cdot t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}dt=\int t^7\,dt$$

$$=\frac{1}{8}t^8+C=\frac{1}{8}(x^3+1)^{\frac{8}{3}}+C.$$

(2) 在形式 $x^m(a+bx^n)^p$ 中, $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{1+1}{3}-\dfrac{2}{3}=0$, 令 $(1+x^{-3})^{\frac{1}{3}}=t$, 则 $x=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $1+x^3=\dfrac{t^3}{t^3-1}$, $dx=-\dfrac{t^2}{(t^3-1)^{\frac{4}{3}}}dt$.

$$\therefore\quad \int\frac{x}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}dx=-\int\frac{dt}{t^3-1}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|1-t|+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\quad \text{(参见第 643(1) 题)}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{t^3-1}{(t-1)^3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln[(1+x^3)^{\frac{1}{3}}-x]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}+1\right]+C.$$

665. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{x(a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}}$ $(a>0)$;　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}$;

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;　　(4) $\dfrac{1}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

［解］ (1) 在形式 $x^m(a+bx^n)^p$ 中，$\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{4}=0$,

令 $\sqrt[3]{a^4-x^4}=t$,

则 $x=(a^4-t^3)^{\frac{1}{4}}$, $dx=-\dfrac{3t^2}{4}(a^4-t^3)^{-\frac{3}{4}}dt$.

$$\therefore \int\frac{dx}{x(a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3-a^4}=\frac{1}{4a^{\frac{8}{3}}}\int\frac{dy}{y^3-1}\quad\left(令\ y=\frac{t}{a^{\frac{4}{3}}}\right)$$

$$=\frac{1}{4a^{\frac{8}{3}}}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(y-1)^2}{y^2+y+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

(参见第643(1)题)

$$=\frac{1}{24a^{\frac{8}{3}}}\left[\ln\frac{(y-1)^3}{y^3-1}-6\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{24a^{\frac{8}{3}}}\left[\ln\frac{(t-a^{\frac{4}{3}})^3}{t^3-a^4}-6\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{3}a^{\frac{4}{3}}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{24a^{\frac{8}{3}}}\left\{\ln\frac{[a^{\frac{4}{3}}-(a^4-x^4)^{\frac{1}{3}}]^3}{x^4}\right.$$

$$\left.-6\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2(a^4-x^4)^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{3}a^{\frac{4}{3}}}\right\}+C.$$

(2) 在形式 $x^m(a+bx^n)^p$ 中，$\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{3}-\dfrac{4}{3}=-1$, 令

$(1+x^{-3})^{\frac{1}{3}}=t$,　则　$x=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx=-t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}dt$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}=-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+C=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}+C.$$

(3) 在形式$x^m(a+bx^n)^p$中，$\frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{3}-\frac{1}{3}=0$，令 $(x^{-3}-1)^{\frac{1}{3}}=t$，则 $x=(1+t^3)^{-\frac{1}{3}}$，$dx=-t^2(1+t^3)^{-\frac{4}{3}}dt$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=-\int\frac{t}{t^3+1}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$$

（参见第643(2)题并用 $-t$ 代x）

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^3}{t^3+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{1-x^3}+x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{\sqrt{3}x}+C.$$

(4) 令 $x=t^2$，则 $\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=2\int\frac{dt}{t^2(2a-t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

在形式 $x^m(a+bx^n)^p$ 中，$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}-\frac{3}{2}=-2$，

令 $u=\sqrt{2at^{-2}-1}$，

则 $t^2=\frac{2a}{1+u^2}$，$2a-t^2=t^2u^2$，$t\,dt=-\frac{2au}{(1+u^2)^2}du$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=2\int\frac{dt}{t^2(2a-t^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2a^2}\int\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+C=\frac{1-u^2}{2a^2u}+C$$

$$=\frac{1-at^{-2}}{a^2(2at^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}}+C=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C.$$

666. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$; (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$

［解］ (1) 令$t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，$dx=2tdt$，

$$\therefore\quad \int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}dt$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t+1}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$=\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$,

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$dx=\frac{-6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$，

$$\therefore\quad I=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=\int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2}$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C.$$

667. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$； (2) $\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

［解］ (1) 利用第三种欧拉代换，$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，则

$$I=\int\frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{t^4-1}{3t^4+1}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3t^4+1}\right)dt=\frac{t}{3}-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{3t^4+1},$$

$$\int\frac{dt}{3t^4+1}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{du}{u^4+1}\quad(\text{令 }\sqrt[4]{3}\,t=u)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{12}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}u}{1-u^2}+\frac{1}{4\sqrt[4]{12}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}+C$$

(参见第 645(2) 题)。

$$\therefore\quad I=\frac{t}{3}+\frac{2}{3\sqrt[4]{12}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[4]{12}\,t}{\sqrt{3}\ t^2-1}$$

$$-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\ln\frac{\sqrt{3}\ t^2+\sqrt[4]{12}t+1}{\sqrt{3}\ t^2-\sqrt[4]{12}t+1}+C$$

其中 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

(2) $$\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,dx=\int\frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\,dx\quad(x>0)$$

$$=\int\frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}}=\int\frac{d\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\sqrt{1-\dfrac{2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}}}\,d\left(\frac{\sqrt{2}}{x+\dfrac{1}{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}\,x}{x^2+1}+C.$$

668. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$; (2) $\dfrac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}$.

[解] (1) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{2-\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}+C.$$

(2) 作代换 $t=x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}$, 则

$$x=\frac{1}{2}\left(t-1-\frac{3}{4t}\right),\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt,$$

$$\therefore \quad I=\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left[4-\frac{8t^2-6t+3}{t^2(2t+1)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(4-\frac{A}{t}-\frac{B}{t^2}-\frac{C}{2t+1}\right)dt,$$

由恒等式 $8t^2-6t+3=At(2t+1)+B(2t+1)+Ct^2$，解得 $A=-12$, $B=3$, $C=32$,

$$\therefore \quad I=\frac{1}{8}\int\left(4+\frac{12}{t}-\frac{3}{t^2}-\frac{32}{2t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\ln|t|+\frac{3}{8t}-2\ln|2t+1|+C$$

$$=\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2})^3}{16(x+1+\sqrt{1+x+x^2})^4}+C.$$

669. 求 $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a+cx^2}}\,dx$ 的递推公式(n 是正整数，$n\geqslant 1$，$c\neq 0$)。

［解］ $I_n=\frac{1}{c}\int x^{n-1}d\sqrt{a+cx^2}=\frac{1}{c}x^{n-1}\sqrt{a+cx^2}$

$$-\frac{n-1}{c}\int\frac{x^{n-2}(a+cx^2)}{\sqrt{a+cx^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{c}x^{n-1}\sqrt{a+cx^2}-\frac{(n-1)a}{c}I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

$$\therefore \quad I_n=\frac{1}{nc}x^{n-1}\sqrt{a+cx^2}-\frac{(n-1)a}{nc}I_{n-2}$$

....

$$I_1=\int\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\,dx=\frac{1}{2c}\int\frac{d(a+cx^2)}{\sqrt{a+cx^2}}=\frac{1}{c}\sqrt{a+cx^2}+C.$$

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{a+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(\sqrt{c}\,x+\sqrt{a+cx^2})+C.$$

670. 设 $p+q=kn$, p, q, k, n 都是正整数，证明

$$\int R[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$$

是初等函数，其中 $R(u,\ v)$ 是 $u,\ v$ 的有理函数.

〔证〕 作代换 $\frac{x-a}{x-b}=t^n$，则 $x=\frac{bt^n-a}{t^n-1}$，$dx=\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt$，

$$x-b=\frac{b-a}{t^n-1},$$

$$\therefore\quad \int R[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}\cdot(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx=\int R\left[x,\ \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{p+q}{n}}\right]dx$$

$$=\int R\left[\frac{bt^n-a}{t^n-1},\ t^p\left(\frac{b-a}{t^n-1}\right)^k\right]\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,$$

被积函数是 t 的有理函数，故其不定积分是初等函数.

671. 设 $R(u,\ v,\ w)$ 是 $u,\ v,\ w$ 的有理函数，给出

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx,\quad (a,\ b\neq 0)$$

的求解方法.

〔解〕 令 $t=\sqrt{ax+b}$，则 $x=\frac{t^2-b}{a}$，$\sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{ct^2}{a}+\frac{ad-cb}{a}}$，

$$dx=\frac{2t}{a}dt,$$

$$\therefore\quad \int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-b}{a},\ t,\ \sqrt{\frac{ct^2}{a}+\frac{ad-cb}{a}}\right)\frac{2t}{a}dt$$

$$=\int R^*(t,\sqrt{At^2+B})dt.$$

其中 $R^*(r,\ s)$ 是 r,s 的有理函数，再利用三种欧拉代换中的相应的一种便可将上述不定积分用初等函数表示出来.

672. 设 $P(x)$ 是 n 次多项式，证明

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\qquad(a\neq 0).$$

这里 $Q(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，λ 是一常数. 并由此求不定积分

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

［证］ 先假设 $P(x)=x^n$，$(n\geqslant1)$. 令 $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{Y}}\,dx$，$Y=ax^2+bx+c$. 由等式

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\sqrt{Y})'&=(n-1)x^{n-2}\sqrt{Y}+\frac{x^{n-1}Y'}{2\sqrt{Y}}\\&=\frac{2(n-1)x^{n-2}Y+x^{n-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}}\\&=na\frac{x^n}{\sqrt{Y}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)b\frac{x^{n-1}}{\sqrt{Y}}+(n-1)c\frac{x^{n-2}}{\sqrt{Y}}.\end{aligned}$$

两端积分以后，便得到递推公式:

$$\begin{aligned}x^{n-1}\sqrt{Y}&=na\int\frac{x^n}{\sqrt{Y}}\,dx+\left(n-\frac{1}{2}\right)b\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{Y}}\,dx+(n-1)c\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{Y}}\,dx\\&=naI_n+\left(n-\frac{1}{2}\right)bI_{n-1}+(n-1)cI_{n-2}.\end{aligned}$$

当 $n=1$，得到 $I_1=\frac{1}{a}\sqrt{Y}-\frac{b}{2a}I_0$;

当 $n=2$，$\quad I_2=\frac{1}{4a^2}(2ax-3b)\sqrt{Y}+\frac{1}{8a^2}(3b^2-4ac)I_0.$

继续下去，便得出

$$I_n=P_{n-1}(x)\sqrt{Y}+\alpha I_0=P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

这里 $P_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，α 是一常数.

当 $P(x)$ 是一般的 n 次多项式时，$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ 是上述 I_n，I_{n-1}，…，I_1，I_0 的线性组合，利用上面的结果立即得

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

其中 $Q(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，λ 是一常数.

下面，利用这一结果求 $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. 令

$$\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

两端求导后，乘 $\sqrt{x^2+2x+2}$，得

$$x^3-x+1=(2ax+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+\lambda.$$

比较方程两端的系数，有

$$3a=1,\ 5a+2b=0,\ 4a+3b+c=-1,\ 2b+c+\lambda=1.$$

解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{5}{6}$，$c=\frac{1}{6}$，$\lambda=\frac{5}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx&=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\\&=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\\&=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\\&\quad+\frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.\end{aligned}$$

673. 怎样求形如 $I=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的积分，并求 $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

［解］ 作代换 $x-\alpha=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}$，

$$ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2},$$

$$\therefore\quad I=-\int\frac{t^{k-1}}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}dt.$$

如果 α 不是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 I 就是形如第 672 题中的积分．如果 α 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，这时令 $(2a\alpha+b)t+a=y^2$，就可以将被积表达式有理化．

下面求 $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$．作代换 $x-1=\frac{1}{t}$，则

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{2}\int t\,d\sqrt{1-2t^2}$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-2t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4}\left(t\sqrt{1-2t^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}\,t\right)+C$$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$$

674. 求 $\int\frac{dx}{y^2}$，其中 y 与 x 之间的关系由隐函数 $x^3-3axy+y^3=0$ 确定.

［分析］ 要从方程 $x^3-3axy+y^3=0$ 中解出 y 是很困难的，如令 $y=tx$，代入方程则可解出 $x=x(t)$，$y=y(t)$，那末 $\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{x'(t)\,dt}{y^2(t)}$.

［解］ 令 $y=tx$，解得

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\quad dx=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{y^2}=\frac{1}{3a}\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t}\right)dt=\frac{1}{3a}\left(-\frac{1}{3t^3}-2\ln|t|\right)+C$$

$$=-\frac{1}{3a}\left(\frac{x^3}{3y^3}+2\ln\left|\frac{y}{x}\right|\right)+C.$$

§ 6. 三角函数的积分

675. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{1+\sin x}$； (2) $\frac{1}{2\sin x-\cos x+5}$；

(3) $\frac{1}{a\sin x+b\cos x}$ $(a^2+b^2\neq0)$.

［解］ (1) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，

$$\therefore \int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C$$

$$=-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

(2) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\therefore \int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$=\int\frac{dt}{\left(\sqrt{3}\,t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{3}\,t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{3}\,t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

(3) $\because$ $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$,

$$\therefore \int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|+C$$ (参见第604(2)题)。

676. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{\cos x}{1+\cos x}$; (2) $\frac{1}{a+b\cos x}$ $(|a|\neq|b|)$;

(3) $\frac{1}{a+b\sin x}$ $(|a|\neq|b|)$.

[解] (1) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\therefore \int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{dt}{1+t^2}-\int dt$$

$$=2\operatorname{arc\,tg} t-t+C=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

(2) 设 $|a|>|b|$，并且不妨设 $a>0$，作代换 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=2\int\frac{dt}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}=2\int\frac{dt}{a+b+(a-b)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,t+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

设 $|a|<|b|$，并且不妨设 $b>0$，作同样的代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，有

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=2\int\frac{dt}{(b+a)-(b-a)t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,t}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$$

(3) 作代换 $x=\frac{\pi}{2}+t$ 或 $x=\frac{\pi}{2}-t$，可将 $\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ 化为上面的积分。

677. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$；　　(2) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$.

[解] (1) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\cos x(5+3\cos x)}=\int\frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1+t^2}{(1-t^2)(t^2+4)}dt=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{1-t^2}-\frac{3}{5}\int\frac{dt}{t^2+4}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{3}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}+C$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|-\frac{3}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}+C.$$

(2) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t)^2}{t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\int dt+\frac{1}{2}\int t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+t+\frac{t^2}{4}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C.$$

678. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}$;　　　　(2) $\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$.

(1) [解一]　令 $\operatorname{tg}x=t$，则 $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}=\int\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t|+\operatorname{arc\,tg}t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+\operatorname{tg}x|+x-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2x)\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{\sec x}\right|+x\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}[\ln|\sin x+\cos x|+x]+C.$$

[解二]　$\because\quad \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1\right]$,

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\frac{1}{2}\int dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{2}\int dx$$

$$=\frac{1}{2}[\ln|\sin x+\cos x|+x]+C.$$

(2) [解] 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\therefore\quad \int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx=2\int\frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

$$=-\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{1+t}{1+t^2}dt$$

$$=-\ln|1+t|+\operatorname{arc\,tg}t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sec\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right|+\frac{x}{2}+C.$$

679. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1}{a+b\operatorname{tg}x}$;　　(2) $\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}$.

[解] (1) 作代换 $t=\operatorname{tg}x$ $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$I=\int\frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}=\int\frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}.$$

将被积函数分解为部分分式

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)}=\frac{A}{a+bt}+\frac{Bt+C}{1+t^2},$$

得 $A+bB=0,\ aB+bC=0,\ A+aC=1,$

$$\therefore\quad A=\frac{b^2}{a^2+b^2},\quad B=-\frac{b}{a^2+b^2},\quad C=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

$$\therefore\quad I=\frac{b^2}{a^2+b^2}\int\frac{dt}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{-bt+a}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt|-\frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2)+\frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\frac{|a+bt|}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C.$$

(2) 作代换 $t=\operatorname{tg}x$, 则

$$\int\frac{\sin^2x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

$$=\int\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t}-\frac{1}{4}\cdot\frac{t-1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{|1+t|}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\cos x+\sin x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$$

680. 求 $I_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx,\ I_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx.$

［解］ $\because\quad bI_1+aI_2=\int dx=x+C,$

$$-aI_1+bI_2=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$$

$$=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C',$$

$$\therefore\quad I_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C_1,$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C_2.$$

681. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{\sin 2nx}{\sin x}$;　　　(2) $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$　(n 是正整数).

[解] (1) $\because\quad \sin 2nx=\sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx-\sin(2k-2)x]$

$$=2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x,$$

$$\therefore\quad \int\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=2\sum_{k=1}^{n}\int\cos(2k-1)x\,dx=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)}{2k-1}+C.$$

(2) 同样地.

$$\because\quad \sin(2n+1)x=\sum_{k=1}^{n}[\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x]+\sin x$$

$$=2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx+\sin x,$$

$$\therefore\quad \int\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=2\sum_{k=1}^{n}\int\cos 2kx\,dx+\int dx$$

$$=x+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{2k}+C.$$

682. 求不定积分 $\int\frac{dx}{A\cos^2x+2B\sin x\cos x+C\sin^2x}$, 其中 $AC-B^2>0$, $|x|<\frac{\pi}{2}$.

[解] $I=\int\frac{dx}{A\cos^2x+2B\sin x\cos x+C\sin^2x}$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x(A+2B\operatorname{tg}x+C\operatorname{tg}^2x)},$$

作代换 $t=\operatorname{tg}x$, 则

$$I=\int\frac{dt}{A+2Bt+Ct^2}=\int\frac{C\,dt}{(Ct+B)^2+(AC-B^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{C\operatorname{tg}x+B}{\sqrt{AC-B^2}}+C'.$$

683. 求不定积分 $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$, $(|a|\neq\sqrt{b^2+c^2})$.

[解] 令 $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$, 则

$$I=\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}.$$

若 $|a|>\sqrt{b^2+c^2}$，作代换 $\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}=t$，参见第 676(2) 题，有

$$I=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a-\sqrt{b^2+c^2}}}{\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}+C.$$

若 $|a|<\sqrt{b^2+c^2}$，作同样的代换，有

$$I=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a}+\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\cdot\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}}{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a}-\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\cdot\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}}\right|+C.$$

684. 证明 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C\,(a^2+b^2\neq0)$，并且 $\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=A$，$\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}=B$.

［分析］ 从要证明的等式右端来看，它等于

$$A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x},$$

从而问题化为求 A, B 使

$$\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}$$

［证］ 令 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$

$$=(Aa-Bb)\sin x+(Ab+Ba)\cos x$$

$$\therefore\quad a_1=Aa-Bb,\ b_1=Ab+Ba,$$

解得

$$A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx&=A\int dx+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx\\&=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}\\&=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.\end{aligned}$$

685. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}$；(2) $\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$　$(a^2+b^2\neq0)$.

［解］ (1) 利用第684题的结果，这里 $a_1=1$，$b_1=-1$，$a=1$，$b=2$，得 $A=-\frac{1}{5}$，$B=-\frac{3}{5}$.

$$\therefore\quad \int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

(2) 由第684题的解法知道

$$\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{A(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}+\frac{B(a\cos x-b\sin x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad \int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx=A\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

$$+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C$$

(参见第675(3)题)，

其中 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

686. 证明

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}\quad (a^2+b^2\neq0),$$

并且 $A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$，$C=c_1-Ac$.

［分析］ 参见第684题的分析.

［证］ 令 $a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=A(a\sin x+b\cos x+c)$

$$+B(a\cos x-b\sin x)+C$$

$$=(Aa-Bb)\sin x+(Ab+Ba)\cos x+Ac+C.$$

$$\therefore\quad a_1=Aa-Bb,\ b_1=Ab+Ba,\ c_1=Ac+C.$$

解得 $$A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},\ C=c_1-Ac.$$

$$\therefore \int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

687. 求 $\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}$ 的不定积分:

[解] 利用第 686 题的结果，这里 $A=-\frac{3}{5}$, $B=\frac{4}{5}$, $C=-\frac{6}{5}$.

$$\therefore \quad I=\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}.$$

在后一积分中，利用第 683 题结果，得

$$\therefore \quad I=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C.$$

688. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$ $(0<r<1,\ -\pi<x<\pi)$;

(2) $\frac{1}{a+b\operatorname{tg}x}$

[解] (1) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, 则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\therefore \int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=(1-r^2)\int\frac{2dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

(2) 令 $\operatorname{tg}x=t$, 则 $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{a+b\,\mathrm{tg}\,x}=\int\frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}$$

$$=\int\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a+bt}+\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{a-bt}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt|+\frac{a}{a^2+b^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,t$$

$$-\frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2)+C$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathrm{tg}\,x}{\sec x}\right|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C.$$

689. 求下列函数的不定积分:

(1) $\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}$;　(2) $\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}$;　(3) $\frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

〔解〕 (1) $\int\frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^3 x}=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

$$=\int\frac{1-2\sin^2 x+\sin^4 x}{\sin^3 x}\,d\sin x=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}-2\int\frac{d\sin x}{\sin x}+\int\sin x\,d\sin x$$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}-2\ln|\sin x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}=\int\frac{dx}{\mathrm{tg}^3 x\cos^8 x}=\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3}{\mathrm{tg}^3 x}\sec^2 x\,dx$

$$=\int\frac{(1+t^2)^3}{t^3}\,dt\quad(令\ t=\mathrm{tg}\,x)$$

$$=\int\left(t^3+3t+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x+\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x+3\ln|\mathrm{tg}\,x|-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x}+C.$$

(3) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\mathrm{tg}^4 x\cos^6 x}=\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^2}{\mathrm{tg}^4 x}\sec^2 x\,dx$

$$=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt\quad(令\ t=\mathrm{tg}\,x)$$

$$=\int\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt=t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C$$

$$=\mathrm{tg}\,x-2\,\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x+C.$$

690. 求下列函数的不定积分:

(1) $\sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}$; (2) $\frac{1}{\sin x\sin 2x}$;

(3) $\frac{1}{\sin x\cos 2x}$.

[解] (1) $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right)\sin\frac{x}{3}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{5}{6}x+\sin\frac{7}{6}x-\sin\frac{11}{6}x\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5}{6}x-\frac{3}{14}\cos\frac{7}{6}x+\frac{3}{22}\cos\frac{11}{6}x+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}\quad (令\ t=\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right)dt=-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|+C.$$

(3) $\int\frac{dx}{\sin x\cos 2x}=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}=-\int\frac{d\cos x}{\sin^2 x(2\cos^2 x-1)}$

$$=\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}\quad (令\ t=\cos x)$$

$$=\int\left(-\frac{1}{1-t^2}+\frac{2}{1-2t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,t}{1-\sqrt{2}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+C$$

$$=\ln|\operatorname{ctg}x-\csc x|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+C.$$

691. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ $(a\neq b)$;

(2) $\dfrac{1}{\sin x-\sin a}$ $(a\neq 0,\ \sin x\neq\sin a)$.

[解] (1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int\frac{d\sin(x+b)}{\sin(x+b)}-\int\frac{d\sin(x+a)}{\sin(x+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}\right|+C.$$

(2) $$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}dx$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C.$$

692. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3x\cos^5x}}$; (2) $\dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2x}}$.

[解] (1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3x\cos^5x}}=\int\frac{dx}{\cos^4x\sqrt{\mathrm{tg}^3x}}=\int\frac{1+\mathrm{tg}^2x}{\sqrt{\mathrm{tg}^3x}}\sec^2x\,dx$$

$$=\int\frac{1+t^2}{\sqrt{t^3}}dt\ (令\ t=\mathrm{tg}\,x)=-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-2\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}+\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3x}+C$$

(2) $\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\int\frac{\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\int\frac{dt}{(1-t^2)\sqrt[3]{t^2}}$

(令 $t=\sin x$)

$$=3\int\frac{du}{1-u^6}\ (\text{令 } u=\sqrt[3]{t})=\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1+u^3}+\frac{1}{1-u^3}\right)du$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2-u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2+u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

(参见 639(2) 题和 643(1) 题)

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(u+1)^2(u^2+u+1)}{(u-1)^2(u^2-u+1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}u}{1-u^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt[3]{\sin x}+1)^2(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin x}+1)}{(\sqrt[3]{\sin x}-1)^2(\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\sin x}+1)}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sqrt[3]{\sin^2 x}}+C.$$

693. 求 $I_n=\int\operatorname{tg}^n x\,dx$ 的递推公式，并计算 $\int\operatorname{tg}^8 x\,dx$.

【解】 $I_n=\int\operatorname{tg}^{n-2}x(\sec^2 x-1)\,dx=\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,d\operatorname{tg}x-I_{n-2}$

$$=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-I_{n-2}.$$

$$\int\operatorname{tg}^8 x\,dx=\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x-I_6=\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x-\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+I_4=\cdots$$

$$=\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x-\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C.$$

694. 设 $I_n=\int\sin^n x\,dx$，$J_n=\int\cos^n x\,dx$. 证明：

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2},$$

$$J_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

［证］ 仅证 J_n, I_n 相仿。

$$J_n=\int\cos^{n-2}x(1-\sin^2x)\,dx=J_{n-2}-\int(\cos^{n-2}x\sin x)\sin x\,dx$$

$$=J_{n-2}-\int\sin x\,d\left(-\frac{\cos^{n-1}x}{n-1}\right)$$

$$=J_{n-2}+\frac{1}{n-1}\cos^{n-1}x\sin x-\frac{1}{n-1}\int\cos^{n-1}x\,d\sin x$$

$$=J_{n-2}+\frac{1}{n-1}\cos^{n-1}x\sin x-\frac{1}{n-1}J_n.$$

$$\therefore J_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

695. 设 $I(m,n)=\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, m, n 都是正整数，证明：

$$I(m,n)=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2).$$

［证］ $I(m,n)=\int\sin^m x\cos^{n-1}x\,d\sin x$

$$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-\int\sin x\,d(\sin^m x\cos^{n-1}x)$$

$$=\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x-\int[(m+n-1)\sin^{m-1}x\cos^n x$$

$$-(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-2}x]\sin x\,dx$$

$$=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x-(m+n-1)I(m,n)$$

$$+(n-1)I(m,n-2)$$

$$(m+n)I(m,n)=\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+(n-1)I(m,n-2).$$

$$\therefore\quad I(m,n)=\frac{1}{m+n}\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2).$$

§ 7. 超越函数的积分

696. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$;　　　(2) $\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$;

(3) $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$;　　(4) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$.

(1) [解] $\displaystyle\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int\frac{de^x}{\sqrt{1+e^x}}=2\sqrt{1+e^x}+C$.

(2) [解] $\displaystyle\int\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^{2x}+1)e^x}{(e^x+1)e^x}dx=\int\frac{t^2+1}{(t+1)t}dt$ (令 $t=e^x$)

$\displaystyle=\int\left(1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)dt=t+\ln|t|-2\ln|t+1|+C$

$=e^x+x-2\ln(e^x+1)+C$.

(3) [解一]

$$\int\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx=\frac{1}{\ln a}\int\frac{d(a^x+a^{-x})}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+a^{-x})+C.$$

[解二] 令 $t=a^x$, 则 $dt=a^x\ln a\,dx$

$$\therefore\int\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx=\frac{1}{\ln a}\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t}=\frac{1}{\ln a}\int\left(\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\ln a}[\ln(t^2+1)-\ln t]+C$$

$$=\frac{1}{\ln a}\ln\frac{a^{2x}+1}{a^x}+C=\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+a^{-x})+C.$$

(4) [解] 令 $t=e^{2x}$, 则 $dt=2e^{2x}dx$.

$$\therefore\int\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2}=\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}=-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=-\frac{1}{2(e^{2x}+1)}+C.$$

697. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x-1}}$;　　(2) $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1+e^x}$.

[解] (1) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x-1}}=\int\frac{e^x de^x}{\sqrt[3]{e^x-1}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt[3]{t-1}}$ (令 $t=e^x$)

$$=\int\frac{(t-1)+1}{\sqrt[3]{t-1}}dt=\frac{3}{5}(t-1)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{3}{5}(e^x-1)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}(e^x-1)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{3}{10}(e^x-1)^{\frac{2}{3}}(2e^x+3)+C.$$

(2) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1+e^{x}}dx=-\int\frac{de^{-x}}{e^{-x}+1+e^{x}}=-\int\frac{e^{-x}de^{-x}}{e^{-2x}+e^{-x}+1}$

$$=-\int\frac{t\,dt}{t^2+t+1}\quad(令\ t=e^{-x})$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+e^{-x}+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2e^{-x}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

698. 设 $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是有理函数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是有理数，证明

$$\int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \cdots, e^{a_nx})dx\ 是初等函数.$$

[分析] 只要证明被积表达式 $R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \cdots, e^{a_nx})dx$ 可以有理化，从而其积分必为初等函数.

[证] 设 $a_1=\frac{P_1}{q_1}$, $a_2=\frac{P_2}{q_2}$, …, $a_n=\frac{P_n}{q_n}$; r 是 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的最小公倍数. $a_1=\frac{P_1r_1}{r}$, $a_2=\frac{P_2r_2}{r}$, …, $a_n=\frac{P_nr_n}{r}$. 令 $t=e^{\frac{x}{r}}$, 有

$$e^{a_1x}=t^{P_1r_1},\ e^{a_2x}=t^{P_2r_2},\ \cdots,\ e^{a_nx}=t^{P_nr_n},\ dt=\frac{1}{r}e^{\frac{x}{r}}dx.$$

$$\therefore\ \int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \cdots, e^{a_nx})dx=r\int R(t^{P_1r_1}, t^{P_2r_2}, \cdots, t^{P_nr_n})\frac{dt}{t}$$

$$=r\int F(t)\,dt.$$

$F(t)$ 是有理函数，因此其积分必是 t 的初等函数.

699. 求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$; (2) $\frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}$.

[解] (1) 令 $1+\ln x=t$, $x=e^{t-1}$, $dx=e^{t-1}dt$.

$$\therefore \int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int\frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^{t-1}}e^{t-1}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) 令 $t=\sqrt{3x-2}$, $dt=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}dx$, $x=\frac{t^2+2}{3}$.

$$\therefore \int\frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}dx=\int\frac{2}{3}\ln\left(\frac{t^2+2}{3}\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}\cdot t\cdot\ln\left(\frac{t^2+2}{3}\right)-\frac{2}{3}\int t\cdot\frac{\frac{2t}{3}}{\frac{t^2+2}{3}}dt$$

$$=\frac{2}{3}t\cdot\ln\left(\frac{t^2+2}{3}\right)-\frac{2}{3}\int\frac{2t^2}{t^2+2}dt$$

$$=\frac{2}{3}t\ln\left(\frac{t^2+2}{3}\right)-\frac{2}{3}\int 2dt+\frac{8}{3}\int\frac{dt}{t^2+2}$$

$$=\frac{2}{3}t\ln\left(\frac{t^2+2}{3}\right)-\frac{4}{3}t+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{3x-2}$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3x-2}{2}}+C.$$

700. 求下列函数的不定积分：

(1) $\cos^2\sqrt{x}$;　　　　(2) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}$　$(a>0)$.

[解] (1) 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$.

$$\therefore \int\cos^2\sqrt{x}\,dx=2\int t\cos^2 t\,dt=\int t(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int t d\sin 2t=\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\int\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C.$$

(2) 令 $t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}$，则 $x=\frac{a\sin^2 t}{1-\sin^2 t}=a\,\mathrm{tg}^2 t$.

$$\therefore\quad \int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx=\int t\,dx=tx-\int x\,dt=at\,\mathrm{tg}^2 t-a\int\mathrm{tg}^2 t\,dt$$

$$=a\left[t\,\mathrm{tg}^2 t+\int(1-\sec^2 t)\,dt\right]=a(t\,\mathrm{tg}^2 t+t-\mathrm{tg}\,t)+C$$

$$=(x+a)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}-\sqrt{ax}+C.$$

701. 求下列函数的不定积分：

(1) $\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$； (2) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3$.

［解］ (1) $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$

$$-\int x\,d\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$$

而 $\int x\,d\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{-2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right)dx+\frac{1}{4}\int\left(1-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

$$\therefore\quad \int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

(2) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3dx=-\frac{1}{2}\int\ln^3 x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\,d\ln^3 x$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x+\frac{3}{2}\int\frac{\ln^2 x}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2x^2}\ln^3 x-\frac{3}{4}\int\ln^2 x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4}\int\ln x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4x^2}\ln x + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4x^2}\ln x - \frac{3}{8x^2} + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C.$$

702. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(2) $\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$.

［解］ (1) 令 $x=\operatorname{tg} t$，则 $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}=\sec^3 t$，$dx=\sec^2 t\,dt$. 则

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{\operatorname{tg} t}{\sec t}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

$$\therefore\quad \int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

(2) $\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]=(x+a)\ln(x+a)+(x+b)\ln(x+b)$，

$$\therefore\quad \int\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\int\left[\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}\right]dx$$

$$=\int\ln(x+a)\,d\ln(x+b)+\int\ln(x+b)\,d\ln(x+a)$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int\ln(x+b)\,d\ln(x+a)$$

$$+\int\ln(x+b)\,d\ln(x+a)=\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$$

703. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x\,\text{arc tg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(2) $x\,\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)$.

［解］ (1) $\displaystyle\int\frac{x\,\text{arc tg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\text{arc tg}\,x\,d\sqrt{1+x^2}$

$$=\sqrt{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x-\int\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

(2) $\displaystyle I=\int x\,\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)\,d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int x^2d[\text{arc tg}\,x\cdot\ln(1+x^2)]$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\ln(1+x^2)\,d$$

$$-\int\frac{x^3}{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x\,dx.$$

而

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\ln(1+x^2)\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\ln(1+x^2)\,dx$$

$$=\int\ln(1+x^2)\,dx-\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=x\ln(1+x^2)-\int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx-\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=x\ln(1+x^2)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx-\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\,\text{arc tg}\,x-\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx.$$

$$\int\frac{x^3}{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x\,dx=\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\text{arc tg}\,x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\text{arc tg}\,x\,dx^2-\int\frac{x}{1+x^2}\,\text{arc tg}\,x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\text{arc tg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int\text{arc tg}\,x\,d\ln(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\text{arc tg}\,x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx.$$

$$\therefore\quad I=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(3+x^2)\operatorname{arc\,tg}x-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)$$

$$+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg}x\ln(1+x^2)+C.$$

704. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;　　(2) $\dfrac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

[解] (1) 参见第702(1)题的解,有

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

$$\therefore\quad\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

(2) 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$.

$$\therefore\quad\int\frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{(1+\sin^2 t)t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\int\frac{t}{\sin^2 t}dt=\frac{1}{2}t^2-\int t\,d\operatorname{ctg}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2-t\operatorname{ctg}t+\int\operatorname{ctg}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-t\operatorname{ctg}t+\ln|\sin t|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C.$$

705. 求下列函数的不定积分：

(1) $\dfrac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；　　(2) $\dfrac{x^4\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$.

［解］ (1) $$\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{1-x^2}$$
$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

(2) 令 $t=\operatorname{arc\,tg} x$，则 $dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，$x=\operatorname{tg} t$.
$$\therefore\quad I=\int\frac{x^4\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=\int t\operatorname{tg}^4 t\,dt.$$

又 $$\int\operatorname{tg}^4 t\,dt=\int\operatorname{tg}^2 t(\sec^2 t-1)dt=\int\operatorname{tg}^2 t\,d\operatorname{tg} t-\int(\sec^2 t-1)dt$$
$$=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t+C,$$
$$\therefore\quad I=\int t\,d\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t\right)=t\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t\right)$$
$$-\int\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t\right)dt.$$

而 $$\int\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg} t+t\right)dt=\frac{1}{3}\int\operatorname{tg} t(\sec^2 t-1)dt-\int\operatorname{tg} t\,dt+\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\int\operatorname{tg} t\,d\operatorname{tg} t-\frac{4}{3}\int\operatorname{tg} t\,dt+\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 t+\frac{4}{3}\ln|\cos t|+\frac{1}{2}t^2+C.$$
$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}^2 x+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

706. 求下列函数的不定积分：

(1) $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)$；　　(2) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$.

［解］ (1) $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx=\int \operatorname{tg} x \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} a}\,dx$

$$=\int t\frac{t+\operatorname{tg} a}{1-t\operatorname{tg} a}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\quad(令\ t=\operatorname{tg} x)$$

$$=\int\left[\frac{1}{1-t\operatorname{tg} a}-\frac{1}{1+t^2}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg} a}\ln|1-t\operatorname{tg} a|-\operatorname{arc\,tg} t+C$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg} a}\ln|1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} x|-x+C$$

(2) $\int\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,dx=\int\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\,de^x$

$$=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int e^x\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}\,dx$$

$$=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x}{1+\cos x}\,dx-\int\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$$

$$=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x}{1+\cos x}\,dx-\int e^x d\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x}{1+\cos x}\,dx-\frac{e^x}{1+\cos x}+\int\frac{e^x}{1+\cos x}\,dx$$

$$=e^x\frac{\sin x}{1+\cos x}+C.$$

707. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x$;　　　(2) $\dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

［解］ (1) 令 $t=\operatorname{arc\,tg} x$，则 $dt=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$，$x=\operatorname{tg} t$

$$\therefore\quad I=\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\int t(a\operatorname{tg}^2 t+b)\,dt$$

$$=\frac{b}{2}t^2+a\int t\operatorname{tg}^2 t\,dt.$$

而

$$\int t\operatorname{tg}^2 t\,dt=\int t(\sec^2 t-1)\,dt=\int t\,d(\operatorname{tg} t-t)$$

$$=t(\operatorname{tg} t-t)-\int(\operatorname{tg} t-t)\,dt$$

$$=t(\operatorname{tg} t-t)+\ln|\cos t|+\frac{t^2}{2}+C$$

$$\therefore \quad I=\frac{b-a}{2}\operatorname{arc\,tg}^2 x+a\left[x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]+C.$$

(2) 令 $t=\arccos x$, 则 $dt=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x=\cos t$.

$$\therefore \int\frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int t\cos^3 t\,dt$$

$$=-\int t(1-\sin^2 t)d\sin t=-\int td\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)+\int\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)dt$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)-\cos t+\frac{1}{3}\int(1-\cos^2 t)\,d\cos t$$

$$=-t\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)-\cos t+\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{9}\cos^3 t+C$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2+x^2}{3}\right)\arccos x-\frac{6x+x^3}{9}+C.$$

708. 求下列函数的不定积分.

(1) $\frac{\arcsin e^x}{e^x}$;　　　　(2) $\frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}$.

［解］ (1) $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=\int\frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}de^x=\int\frac{\arcsin t}{t^2}dt$ （令 $t=e^x$）

$$=-\int\arcsin t\,d\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{1}{t}\arcsin t-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right|+C$$ (参见第 596(3) 题)

$$=-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+C.$$

(2) 令 $t=e^{\frac{x}{2}}$,

$$I=\int\frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx=2\int\frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t^2(1+t^2)}dt=2\int\operatorname{arc\,tg} t\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-2\int\operatorname{arc\,tg} t\,d\left(\frac{1}{t}\right)-2\int\operatorname{arc\,tg} t\,d\operatorname{arc\,tg} t$$

$$=-\frac{2}{t}\operatorname{arc\,tg} t+2\int\frac{dt}{t(1+t^2)}-\operatorname{arc\,tg}^2 t,$$

而 $$\int\frac{dt}{t(1+t^2)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C.$$

$$\therefore\quad I=-\frac{2}{t}\operatorname{arctg}t+2\ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}-\operatorname{arctg}^2t+C$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}+x-\ln(1+e^x)-\operatorname{arctg}^2e^{\frac{x}{2}}+C.$$

709. 求 $I_m=\int x^\alpha\ln^m x\,dx$ 的递推公式 ($\alpha\neq-1$, m 是正整数).

［解］ $$I_m=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^m x-\frac{m}{\alpha+1}\int x^\alpha\ln^{m-1}x\,dx$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln^m x-\frac{m}{\alpha+1}I_{m-1}\qquad(m\geqslant1).$$

$$I_0=\int x^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C.$$

710. 求下列函数的不定积分:

(1) $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;　　(2) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

［解］ (1) 作代换 $t=\sqrt{1+\cos x}$, 则 $dt=\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}dx$,

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2x\sqrt{1+\cos x}}=-2\int\frac{dt}{(2-t^2)t^2}$$

$$=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2-2}\right)dt.$$

由恒等式 $2=At(t^2-2)+B(t^2-2)+(Ct+D)t^2$, 解得 $A=0$, $B=-1$, $C=0$, $D=1$,

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^2-2}$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

(2) $\because\ \sin 2x\,dx=-d\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right),\ \cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$,

$$\therefore\ \int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)^2}}d\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)$$

$$=-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})+C.$$

711. 求不定积分 $I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$ 的递推公式(n 是正整数，$n>2$)。

〔解〕 $I_n-I_{n-2}=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-2}\left(\frac{\sin^2\frac{x-a}{2}}{\sin^2\frac{x+a}{2}}-1\right)dx$

$$=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x-a}{2}-\sin^2\frac{x+a}{2}}{\sin^2\frac{x+a}{2}}dx.$$

令 $t=\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$；则 $dt=\frac{\sin a}{2\sin^2\frac{x+a}{2}}dx$,

$$\sin^2\frac{x-a}{2}-\sin^2\frac{x+a}{2}=\frac{1-\cos(x-a)}{2}-\frac{1-\cos(x+a)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(x+a)-\cos(x-a)]=-\sin a\sin x,$$

$$\therefore\ I_n-I_{n-2}=-2\int t^{n-2}\sin x\,dt=2\int t^{n-2}[\sin a-(\sin a+\sin x)]dt$$

$$=2\sin a\int t^{n-2}dt-2\int t^{n-2}(\sin a+\sin x)dt$$

$$=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}-2\int t^{n-2}\frac{(\sin a+\sin x)\sin a}{2\sin^2\frac{x+a}{2}}dx$$

$$=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}-2\int t^{n-2}dx$$

$$-2\int t^{n-2}\left[\frac{(\sin a+\sin x)\sin a}{2\sin^2\frac{x+a}{2}}-1\right]dx$$

$$=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}-2I_{n-2}+\sigma,$$

$$\sigma=-2\int t^{n-1}\frac{(\sin a+\sin x)\sin a-2\sin^2\frac{x+a}{2}}{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}dx$$

$$=-2\int t^{n-1}\frac{\sin^2 a+\sin x\sin a-1+\cos(x+a)}{\cos a-\cos x}dx$$

$$=-2\int t^{n-1}\frac{\cos a(\cos x-\cos a)}{\cos a-\cos x}dx$$

$$=2\cos a\int t^{n-1}dx=2\cos aI_{n-1}.$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1}-I_{n-2}+2\cos aI_{n-1}.$$

712. 求下列函数的不定积分：

(1) $x^x(1+\ln x)$; (2) $\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}$;

(3) $\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; (4) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

［解］ (1) $\because\ \frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\ln x)$，$\therefore$ 令 $x^x=t$，则

$$\int x^x(1+\ln x)dx=\int dt=t+C=x^x+C.$$

(2) 由分部积分法

$$I=\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

在后一个积分中，令 $t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，有

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dt}{1-2t^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,t}{1-\sqrt{2}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right|+C,$$

$$\therefore\quad I=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\,x}\right|+C.$$

(3) 令 $x=\operatorname{th}t$，则 $x^2-1=\operatorname{th}^2t-1=-\operatorname{sech}^2t$，$dx=\operatorname{sech}^2t\,dt$，

$$x-1=\operatorname{th}t-1=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}-1=-\frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}},$$

$$x+1=\operatorname{th}t+1=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}+1=\frac{2e^t}{e^t+e^{-t}},$$

$$\frac{x-1}{x+1}=e^{-2t},\qquad \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=-2t,$$

$$\therefore\quad \int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=2\int(a\operatorname{th}^2t+b)t\,dt$$

$$=bt^2+2a\int t\cdot\operatorname{th}^2t\,dt.$$

利用分部积分法计算后一个积分，有

$$\int t\cdot\operatorname{th}^2t\,dt=\int t(1-\operatorname{sech}^2t)\,dt=\int t\,d(t-\operatorname{th}t)$$

$$=t(t-\operatorname{th}t)-\int(t-\operatorname{th}t)\,dt$$

$$=\frac{t^2}{2}-t\cdot\operatorname{th}t+\ln|\operatorname{ch}t|+C.$$

$$\therefore\quad \int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$+a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|1-x^2|\right)+C.$$

(4) $$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx=-\int\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,d(\sqrt{1-x^2})$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\int\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}\right)dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\int\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{1+x}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\right)dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

713. 求下列函数的不定积分:

(1) $\operatorname{ch}^4 x$; (2) $\operatorname{sh} x\operatorname{sh} 2x\operatorname{sh} 3x$;

(3) $\sqrt{\operatorname{th} x}$; (4) $\operatorname{sh} ax\cos bx$.

[解] (1) $\int\operatorname{ch}^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int(1+\operatorname{ch}2x)^2dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\operatorname{ch}2x+\frac{1}{2}\operatorname{ch}4x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\operatorname{sh}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x\right)+C.$$

(2) $\int\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}2x\cdot\operatorname{sh}3x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{sh}2x(\operatorname{ch}4x-\operatorname{ch}2x)\,dx$

$$=\frac{1}{4}\int(\operatorname{sh}6x-\operatorname{sh}2x-\operatorname{sh}4x)\,dx=\frac{\operatorname{ch}6x}{24}-\frac{\operatorname{ch}4x}{16}-\frac{\operatorname{ch}2x}{8}+C.$$

(3) 令 $t=\sqrt{\operatorname{th}x}$, 则 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx=\frac{2t\,dt}{1-t^4}$,

$$\therefore\ \int\sqrt{\operatorname{th}x}\,dx=2\int\frac{t^2dt}{1-t^4}=\int\frac{dt}{1-t^2}-\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}-\operatorname{arctg}t+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}{1-\sqrt{\operatorname{th}x}}\right|-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th}x}+C.$$

(4) $\int\operatorname{sh}ax\cdot\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\int\operatorname{sh}ax\,d\sin bx$

$$=\frac{1}{b}\operatorname{sh}ax\cdot\sin bx-\frac{a}{b}\int\operatorname{ch}ax\cdot\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{b}\operatorname{sh}ax\cdot\sin bx+\frac{a}{b^2}\operatorname{ch}ax\cdot\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int\operatorname{sh}ax\cdot\cos bx\,dx$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx + b \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx) + C.$$

714. 设 $P(x)$ 是 n 次多项式，证明：

$$\int P(x) e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

［证］ $$\int P(x) e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int P(x)\,de^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\int P'(x) e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a^2}\int P'(x)\,de^{ax}$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a^2}\left(e^{ax} P'(x) - \int P''(x) e^{ax}\,dx\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a^2} e^{ax}P'(x) + \cdots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}\left(e^{ax} P^{(n)}(x) - \int P^{(n+1)}(x) e^{ax}\,dx\right).$$

但 $P^{(n+1)}(x) = 0$

$$\therefore \quad \int P(x) e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

715. 设 $P(x)$ 是 n 次多项式，证明

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + \frac{\cos ax}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + C,$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + \frac{\sin ax}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P^{(3)}(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + C$$

(注：由 $P^{(n+1)}(x) = 0$ 得括号中是有限项)。

[证一] 利用欧拉公式

$$\cos ax=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2},\quad \sin ax=\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$$

以及第 714 题，以 ia(或 $-ia$)代 a，其中 $i=\sqrt{-1}$，得

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{1}{2}\int P(x)e^{iax}dx+\frac{1}{2}\int P(x)e^{-iax}dx$$

$$=\frac{e^{iax}}{2}\left(\frac{P(x)}{ia}-\frac{P'(x)}{(ia)^2}+\frac{P''(x)}{(ia)^3}-\frac{P^{(3)}(x)}{(ia)^4}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{(ia)^{n+1}}\right)$$

$$+\frac{e^{-iax}}{2}\left(\frac{P(x)}{-ia}-\frac{P'(x)}{(-ia)^2}+\frac{P''(x)}{(-ia)^3}-\frac{P^{(3)}(x)}{(-ia)^4}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{(-ia)^{n+1}}\right)+C$$

$$=\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\left(\frac{P(x)}{a}-\frac{P''(x)}{a^3}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^5}-\cdots\right)$$

$$+\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\left(\frac{P'(x)}{a^2}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^4}+\cdots\right)+C$$

$$=\frac{\sin ax}{a}\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right)$$

$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left(P'(x)-\frac{P^{(3)}(x)}{a^2}+\cdots\right)+C$$

同样证明关于 $\int P(x)\sin ax\,dx$ 的等式.

[证二] 与第 714 题相仿，利用分部积分法.

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int P(x)\,d\sin ax=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)\,d\cos ax$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax\,dx$$

由于 $P^{(n+1)}(x)=0$，因此经过有限次分部积分，即得证明.

同样证明关于 $\int P(x)\sin ax\,dx$ 的等式.

716. 设 $P(x)$ 是一个多项式，$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，在什么条件下不定积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是一个初等函数

$\left(\text{注：已知}\int\frac{e^x}{x}dx\text{ 不是初等函数}\right)$.

［分析］ $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$，反复利用分部积分公式，可以求得 $\int\frac{a_k}{x^k}e^x dx=$初等函数$+A_k\int\frac{e^x}{x}dx$，可见 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数当且仅当 $\sum_{k=1}^{n}A_k=0$. 因此只要求出这些 A_k 便获得所要的结果.

［解］ $\because\ P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$,

$$\therefore\ \int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx=a_0\int e^x dx+a_1\int\frac{e^x}{x}dx+a_2\int\frac{e^x}{x^2}dx+\cdots+a_n\int\frac{e^x}{x^n}dx$$

考虑右端的一般项 $I_k(k>1)$：

$$I_k=\int\frac{e^x}{x^k}dx=-\frac{1}{k-1}\int e^x d\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx$$

$$=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\left(-\frac{1}{k-2}\right)\frac{e^x}{x^{k-2}}+\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k-2}\int\frac{e^x}{x^{k-2}}dx$$

$$=\cdots=\varphi_k(x)+\frac{1}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx,$$

其中 $\varphi_k(x)$ 是一个初等函数. 于是

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx=a_0e^x+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\cdots+\varphi_n(x)$$

$$+\left(a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}\right)\int\frac{e^x}{x}dx.$$

可见. 当 $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$ 时，$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是一个初等函数.

717. 令 $\mathrm{li}(x)=\int\frac{dx}{\ln x}$，求下列函数的不定积分：

(1) $\frac{e^{ax}}{x}$；　　(2) $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x$；

(3) $\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}$；　　(4) $\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}$.

［解］ (1) 令 $e^{ax}=t$，则 $x=\frac{1}{a}\ln t$，$dx=\frac{dt}{at}$，

$$\therefore \quad \int\frac{e^{ax}}{x}\,dx=\int\frac{at}{\ln t}\cdot\frac{dt}{at}=\mathrm{li}(t)+C=\mathrm{li}(e^{ax})+C.$$

(2) 由(1)得

$$\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x\,dx$$

$$=e^x-4\,\mathrm{li}(e^x)-4\int e^x\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^x-4\,\mathrm{li}(e^x)-\frac{4e^x}{x}+4\,\mathrm{li}(e^x)=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

(3) $$\int\frac{e^{2x}\,dx}{x^2-3x+2}=\int e^{2x}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=e^4\int\frac{e^{2(x-2)}}{x-2}\,dx-e^2\int\frac{e^{2(x-1)}}{x-1}\,dx$$

$$=e^4\,\mathrm{li}(e^{2(x-2)})-e^2\,\mathrm{li}(e^{2(x-1)})+C.$$

(4) $$\int\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx=\int(x^2+4x+12)e^{2x}\,dx+\int\frac{32x-48}{(x-2)^2}e^{2x}\,dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{21}{4}\right)e^{2x}-\int(32x-48)e^{2x}d\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$=\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)\frac{e^{2x}}{2}+64e^4\,\mathrm{li}(e^{2x-4})+C.$$

第五章　定积分及其应用

1. 定积分的概念

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，对 $[a, b]$ 的任一划分 P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 记 $\|P\|=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在每一个 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 如果

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I,$$

I 是某一实数，并且这一极限与划分 P 无关，也与 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的选取无关，称 I 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

这时又称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积（黎曼可积）.

其等价定义是：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界，对 $[a, b]$ 的任一划分 P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 令

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]}\{f(x)\},\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]}\{f(x)\},$$

作 $$U(f, P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\quad L(f, P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i.$$

记 $$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_P\{U(f, P)\},\quad \underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_P\{L(f, P)\},$$

分别称它们是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的上积分和下积分. 如果

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

记它为 $\int_a^b f(x)dx$, 称它是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的定积分，又称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积(黎曼可积).

可积的充要条件　有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $[a, b]$ 的一个划分 P, 使 $U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$.

2. 定积分的基本性质

(1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积, α, β 是两个常数，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积,并且有

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in[a, b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 也在 $[a, b]$ 可积，并且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx.$$

(4) 中值定理　设 f, g 都在 $[a, b]$ 可积, g 在 $[a, b]$ 内符号不变,则存在数 μ: $\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx.$$

特别的,又若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,则存在 $\xi\in[a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

再若 $g(x)=1$ $(x\in[a, b])$，则存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值.

3. 定积分的计算

(1) 牛顿-莱布尼茨公式　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，$x\in[a, b]$，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$$

又设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

(2) 换元法　设 (i) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，(ii) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 有连续导数，并且当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时 $\varphi(t)\in[a,b]$，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(3) 分部积分法　设 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a, b]$ 有连续的导数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

4. 广义积分

(1) 收敛和发散的概念.

无穷限广义积分　设对任何 $b>a$，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (若极限存在).$$

并称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 若上述极限不存在，称

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

另一无穷限积分设对任何 a 和 b, $a<b$, 函数 f 在 $[a, b]$ 可积. 定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx \quad (\text{若极限存在}).$$

并称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 若上述极限不存在, 称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

无界函数的广义积分设 b 是函数 f 的奇点, 对任何 $\varepsilon>0$, $f(x)$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ $(a<b-\varepsilon)$ 可积. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (\text{若此极限存在}).$$

并称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 若上述极限不存在, 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

另一无界函数的广义积分　设 c 是函数 $f(x)$ 的奇点, 对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$ $f(x)$ 在 $[a, c-\varepsilon]$, $[c+\eta, b]$ 可积. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to+0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx \quad (\text{若极限存在}).$$

并称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 若上述极限不存在, 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

不论是无穷限广义积分还是无界函数的广义积分, 如果 $\int_a^b |f(x)|dx$ (这里 a, b 可能是 $-\infty$ 和 $+\infty$) 收敛, 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 这时 $\int_a^b f(x)dx$ 必定收敛, 但反之不然.

(2) 判别法.

比较判别法 设对任何 $b>a$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积, 又设当 x 充分大时 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 则由 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛可得 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散可得 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散. 特别地, 若 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to+\infty)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

柯西判别法 设对任何 $b>a$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 并且对充分大的 x, $f(x)\geqslant 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}f(x)=l$, 则当 $\alpha>1$, $0\leqslant l<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 当 $\alpha\leqslant 1$, $0<l\leqslant+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

阿贝尔判别法 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调且有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

狄里克雷判别法 设对一切 $A\geqslant a$, $\int_a^{A} f(x)dx$ 有界, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

无界函数的广义积分的情形 有完全类似的判别法. 但柯西判别法是: 设 b 是函数 $f(x)$ 的奇点, 对任意 $\varepsilon>0$, $f(x)$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ 非负并且可积, 又若 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} (x-b)^{\alpha}f(x)=l$, 则当 $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant l<+\infty$ 时, $\int_a^{b} f(x)dx$ 收敛; 当 $\alpha\geqslant 1$, $0<l\leqslant+\infty$ 时, $\int_a^{b} f(x)dx$ 发散.

(3) 广义函数的主值.

也称柯西主值, 记为 P.V., 其定义为

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx \quad \text{(若极限存在)}.$$

设 $a<b<c$, b 是函数 $f(x)$ 唯一的奇点.

$$\text{P.V.}\int_a^c f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx+\int_{b+\varepsilon}^c f(x)dx\right]$$

(若极限存在).

5. 定积分在几何上的应用

(1) 平面图形的面积　由连续的曲线 $y=f(x)$, x 轴, $x=a$, $x=b(a<b)$ 所围平面图形的面积

$$A=\int_a^b |y|\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

当连续的曲线由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 表示时，在上述公式中作代换 $x=x(t)$, 这时 $y=y(t)$, 便得相应的面积公式.

当连续的曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示时，由求该曲线以及 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围平面图形的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta.$$

(2) 平面曲线的弧长　光滑曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 的弧长

$$L=\int_\alpha^\beta ds=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

当光滑曲线的方程由 $y=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 表示时，

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

当光滑曲线的方程由极坐标方程 $r=r(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 表示时，

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

(3) 已知截面积求体积　设物体介于 $x=a$, $x=b\ (a<b)$ 之间，对任何 $x\in[a, b]$, 已知物体在 x 处的截面积 $A(x)$, 则物体的体积

$$V=\int_a^b A(x)\,dx.$$

(4) 旋转体的体积　连续的曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴

旋转一周后生成的旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

当连续的曲线由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 表示时，在上述公式中作代换 $x=x(t)$，这时 $y=y(t)$，便得相应的体积公式.

(5) 旋转曲面的面积 光滑曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 绕 x 轴旋转一周后生成的旋转曲面的面积

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta|y|ds=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

当光滑曲线由 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 表示时，

$$F=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

当光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 表示时，

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta|r(\theta)\sin\theta|\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

:. 定积分在物理上的应用

(1) 位移 质点以速度 $v(t)$ 沿直线运动，从时间 t_0 到 t_1 的位移

$$s=\int_{t_0}^{t_1}v(t)dt.$$

(2) 质量 密度是 $\rho(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的直棒的质量

$$m=\int_a^b\rho(x)dx.$$

(3) 功 在力 $f(x)$ 的作用下质点沿直线由 $x=a$ 位移至 $x=b$，力所作的功

$$W=\int_a^b f(x)dx.$$

(4) 曲线的静力矩、惯性矩和重心 设光滑曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 的密度是 $\rho(t)$，则曲线关于 x 轴和 y 轴的静力

矩 M_x, M_y, 惯性矩 I_x, I_y 和重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 分别是:

$$M_x=\int_\alpha^\beta y\rho\,ds=\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta x\rho\,ds=\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt;$$

$$I_x=\int_\alpha^\beta y^2\rho\,ds=\int_\alpha^\beta y^2(t)\,\rho(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

$$I_y=\int_\alpha^\beta x^2\rho\,ds=\int_\alpha^\beta x^2(t)\rho(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt;$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m},$$

$$m=\int_\alpha^\beta \rho\,ds=\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$ （即曲线的质量）.

特别当曲线具有均匀的密度时，其重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为

$$\bar{x}=\frac{1}{L}\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{L}\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$ （即曲线的弧长）.

(5) 密度均匀的平面图形的静力矩、惯性矩和重心 设平面图形由 $y=f(x)$, x 轴以及 $x=a$, $x=b(a<b)$ 所围，其中 $f(x)\geqslant 0$ 且连续 $(x\in[a, b])$. 又设其密度为 1, 则该图形关于 x 轴和 y 轴的静力矩 M_x, M_y, 惯性矩 I_x, I_y 和重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 分别是:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

$$M_y=\int_a^b xy\,dx=\int_a^b xf(x)\,dx;$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx=\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx,$$

$$I_y=\int_a^b xy^2\,dx=\int_a^b xf^2(x)\,dx;$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{A},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{A},\quad A \text{ 是图形的面积.}$$

7. 定积分的近似计算

矩形公式　将区间 $[a, b]$ 作 n 等分，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $y_i=f(x_i)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}),$$

或

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n).$$

梯形公式　将区间 $[a, b]$ 作 n 等分，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $y_i=f(x_i)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

辛浦生公式　将区间 $[a, b]$ 作 $2n$ 等分，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b$，记 $y_i=f(x_i)$，$i=0, 1, 2, \cdots, 2n$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})].$$

8. β-函数和 Γ-函数

β-函数　$\beta(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ (p>0,\ q>0).$

Γ-函数　$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx\ (s>0).$

§1. 定积分的定义和性质

718. 从定积分的定义出发求 $\int_0^1 a^x\,dx\ (a>0)$.

［解］ $\because a^x$ 在 $[0,1]$ 连续，$\therefore a^x$ 在 $[0,1]$ 可积. 将 $[0,1]$ 作 n 等分，在每个子区间 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 内取左端点的函数值作和:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}a^{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a,$$

所以

$$\int_0^1 a^x dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{a-1}{\ln a}.$$

719. 从定积分的定义出发求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$.

［解］ $\because \cos x$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 连续，$\therefore \cos x$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 可积. 将 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 作 n 等分，在每一个子区间 $\left[\frac{(i-1)\pi}{2n},\ \frac{i\pi}{2n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 内取右端点函数值作和:

$$\sigma_n=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i}{2n}\pi,$$

利用积化和差的公式，有

$$\sin\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i}{2n}\pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{1}{2}+i\right)\frac{\pi}{2n}+\sin\left(\frac{1}{2}-i\right)\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\right],$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i}{2n}\pi=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}\right].$$

再利用 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right)\left[\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{2}+n\right)-\sin\frac{\pi}{4n}\right]=1.$$

720. 从定积分的定义出发求 $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$.

[解] $\because \frac{1}{x^2}$ 在 $[a, b]$ 连续, $\therefore \frac{1}{x^2}$ 在 $[a, b]$ 可积. 将 $[a, b]$ 作任一划分, 其分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$, $\lambda=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}\{\Delta x_i\}$. 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取 $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}\cdot x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 作和

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}\cdot x_i}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

$$\therefore \int_a^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}x_i}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

721. 从定积分的定义出发求 $\int_a^b x^m dx$ $(m\neq -1, 0<a<b)$.

[解] $\because x^m$ 在 $[a, b]$ 连续, $\therefore x^m$ 在 $[a, b]$ 可积. 将 $[a, b]$ 用分点 $a, ah, ah^2, \cdots, ah^n=b(h>1)$ 划分, 这时 $h=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $\Delta x_i=ah^i-ah^{i-1}=ah^{i-1}\cdot(h-1)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 在每个子区间 $[ah^{i-1}, ah^i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 上取左端点的函数值作和:

$$\begin{aligned}\sigma_n&=a^m\cdot a(h-1)+(ah)^m ah(h-1)+\cdots+(ah^{n-1})^m\cdot ah^{n-1}(h-1)\\&=a^{m+1}(h-1)(1+h^{m+1}+\cdots+h^{(m+1)(n-1)})\\&=a^{m+1}(h-1)\frac{h^{n(m+1)}-1}{h^{m+1}-1}=a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{m+1}-1}\end{aligned}$$

利用 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{m}-1}=\frac{1}{m}$ 得

$$\int_a^b x^m dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_m=\frac{1}{m+1}a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}).$$

722. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 其不连续点是 x_n, $n=1, 2, 3, \cdots$, 并且 $x_n\to x_0$. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

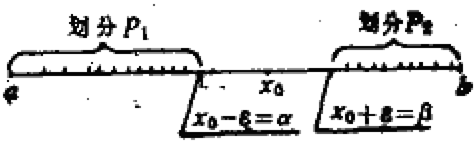
[分析] 在 $[a, b]$ 中除去一个含有 x_0 的小区间 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $(\varepsilon>0$ 是充分小的), 剩下来的将是两个闭区间(若 $x_0\neq a$, $x_0\neq b$) 或者是一个闭

区间(若 $x_0=a$ 或 $x_0=b$)，而 $f(x)$ 在这些闭区间上只有有限个不连续点从而 $f(x)$ 可积，再利用可积的充要条件加以证明。

[证] 对任意 $\varepsilon>0$，因 $x_n\to x_0$，所以在 $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ 外 $f(x)$ 只有有限个不连续点. 设 $x_0\neq a$，$x_0\neq b$，那么对充分小的 $\varepsilon>0$ 有 $a<x_0-\varepsilon<x_0+\varepsilon<b$，这时由于 $f(x)$ 在 $[a,\ x_0-\varepsilon]$ 和 $[x_0+\varepsilon,\ b]$ 上只有有限个不连续点，于是 $f(x)$ 在这两个闭区间上都可积. 根据可积的充要条件，存在 $[a,\ x_0-\varepsilon]$ 的一个划分 P_1 和 $[x_0+\varepsilon,\ b]$ 的一个划分 P_2，使

$$U(f,\ P_1)-L(f,\ P_1)<\varepsilon,\ U(f,\ P_2)-L(f,\ P_2)<\varepsilon.$$

将 P_1 的分点和 P_2 的分点合并便成为 $[a,\ b]$ 的一个划分 P. 记 $\alpha=x_0-\varepsilon$，$\beta=x_0+\varepsilon$，$M_{\alpha\beta}=\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}\{f(x)\}$，



$$m_{\alpha\beta}=\inf_{x\in[\alpha,\beta]}\{f(x)\},$$

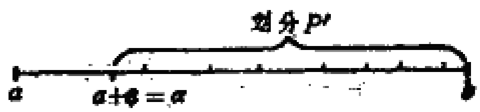
有

$$\begin{aligned}U(f,\ P)-L(f,\ P)&=[U(f,\ P_1)+M_{\alpha\beta}(\beta-\alpha)+U(f,\ P_2)]\\&\quad-[L(f,\ P_1)+m_{\alpha\beta}(\beta-\alpha)+L(f,\ P_2)]\\&<2\varepsilon+(M_{\alpha\beta}-m_{\alpha\beta})\cdot 2\varepsilon.\end{aligned}$$

$$\because\quad M_{\alpha\beta}\leqslant M=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\ m_{\alpha\beta}\geqslant m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

$$\therefore\quad U(f,\ P)-L(f,\ P)<2(1+M-m)\varepsilon.$$

由可积的充要条件得 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 可积.



若 $x_0=a$，那么 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,\ b]$ 上只有有限个不连续点，故 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,\ b]$ 可积，由此可得存在 $[a+\varepsilon,\ b]$ 的一个划分 P'，使

$$U(f,\ P')-L(f,\ P')<\varepsilon.$$

将 P' 的分点加上点 a，组成 $[a,\ b]$ 的一个划分 P.

记 $\alpha=a+\varepsilon$，$m_{a\alpha}=\inf\limits_{x\in[a,\alpha]}\{f(x)\}$，$M_{a\alpha}=\sup\limits_{x\in[a,\alpha]}\{f(x)\}$，则有

$$\begin{aligned}U(f,\ P)-L(f,\ P)&=U(f,\ P')-L(f,\ P')+(M_{a\alpha}-m_{a\alpha})(\alpha-a)\\&<\varepsilon+(M-m)\varepsilon=(1+M-m)\varepsilon.\end{aligned}$$

若 $x_0=b$，证明方法与 $x_0=a$ 时相仿.

723. 证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & 当x是有理数,\\ 0, & 当x是无理数.\end{cases}$ 在[0, 1] 不可积.

[证] 对 [0, 1] 的任一划分 P: $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $\|P\|=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$. 在每一个 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取有理数 ξ_i, 则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

当 $\|P\|\to 0$ 时, 上述和式趋于 1. 但若在每一个 $[x_{i-1}, x_i]$ 上取无理数 ξ_i', 则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0,$$

当 $\|P\|\to 0$ 时, 上述和式趋于 0. 由此可见狄利克雷函数 D 在 [0, 1] 不可积.

[说明] 狄利克雷函数是在黎曼积分的意义下不可积. 若将积分的概念拓广为其他积分例如勒贝格积分, 则狄利克雷函数在勒贝格的意义下是可积的.

724. 证明下列不连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 [0, 1] 可积:

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right),\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-\left[\dfrac{1}{x^2}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

[证] $f(x)$ 在 [0, 1] 有界, 它的不连续点是 $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 并且 $\frac{1}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$, 由 722 题的结论得 $f(x)$ 在 [0, 1] 可积. 同样, $g(x)$ 在 [0, 1] 有界, 它的不连续点是 $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ $(n\to+\infty)$, 所以 $g(x)$ 也在 [0, 1] 可积.

725. 证明黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当 x=\dfrac{p}{q}\ (p,\ q 都是正整数并且无公因子)\\ 0, & 当 x 是无理数或 0\end{cases}$$

在 [0, 1] 可积.

［证］　由第211题证明过程知道黎曼函数 $R(x)$ 有一个重要性质是：对任意 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<1)$，集合 $\{x\in[0,1]\mid R(x)\geqslant\varepsilon\}$ 是一有限集，设其元素是 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_k$，其中 $\bar{x}_k=1$．即当 $x\in[0,1]$，$x\neq\bar{x}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 时 $R(x)<\varepsilon$，而 $R(\bar{x}_i)\geqslant\varepsilon$．现在作 $[a,b]$ 的一个划分 P：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$，将 $[a,b]$ 划分为 n 个子区间 $[x_0,x_1],\cdots,[x_{n-1},x_n]$．对划分 P 的要求是：(1) 除 $\bar{x}_k=1$ 外，其余的 $\bar{x}_i\ (i=1,2,\cdots,k-1)$ 都不是分点；(2) 含有 $\bar{x}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的子区间的长度小于 $\dfrac{\varepsilon}{k}$，这种子区间至多 k 个．故所有子区间被分为两类：第一类是含有某 $\bar{x}_i$ 的子区间，记它们是第一类的，其余的是第二类的，于是

$$U(R,P)-L(R,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{\text{第一类}}(M_i^{(1)}-m_i^{(1)})\Delta x_{i_1}+\sum_{\text{第二类}}(M_i^{(2)}-m_i^{(2)})\Delta x_{i_2}$$

在第一类子区间中，$M_i^{(1)}-m_i^{(1)}\leqslant1$，$\Delta x_{i_1}<\dfrac{\varepsilon}{k}$，并且 $\sum\limits_{\text{第一类}}$ 至多是 k 项之和，所以 $\sum\limits_{\text{第一类}}(M_i^{(1)}-m_i^{(1)})\Delta x_{i_1}<k\cdot\dfrac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$．

在第二类子区间中，$M_i^{(2)}-m_i^{(2)}<\varepsilon$，所以 $\sum\limits_{\text{第二类}}(M_i^{(2)}-m_i^{(2)})\Delta x_{i_2}<\varepsilon\sum\limits_{\text{第二类}}\Delta x_{i_2}<\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$．

这样便得到 $U(R,P)-L(R,P)<\varepsilon$，由可积的充要条件得 R 在 $[0,1]$ 可积．

726．证明：(1) $\dfrac{\pi}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}}dx<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$；

(2) $1<\displaystyle\int_0^1(1+x)^x dx<\frac{3}{2}$；

(3) $\dfrac{1}{3}<\displaystyle\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$．

［证］　(1) ∵ 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1<\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}}<\sqrt{2}$，由定积分性

质得

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(2) ∵ 当 $0<x<1$ 时，$1<(1+x)^x<1+x$，由定积分性质得

$$1=\int_0^1 dx<\int_0^1(1+x)^x dx<\int_0^1(1+x)\,dx=\frac{3}{2}.$$

(3) ∵ 当 $0<x<1$ 时，

$$1<(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\leqslant 2,$$

$$\therefore\quad x^2\leqslant x^{(\sin x+\cos x)^2}<x,$$

等号仅当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时成立．故有

$$\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2\,dx<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

727． 证明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}\,dx<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

［证］ $\int_1^n\frac{dx}{x}=\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dx}{x}$，在每一个区间$[i-1,\ i]$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 内有 $\frac{1}{i}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{i-1}$，等号仅当 $x=i-1$ 或 i 时成立，

$$\therefore\quad \frac{1}{i}<\int_{i-1}^{i}\frac{dx}{x}<\frac{1}{i-1}.$$

$$\therefore\quad \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\sum_{i=2}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{dx}{x}=\int_1^n\frac{dx}{x}<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

728． 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,\ b]$ 可积，举例说明

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\neq\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

［解］ 例如 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$，则（参见第721题）

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b x^3\,dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2),\quad \int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx\neq\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx.$$

729. 设 $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数，且

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

求系数 c_1, c_2, …, c_n, 使 $\int_a^b [f(x)-(c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x))]^2dx$ 为最小.

［解］ $\int_a^b\left[f(x)-\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right]^2dx$

$$=\int_a^b f^2(x)+\sum_{i=1}^n c_i^2\int_a^b\varphi_i^2(x)dx-2\sum_{i=1}^n c_i\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

$$+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^n c_ic_j\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx+\sum_{i=1}^n c_i^2-2\sum_{i=1}^n c_i\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx+\sum_{i=1}^n\left(c_i-\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx\right)^2$$

$$-\sum_{i=1}^n\left[\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx\right]^2$$

由此可见，当

$$c_i=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

时，$\int_a^b\left[f(x)-\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right]^2dx$ 最小.

730. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，证明 $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$ 的充要条件是对每一个 $x\in[a, b]$ 有 $f(x)=0$.

［证］ 充分性是明显的，当 $f(x)=0$ 时有 $f^2(x)=0$, 故 $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$.

必要性：采用反证法．设存在某个 $x_0\in[a, b]$ 使 $f(x_0)\neq0$, 那么 $f^2(x_0)>0$. 分两种情形：(i) 若 $x_0\in(a, b)$, 由 $f^2(x)$ 在点 x_0 的连续性，必存在 $\delta>0$, 使 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\in[a, b]$, 并且当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时 $f^2(x)\geq\frac{f^2(x_0)}{2}$, 于是

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f^2(x_0)}{2}\,dx = f^2(x_0)\delta > 0,$$

与已知条件 $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$ 矛盾。(ii) 若 $x_0=a$ 或 b，不妨设 $a=x_0$。由 $f^2(x)$ 在点 a 的右连续性，必存在 $\delta>0$，使 $[a, a+\delta]\subset[a, b]$，并且当 $x\in[a, a+\delta]$ 时 $f^2(x)\geqslant f^2(a)\cdot\frac{1}{2}>0$，于是

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \int_a^{a+\delta} f^2(a)\cdot\frac{1}{2}\,dx = f^2(a)\frac{\delta}{2}>0,$$

同样与已知条件矛盾。这样便证明了对每一个 $x\in[a, b]$ 有 $f(x)=0$。

731. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，$f(x)\geqslant 0\,(x\in[a, b])$ 且 $f(x)\not\equiv 0$，证明

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

［证］ 由定积分的基本性质知道

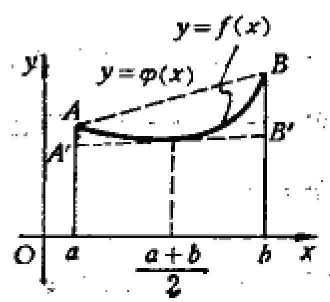
$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0 \quad (\because \quad f(x)\geqslant 0).$$

如果 $\int_a^b f(x)\,dx=0$，那么由第 730 题得 $f(x)\equiv 0$，这与已知条件矛盾。故

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

732. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，$f(x)\geqslant 0$，$f''(x)\geqslant 0\,(x\in[a, b])$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



［证］ 先证右端的不等式，令

$$\varphi(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

即 $y=\varphi(x)$ 是连结点 $A(a, f(a))$ 和点 $B(b, f(b))$ 的直线。因为 $f''(x)\geqslant 0$ 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是下凸（亦即凹）的，

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f(a)\int_a^b dx$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{1}{2}(b-a)^2 + f(a)(b-a)$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

亦即

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

再证明左端的不等式。将 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 展开：

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ξ 在 x 和 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.$$

$$\because \quad \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0,\quad \int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\geqslant 0,$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$

即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

［说明］ 求证的不等式又可以写为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

从几何图形上看这是很明显的，即在给定的条件下，由曲线 $y=f(x)$，x 轴和 $x=a$，$x=b$ 所围曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)\,dx$ 总是介于梯形 $abB'A'$ 的面积 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$ 和梯形 $abBA$ 的面积 $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ 之间，其中直线 $A'B'$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{a+b}{2},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ 的切线。

733. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续，证明许瓦兹不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

［证］ 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为 0，则上述不等式显然成立.

若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为 0，则由第 731 题知 $\int_a^b g^2(x)dx>0$，对任何实数 λ，有 $[f(x)-\lambda g(x)]^2 \geqslant 0 (x\in[a, b])$，

$$\therefore \quad 0 \leqslant \int_a^b [f(x)-\lambda g(x)]^2 dx$$

$$=\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx$$

令 $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g^2(x)dx}$，代入上式即得

$$\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \geqslant 0$$

［说明］ 如果将 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 看作函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积，那么 $\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的模长，因此不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$ 是解析几何中两向量内积的平方不超过模长平方之积的拓广.

734. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续并且 $f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f(x)dx=1$，证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right)^2 < 1.$$

［证］ 利用许瓦兹不等式（参见第 731 题）有

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(x)}\cos kx\,dx\right)^2$$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,dx = \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,dx,$$

同样有：

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\sin^2 kx\,dx$$

$$\therefore\quad \left(\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right)^2$$

$$\leqslant\int_a^b f(x)\,(\sin^2 kx+\cos^2 kx)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=1.$$

735. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，证明：

(1) $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$;

(2) 若 $f(x)>0(x\in[a, b])$，则 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2$

［证］ (1) 利用第 733 题的结果，有

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2=\left(\int_a^b 1\cdot f(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b 1^2 dx\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(2) 利用第 733 题的结果有

$$(b-a)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}.$$

736. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的导数，$f(a)=0$．记 M 是 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，证明

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

［证］ 由于 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 连续，故存在 $\xi\in[a, b]$ 使 $|f(\xi)|=M$．如果 $\xi=a$，由 $f(a)=0$ 知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 恒为 0，这时结论显然成立．如果 $\xi\neq a$，在第 733 题中令 $f(x)=1$，$g(x)=f'(x)$，则有

$$\left(\int_a^\xi f'(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^\xi dx\cdot\int_a^\xi f'^2(x)\,dx,$$

即

$$[f(\xi)-f(a)]^2\leqslant(\xi-a)\int_a^\xi f'^2(x)\,dx,$$

而 $f(a)=0$，$|f(\xi)|=M$，故

$$M^2\leqslant(\xi-a)\int_a^\xi f'^2(x)\,dx\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx.$$

737. 设函数$f(x)$连续，求：

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$； (2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$；

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$； (4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x+1} xf(t)dt$.

〔解〕 (1) $$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{x+1} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$
$$=\frac{d}{dx}(x+1)\cdot\frac{d}{d(x+1)}\int_a^{x+1} f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$
$$=f(x+1)-f(x).$$

(2) $$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{2x} f(t)dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$$
$$=\frac{d}{dx}(2x)\frac{d}{d(2x)}\int_a^{2x} f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=2f(2x)-f(x).$$

(3) $$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{x^2} f(t)dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$$
$$=\frac{d}{dx}(x^2)\frac{d}{d(x^2)}\int_a^{x^2} f(t)dt-\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=2xf(x^2)-f(x).$$

(4) $$\frac{d}{dx}\int_0^{x+1} xf(t)\,dt=\frac{d}{dx}\left(x\int_0^{x+1} f(t)\,dt\right)$$
$$=\int_0^{+1} f(t)dt+x\frac{d}{dx}\int_0^{x+1} f(t)dt$$
$$=\int_0^{x+1} f(t)dt+xf(x+1).$$

738. 设函数$f(x)$有连续的导数．求$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)dt$.并由此求$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$.

〔解〕 $$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f'(t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)df(t)$$
$$=\frac{d}{dx}\left[(x-t)f(t)\Big|_0^x+\int_0^x f(t)dt\right]$$
$$=\frac{d}{dx}\left[-xf(0)+\int_0^x f(t)\,dt\right]=f(x)-f(0)$$

应用这一结果即得

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\cos t\,dt=\sin x.$$

739. 证明：当 $x\to+\infty$ 时 $\int_0^x e^{t^2}dt\sim\frac{e^{x^2}}{2x}$.

［分析］　即要证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=1.$

［证］　应用洛必达法则，并注意到 $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt=e^{x^2}$,

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=1.$$

740. 求极限 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

［解］　这是 $\frac{0}{0}$ 待定型，应用洛必达法则，注意到

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt=\frac{d}{dx}(\sin x)\frac{d}{d\sin x}\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt=\cos x\sqrt{\operatorname{tg}\sin x},$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt=\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}x)\frac{d}{d\operatorname{tg}x}\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt=\sec^2x\sqrt{\sin\operatorname{tg}x}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x\sqrt{\operatorname{tg}\sin x}}{\sec^2x\sqrt{\sin\operatorname{tg}x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\sin x}}{\sqrt{\sin\operatorname{tg}x}}=1.$$

741. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，并且是单调增加的，令

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt,$$

讨论 F 在 $(a,\ b)$ 内的单调性.

［解］ $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2}\quad (a<x<b)$,

由积分学中值定理,存在 ξ, $a<\xi<x$, 使

$$\int_a^x f(t)\,dt=f(\xi)(x-a),$$

$$\therefore\quad F'(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}>0\quad (\because f(x)\text{ 是单调增加的}),$$

故 F 在 (a, b) 内是单调增加的.

742. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 并且 $f(x)>0$, 讨论函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

［解］ $F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)\,dt-f(x)\int_0^x tf(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}\left(x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}\cdot\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

由条件,右端两个因子都是正的,所以 F 是 $(0, +\infty)$ 内的单调增加函数.

743. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 证明存在一列阶梯函数 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 使

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

［证］ 将 $[a, b]$ 作 n 等分, 分点是 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 令 $\varphi_n(x)=f(x_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $\varphi_n(x)$ 就是 $[a, b]$ 上的一列阶梯函数. 这时

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_n(x)dx=\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i \quad (其中\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}),$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，所以当 $n\to\infty$ 时，右端极限存在，其值为 $\int_a^b f(x)dx$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

［说明］ 本题表明可以用一列阶梯函数在积分的意义下逼近可积函数.

744. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，证明对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 上的连续函数 $\varphi_\varepsilon(x)$，使

$$\int_a^b |f(x)-\varphi_\varepsilon(x)|dx<\varepsilon.$$

［证］ 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 的一个划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使

$$U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon,$$

其中 $$U(f, P)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\ L(f, P)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i,$$

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},\ m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}.$$

令 $\varphi_\varepsilon(x)=\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})+f(x_{i-1})$，$i=1, 2, \cdots, n$，即 $y=\varphi_\varepsilon(x)$ 是一条连续的折线，在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上它是连结点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和点 $(x_i, f(x_i))$ 的直线. 有

$$m_i\leqslant\varphi_\varepsilon(x)\leqslant M_i,\ x\in[x_{i-1}, x_i],$$

故 $$|f(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\leqslant M_i-m_i,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_a^b|f(x)-\varphi_\varepsilon(x)|dx&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-\varphi_\varepsilon(x)|dx\\&\leqslant\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i\\&=U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon.\end{aligned}$$

［说明］ 本题表明可以用连续函数在积分的意义下逼近可积函数.

745. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, B]$ 可积，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0 \quad (a<b<B,\ h>0)$$

(称这一性质是积分的连续性).

[证] 设 $g(x)$ 是 $[a, B]$ 上的连续函数，首先证明对 $g(x)$，上述等式成立。因为 $g(x)$ 在 $[a, B]$ 连续，所以必一致连续，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ $(\delta<B-b)$，对一切 $x\in[a, b]$ 有 $|g(x+h)-g(x)|<\varepsilon\ (0<h<\delta)$，

$$\therefore\quad \int_a^b |g(x+h)-g(x)|dx<\int_a^b \varepsilon\,dx=\varepsilon(b-a).$$

再证当 $f(x)$ 在 $[a, B]$ 可积时，上式也成立。由第744题知对任意 $\varepsilon>0$，存在连续函数 $g(x)$，使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon,$$

$$\int_a^b |f(x+h)-g(x+h)|dx<\varepsilon \quad (0<h<B-b),$$

$$\therefore\quad \int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\int_a^b |f(x+h)-g(x+h)|dx$$

$$+\int_a^b |g(x+h)-g(x)|dx+\int_a^b |g(x)-f(x)|dx$$

$$<2\varepsilon+\int_a^b |g(x+h)-g(x)|dx.$$

$g(x)$ 是连续函数，故存在 $\delta>0$，当 $0<h<\delta$ 时

$$\int_a^b |g(x+h)-g(x)|dx<\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx<3\varepsilon.$$

§2. 定积分的计算

746. 求：(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{a^2-b^2x^2}\quad (|a|>|b|>0)$；

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^3+x+1}\,dx$.

［解］ (1) $\int_0^1 \frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-x^2}=\frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx}\Big|_0^1$

$$=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|.$$

(2) $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

747. 求：(1) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$；

(2) $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx\quad(a>0)$.

［解］ (1) 令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

$$dx=a\cos t\,dt,$$

$$\therefore\quad \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{\pi a^4}{16}.$$

(2) $\because \sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$，　令 $x=a+a\cos t$，则 $\sqrt{2ax-x^2}=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant\pi)$，$dx=-a\sin t\,dt$.

$$\therefore\quad \int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx=a^3\int_\pi^0(1+\cos t)^2\sin t(-a\sin t)\,dt$$

$$=a^4\int_0^\pi(1+\cos t)^2\sin^2 t\,dt$$

$$=a^4\int_0^\pi(\sin^2 t+2\sin^2 t\cos t+\cos^2 t\sin^2 t)\,dt$$

$$=a^4\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+2\sin^2 t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{8}\right)dt$$

$$=a^4\left(\frac{5}{8}t-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{2}{3}\sin^3 t-\frac{\sin 4t}{32}\right)\Big|_0^\pi=\frac{5}{8}\pi a^4.$$

748. 求：(1) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$；　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

〔解〕 (1) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_0^1 dx$

$$=(2\operatorname{arc\,tg} x-x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

(2) 令 $x=\sin t$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t\left(\frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$dx=\cos t\,dt$，

$$\therefore\quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt$$

$$=\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\cos t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\because\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}\right).$$

749. 求：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(\sin x)^{\frac{4}{3}}}\,dx$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

〔解〕 (1) 令 $\sin x=t$，则 $\cos x\,dx=dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(\sin x)^{\frac{4}{3}}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x\,dx}{(\sin x)^{\frac{4}{3}}}=2\int_0^1 \frac{t}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt$$

$$=2\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}\,dt=3t^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1=3.$$

(2) 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,(0\leqslant t\leqslant 1)$，$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$，

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 \frac{2(1+t)}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

再令 $t=\operatorname{tg}\theta$，则 $(1+t^2)^{\frac{3}{2}}=\sec^3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，$dt=\sec^2\theta\,d\theta$，

$$\therefore\quad I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}\theta}{\sec^3\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=2(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2$$

750. 求：(1) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$；(2) $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.

［解］ (1) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = x\ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt\ (\text{令 } t=\sqrt{x}) = \int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}(t-1)^2+\ln(1+t)\right]\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}+\ln 2.$$

$$\therefore\quad \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx = \ln 2+\frac{1}{2}-\ln 2 = \frac{1}{2}.$$

(2) 令 $x^2=t$.

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt = \frac{1}{2}(te^t)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

751. 求：(1) $\int_1^2 x\ln^2 x\,dx$； (2) $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}^2 x\,dx$.

［解］ (1) $\int_1^2 x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x^2\frac{1}{x}\ln x\,dx$

$$=2\ln^2 2-\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2+\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\frac{1}{x}dx$$

$$=2\ln^2 2-2\ln 2+\frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2\ln^2 2-2\ln 2+\frac{3}{4}.$$

(2) $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\,tg}^2 x\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\int_0^1 \mathrm{arc\,tg}\,x\,dx+\int_0^1\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}^2 x\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\frac{1}{2}\ln 2.$$

752. 设 m, n 都是非负整数，证明

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0\quad(m\neq n);$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0;$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 mx\,dx=\pi\quad(m\neq 0);\qquad \int_0^{2\pi}\cos^2 mx=\begin{cases}2\pi\ (m=0),\\ \pi\ \ (m\neq 0).\end{cases}$$

［证］ $$\int_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=0\quad(m\neq n).$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\,dx.$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=0\quad(m\neq n).$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n}-\dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=0\quad(m\neq n),\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2mx\,dx=\begin{cases}0 & (m=n=0),\\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos 2mx}{2m}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0 & (m=n\neq 0),\end{cases}\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2mx)\,dx$$

$$=\pi-\frac{1}{2}\frac{\sin 2mx}{2m}\Bigg|_0^{2\pi}=\pi\quad(m\neq 0).$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 mx)\,dx=2\pi-\int_0^{2\pi}\sin^2 mx\,dx$$

$$=\begin{cases}2\pi & (m=0),\\ \pi & (m\neq 0).\end{cases}$$

［说明］ 如果将 $\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$ 看作函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的内积，将 $\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx=0$ 时看作 $f(x)$ 和 $g(x)$ 正交，那么本题的结果是说：三角函数系 $\cos nx$, $\sin nx$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上是正交系。

753. 设 n 是正整数，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

［证］ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

当 n 是偶数时，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot I_0$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

当 n 是奇数时，

$$I_n=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}.$$

简记为 $I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数.}\end{cases}$

此外，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)\quad\left(\text{令 } x=\frac{\pi}{2}-t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

754. 求：(1) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sin^4 x\,dx$;

(2) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ （n是正整数）.

［解］ (1) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^4 x dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 3\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9}{16}\pi$ （参见第 753 题）.

(2) 令 $x=\sin t$,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx$$

$$= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} \quad \text{（参见第 753 题）}$$

$$= \frac{2n!!}{(2n+1)!!}.$$

755. 求: (1) $\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} dx \quad (a>0)$;

(2) $\int_0^a (a^2+2x^2)\sqrt{a^2-x^2}\, dx \quad (a>0)$.

［解］ (1) 令 $x=a\sin t$, 则 $(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} = a^5\cos^5 t \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

$$dx = a\cos t\, dt,$$

$$\therefore \int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{5}{2}} dx = a^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\, dt$$

$$= a^6 \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} a^6\pi \quad \text{（参见第 753 题）}.$$

(2) 令 $x=a\sin t$, 则 $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $dx = a\cos t\, dt$,

$$\therefore \int_0^a (a^2+2x^2)\sqrt{a^2-x^2}\, dx = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\sin^2 t)\cos^2 t\, dt$$

$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\cos^2 t)\cos^2 t\, dt$$

$$= a^4\left(3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\, dt\right)$$

$$= a^4\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi a^4 \quad \text{（参见第 753 题）}.$$

756. 求：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x+\sin x}$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

［解］ (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+2\sqrt{2})\quad\left(\because\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\right).$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sec^2\frac{x}{2}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$=x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ln 2=\frac{\pi}{2}-2\ln 2.$$

757. 求：(1) $\int_0^3\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

(2) $\int_0^a(a^2-x^2)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx\quad(a>0)$.

［解］ (1) $\int_0^3\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_0^3-\int_0^3 x\,d\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

$$=3\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx.$$

令 $\sqrt{x}=t$,

$$\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2t^2}{1+t^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=2(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}),$$

$$\therefore\quad \int_0^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = 3\operatorname{arctg}\sqrt{3} - (\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{3})$$

$$= 4\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

(2) 令 $t=\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $dx=2at\,dt$,

$$\int_0^a (a^2-x^2)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx = 2a^3\int_0^1 (t-t^5)\operatorname{arctg} t\,dt$$

$$=2a^3\left[\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^6}{6}\right)\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 (3t^2-t^6)\frac{dt}{1+t^2}\right]$$

$$=2a^3\left[\frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}\int_0^1\left(t^4-t^2-2+\frac{2}{1+t^2}\right)dt\right]$$

$$=2a^3\left[\frac{\pi}{12}-\frac{16}{45}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1\right]=2a^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{16}{45}\right).$$

758. 求: (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^9 x}{\sin^9 x+\cos^9 x}\,dx$.

[解] (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|\Big|_0^1 = \ln\frac{7}{2}-\ln\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$

$$=\ln(2\sqrt{2}-1).$$

(2) 令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^9 x}{\sin^9 x+\cos^9 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^9 t}{\sin^9 t+\cos^9 t}\,dt,$$

$$\therefore\quad 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^9 x+\cos^9 x}{\sin^9 x+\cos^9 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

759. 求: (1) $\displaystyle\int_1^2 x^n \ln x\,dx$; (2) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx$.

［解］ (1) $\int_1^2 x^n \ln x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{n+1}\int_1^2 x^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$

$$=\frac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\Big|_1^2=\frac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2-\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2}.$$

(2) 令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，$dx=\cos t\,dt\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\therefore\quad \int_0^1(\arcsin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t\,dt=t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\cos t=\frac{\pi^2}{4}+2\left(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right)=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

760. 求：$I_1=\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$；$I_2=\int_0^{\pi}(x\cos x)^2dx$.

［分析］ 利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 可以很容易求得 I_1+I_2，再利用 $\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$ 又可求得 I_2-I_1，这样便可解出 I_1 和 I_2.

［解］ $I_1+I_2=\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{\pi^3}{3}$.

$$I_2-I_1=\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2d\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\,d\cos 2x=\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

解得 $$I_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right),\quad I_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right).$$

761. 求：(1) $\int_1^e\frac{(3-2\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$；

(2) $\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+3)e^x\,dx$.

［解］ (1) 令 $1+\ln x=t$，则 $\frac{dx}{x}=dt$，

$$\therefore\quad \int_1^e\frac{(3-2\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int_1^2[3-2(t-1)]\sqrt{t}\,dt$$

$$=\left[\frac{10}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_1^2=\frac{52\sqrt{2}-38}{15}.$$

(2) $\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+3)e^x dx=\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+3)\,de^x=\left[(x^2+3)e^x\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}}2xe^x dx$

$=\left[(x^2+3)e^x\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}-\left\{\left[2xe^x\right]\Big|_0^{\sqrt{2}}-2\int_0^{\sqrt{2}}e^x dx\right\}$

$=(x^2-2x+5)e^x\Big|_0^{\sqrt{2}}=(7-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}-5.$

762. 求：$\int_{0.5}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

［分析］ 从被积函数的表示式容易看出利用代换 $t=x+\frac{1}{x}$ 较方便．但 x 是 t 的多值函数．只有将积分区间分为 [0.5, 1] 和 [1, 2] 两部分，在每一个部分内 x 才是 t 的单值函数．

［解］ $I=\int_{0.5}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$$=\int_{0.5}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=I_1+I_2,$$

令 $t=x+\frac{1}{x}$，则当 x 在 [0.5, 1] 上，

$$x=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\quad \frac{1}{x}=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},\quad dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt,$$

当 x 在 [1, 2] 上，

$$x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},\quad \frac{1}{x}=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2},\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt,$$

$$\therefore\quad I_1=\frac{1}{2}\int_{2.5}^{2}e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+t-\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{2.5}e^t\left(-1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}-t+\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{2}^{2.5}e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+t+\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$\therefore\quad I=I_1+I_2=\int_{2}^{2.5}e^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$=\int_{2}^{2.5}e^t d\sqrt{t^2-4}+\int_{2}^{2.5}e^t\sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$=e^t\sqrt{t^2-4}\Big|_2^{2.5}-\int_{2}^{2.5}e^t\sqrt{t^2-4}\,dt+\int_{2}^{2.5}e^t\sqrt{t^2-4}\,dt=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

763. 求：$I_n=\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{2n}x\,dx$.

［分析］ 利用等式 $\operatorname{tg}^{2n}x\,dx=\operatorname{tg}^{2n-2}x\,d(\operatorname{tg}x)-\operatorname{tg}^{2n-2}x\,dx$ 进行降阶。

［解］ $I_n=\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{2n}x\,dx=\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{2n-2}x\,d(\operatorname{tg}x)-\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^{2(n-1)}x\,dx$

$$=\frac{1}{2n-1}\operatorname{tg}^{2n-1}x\Big|_0^{\pi/4}-I_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

$$\therefore\quad I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2n-(2k-1)}+(-1)^nI_0,$$

$$\because\quad I_0=\int_0^{\pi/4}dx=\frac{\pi}{4},\quad\therefore\quad I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2(n-k)+1}+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

764. 求：$B(m,n)=\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$，$m$ 和 n 都是正整数。

［解］ $B(m,n)=\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{1}{m}\int_0^1(1-x)^{n-1}d(x^m)$

$$=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1x^m(1-x)^{n-2}dx$$

$$=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1),$$

$$\therefore\quad B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)$$

$$=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1x^{m+n-2}dx$$

$$=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{m+n-1}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

765. 求：(1) $\int_0^2f(x)dx$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant2;\end{cases}$

(2) $\int_0^1f(x)dx$，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\dfrac{1-x}{1-t}, & t<x\leqslant1.\end{cases}$

［解］ (1) $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2=\frac{5}{6}.$$

(2) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^t x\,dx+\int_t^1 t\frac{1-x}{1-t}\,dx$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^t-\frac{t}{1-t}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_t^1=\frac{t^2}{2}+\frac{t(1-t)}{2}=\frac{t}{2}.$$

766. 求：(1) $\int_{-2}^2|x^2-1|\,dx$； (2) $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|\,dx$.

［解］ (1) $\int_{-2}^2|x^2-1|\,dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx$

$$-\int_{-1}^1(x^2-1)\,dx+\int_1^2(x^2-1)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-1}^1+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=4.$$

(2) $\int_{\frac{1}{e}}^e|\ln x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^1(-\ln x)\,dx+\int_1^e\ln x\,dx$

$$=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1+\int_{\frac{1}{e}}^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

767. 求：$\int_0^1 x|x-a|\,dx$.

［分析］ 由于被积函数中有 $|x-a|$，积分区间是 $[0,\ 1]$，所以须分三种情形 $a\leqslant 0$，$0<a<1$ 和 $a\geqslant 1$ 加以计算.

［解］ 当 $a\leqslant 0$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|\,dx=\int_0^1(x^2-ax)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}.$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|\,dx=\int_0^a(ax-x^2)\,dx+\int_a^1(x^2-ax)\,dx$$

$$=\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

当 $1\leqslant a$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|dx=\int_0^1(ax-x^2)\,dx=\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

768. 求：(1) $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx$;　(2) $\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)dx$;

(3) $\int_1^{n+1}\ln[x]dx$;　　(4) $\int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))dx$.

[解] (1) $\because\quad \operatorname{sgn}(x-x^3)=\begin{cases}1, & 当\ 0<x<1,\\ -1, & 当\ 1<x\leqslant 3,\\ 0, & 当\ x=0,\ 1,\end{cases}$

$$\therefore\quad \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx=\int_0^1 dx-\int_1^3 dx=1-2=-1.$$

(2) $\because\quad x\operatorname{sgn}(\cos x)=\begin{cases}x, & 当\ 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ -x, & 当\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\\ 0, & 当\ x=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)dx=\int_0^{\pi/2}x\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{4}.$$

(3) $x=k(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n+1)$ 是函数 $\ln[x]$的不连续点，并且当 $k\leqslant x<k+1$ 时 $\ln[x]=\ln k$,

$$\therefore\quad \int_1^{n+1}\ln[x]dx=\sum_{k=1}^{n}\ln k\int_k^{k+1}dx=\sum_{k=1}^{n}\ln k=\ln(n!).$$

(4) 被积函数的不连续点是函数 $\sin(\ln x)$ 的零点，即 $x=e^{-k\pi}(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$,

$$\therefore\quad \int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}\operatorname{sgn}(\sin(\ln x))dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}(e^{-k\pi}-e^{-(k+1)\pi})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}(e^{-k\pi}-e^{-(k+1)\pi})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-\pi})\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}e^{-k\pi}$$

$$=(1-e^{-\pi})\lim_{n\to\infty}\frac{-1+(-1)^{n}e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

769. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 连续，证明：

(1) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$;

(2) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}}[f(x)+f(a-x)]dx$.

［证］ (1) 令 $x=a-t$, 则

$$\int_0^a f(x)dx=\int_a^0 f(a-t)(-dt)=\int_0^a f(a-x)dx.$$

(2) 令 $x=a-t$, 则

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)(-dt)=\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)dt,$$

$$\therefore\quad \int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}[f(x)+f(a-x)]dx.$$

770. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，证明

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt.$$

［证］ 令 $t=\frac{x-a}{b-a}$, 则 $x=a+(b-a)t$, $dx=(b-a)dt$,

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt.$$

771. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，求 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x^2+y)dy$.

［解］ 令 $x^2+y=t$，则 $y=t-x^2$，$dy=dt$，

$$\therefore\quad F(x)=\int_a^b f(x^2+y)\,dy=\int_{x^2+a}^{x^2+b} f(t)\,dt=\int_0^{x^2+b} f(t)\,dt-\int_0^{x^2+a} f(t)\,dt.$$

$$\therefore\quad F'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+b)\frac{d}{d(x^2+b)}\int_0^{x^2+b} f(t)\,dt$$

$$-\frac{d}{dx}(x^2+a)\frac{d}{d(x^2+a)}\int_0^{x^2+a} f(t)\,dt$$

$$=2xf(x^2+b)-2xf(x^2+a)$$

$$=2x[f(x^2+b)-f(x^2+a)].$$

772. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

［证］ (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right](-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt.$$

(2) 令 $x=\pi-t$，则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\int_{\pi}^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-dt)$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt,$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

773. 求：(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$；　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

［解］ (1) 由第 772 题得

$$\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

$$=\pi\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi^2.$$

(2) 由第 772 题得.

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg}\cos x\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{4}.$$

774. 求 $f(x)=\int_0^x \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的极值.

[解] $f'(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$, 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上 $f'(x)=0$ 的点是 $x=0, \pi$,

x	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$(0, \pi)$	π	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↗	极大值	↘

极大值是

$$f(\pi)=\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\pi^2}{4} \quad (\text{参见第 773(2) 题}).$$

775. 设 $F(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx$, $|a|\neq 1$, 证明

$$F(a)=\frac{1}{2}F(a^2),$$

并求此积分

[证] $F(-a)=\int_0^\pi \ln(1+2a\cos x+a^2)dx$

$$=\int_\pi^0 \ln(1-2a\cos y+a^2)(-dy) \quad (\text{令 } x=\pi-y)$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos y+a^2)dy=F(a),$$

$$\therefore\ 2F(a)=\int_0^\pi[\ln(1-2a\cos x+a^2)+\ln(1+2a\cos x+a^2)]dx$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2a^2\cos 2x+a^4)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\ln(1-2a^2\cos z+a^4)\frac{dz}{2}\quad(令\ 2x=z)$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2a^2\cos z+a^4)dz=F(a^2),$$

$$\therefore\quad F(a)=\frac{1}{2}F(a^2).$$

求积分如下：由上述结论，得

$$F(a)=\frac{1}{2}F(a^2)=\frac{1}{2^2}F(a^4)=\cdots=\frac{1}{2^n}F(a^{2^n}),$$

(1) 当 $|a|<1$ 时

$$F(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}F(a^{2^n})=0.$$

(2) 当 $|a|>1$ 时

$$F(a)=\int_0^{\pi}\ln\left[a^2\left(\frac{1}{a^2}-2\frac{1}{a}\cos x+1\right)\right]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\ln a\,dx+\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi\ln a+F\left(\frac{1}{a}\right)=2\pi\ln a.$$

776．指出下面解法的错误：

$$\because\quad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x(2-x)}{1-x}\right)=\frac{2-2x+x^2}{(1-x)^2+x^2(2-x)^2},$$

$$\therefore\quad \int_0^2\frac{2-2x+x^2}{(1-x)^2+x^2(2-x)^2}dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{x(2-x)}{1-x}\Big|_0^2=0.$$

应该怎样修正？

［解］ 因为函数 $\operatorname{arc\,tg}\frac{x(2-x)}{1-x}$ 在 $x=1$ 不连续，所以它不是被积函数 $\frac{2-2x+x^2}{(1-x)^2+x^2(2-x)^2}$ 在 $[0,\ 2]$ 上的原函数，因此牛顿-莱布尼茨公式不能被应用．修正如下：因为

$$\lim_{x\to1-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{x(2-x)}{1-x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to1+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{x(2-x)}{1-x}=-\frac{\pi}{2},$$

令 $$F(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x(2-x)}{1-x}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=1,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{x(2-x)}{1-x}+\pi, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 是被积函数在 [0, 2] 内的一个原函数，所以

$$\int_0^2 \frac{2-2x+x^2}{(1-x)^2+x^2(2-x)^2}\,dx=F(x)\Big|_0^2=\pi.$$

777. 求 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

［解］ 因为函数 $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 在 $x=0$ 不连续，所以 $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 不是被积函数 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$ 在 [−1, 1] 上的原函数，由于

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1,\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0,$$

令 $$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 F 是被积函数在 [−1, 1] 上的一个原函数，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=F(x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

778. **证明在偶函数的原函数中有一个是奇函数，而奇函数的一切原函数都是偶函数.**

［证］ 设 $f(x)$ 是偶函数，它的原函数的一般表达式是

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+c,$$

c 是任意常数，而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt+c,$$

作代换 $t=-u$，并注意到 $f(x)$ 是偶函数，得

$$F(-x)=\int_0^x f(-u)(-du)+c=-\int_0^x f(u)\,du+c,$$

当 $c=0$ 时，(这时 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数)，有 $F(-x)=F(x)$，即 $F(x)$ 是一个奇函数。

设 $f(x)$ 是奇函数，同样有

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+c,\quad F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt+c,$$

在第二个积分中令 $t=-u$，并注意到 $f(x)$ 是奇函数，得

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\,du+c=F(x).$$

这样便证明了奇函数的一切原函数都是偶函数。

779. 设 $F(x)=\int_0^x \sin^n t\,dt,\quad G(x)=\int_0^x \cos^n t\,dt.$

证明：(1) 当 n 是奇数时，$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是周期 2π 的函数；当 n 是偶数时，$F(x)$ 和 $G(x)$ 是一个线性函数与一个周期为 2π 的函数之和.

［证］ (1) 当 n 是奇数时，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^x \sin^n t\,dt+\int_x^{x+2\pi}\sin^n t\,dt$$

$$=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n t\,dt=F(x).$$

即 $F(x)$ 是周期 2π 的函数。对 $G(x)$ 的证明相同。

(2) 当 n 是偶数时，

$$F(x+2\pi)=\int_0^x \sin^n t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin^n t\,dt$$

$$=F(x)+C_n.\quad (C_n\text{ 是一个与 } n \text{ 有关的正数}).$$

考虑函数 $\varphi(x)=F(x)-\dfrac{C_n}{2\pi}x$，有

$$\varphi(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{C_n}{2\pi}(x+2\pi)=F(x)+C_n-\left(\frac{C_n}{2\pi}x+C_n\right)$$

$$=F(x)-\frac{C_n}{2\pi}x=\varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 是周期 2π 的函数，而

$$F(x)=\varphi(x)+\frac{C_n}{2\pi}x.$$

即 F 是一个线性函数 $\frac{C_n}{2\pi}x$ 与一个周期 2π 函数 $\varphi(x)$ 之和. 对 $G(x)$ 的证明相同.

780. 设 $f(x)$ 是一个次数不超过 3 的多项式，证明

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

〔证〕 令 $c=\frac{a+b}{2}$, $h=\frac{b-a}{2}$, 将 $f(x)$ 表示为

$$f(x)=A(x-c)^3+B(x-c)^2+C(x-c)+D.$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\,dx=\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-h}^{h}(At^3+Bt^2+Ct+D)\,dt\quad(令\ t=x-c)$$

$$=2\int_0^h(Bt^2+D)\,dt=\frac{2}{3}Bh^2+2Dh.$$

另一方面又有

$$f(a)=f(c-h)=-Ah^3+Bh^2-Ch+D,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(c)=D,\ f(b)=f(c+h)=Ah^3+Bh^2+Ch+D,$$

$$\therefore\quad \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{4Bh^3+12Dh}{6}$$

$$=\frac{2}{3}Bh^3+2Dh.$$

这样便证明了

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

781. 对于勒让德多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，证明：

(1) $\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=\begin{cases}0, & 0\leqslant k<n,\\ \frac{2\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}, & k=n,\end{cases}$

(2) $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \frac{2}{2n+1}, & n=m.\end{cases}$

［证］ (1) 设 $I_k=\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx$,

利用分部积分法,

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{1}{2^nn!}\int_{-1}^{1}x^k\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)dx\\&=\frac{1}{2^nn!}\left(x^k\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)\Big|_{-1}^{1}\\&\quad-\frac{k}{2^nn!}\int_{-1}^{1}x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx,\end{aligned}$$

因为 $x=\pm1$ 是 $(x^2-1)^n$ 的 n 重根，所以当 $x=\pm1$ 时 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$ 为 0, 故得下列递推公式

$$I_k=-\frac{k}{2^nn!}I_{k-1}=\cdots=(-1)^k\frac{k!}{2^n\cdot n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n\,dx.$$

当 $k<n$ 时， $I_k=(-1)^k\frac{k!}{2^n\cdot n!}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(x^2-1)^n\right]\Big|_{-1}^{1}=0.$

当 $k=n$ 时,

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta\quad(令\ x=\sin\theta)\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots5\cdot3}=\frac{2\cdot n!}{1\cdot3\cdots(2n+1)}.\end{aligned}$$

(2) 设 P_m 和 P_n 分别是 m 次和 n 次勒让德多项式, $m<n$, 且 $P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k$, 利用(1)的结论,有

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} a_k \int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = 0.$$

当 $m>n$ 时显然有同样的结果.

当 $m=n$ 时，由 (1)

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\,dx = a_n \int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx = a_n \cdot \frac{2\cdot n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}.$$

a_n 是 $P_n(x)$ 中 x^n 的系数，故

$$a_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n}) = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!},$$

代入上式得

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

［说明］ 参见第 752 题的说明. 本题的结果是说：勒让德多项式 P_0, P_1, P_2, …, P_n, … 是 $[-1, 1]$ 上的正交函数系.

782. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{n}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right)$.

［解］ (1) ∵

$$\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2} = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right],$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) ∵

$$\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}} = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}}\right],$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1).$$

783．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^p}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^p+\left(\frac{n+2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^p}(p\neq-1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

［解］ (1) 分子和分母同乘 $\dfrac{1}{n}$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^p\right]$$

$$=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p+\left(1+\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^p\right]$$

$$=\int_1^2 x^p\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^2=\frac{2^{p+1}-1}{p+1},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^p}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^p+\left(\frac{n+2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{2n-1}{n}\right)^p}=\frac{1}{2^{p+1}-1}.$$

(2) 取对数，

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)=\int_0^1\ln x\,dx$$

$$=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

784. n 等分区间 $[a, b]$ $(a>0)$，设分点是 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_0x_1x_2\cdots x_n}$。

［解］ $\ln\sqrt[n]{x_0x_1x_2\cdots x_n}=\frac{1}{n}(\ln x_0+\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$

$$=\frac{1}{n\Delta x}(\ln x_0\cdot\Delta x+\ln x_1\cdot\Delta x+\ln x_2\cdot\Delta x+\cdots+\ln x_n\cdot\Delta x),$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_0x_1x_2\cdots x_n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(x\ln x\Big|_a^b-\int_a^b x\,d\ln x\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}(b\ln b-a\ln a-b+a),$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_0x_1x_2\cdots x_n}=\exp\left(\frac{1}{b-a}\ln\frac{b^b}{a^a}-1\right),\quad 其中\exp(t)=e^t.$$

［说明］ 由定积分的定义，我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\Delta x}(\ln x_1\cdot\Delta x+\ln x_2\cdot\Delta x+\cdots+\ln x_n\cdot\Delta x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\,dx,$$

但现在我们却利用了下面的等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\Delta x}(\ln x_0\cdot\Delta x+\ln x_1\cdot\Delta x+\ln x_2\cdot\Delta x+\cdots+\ln x_n\cdot\Delta x)$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\,dx,$$

为什么可以这样用呢？这是因为 $\frac{1}{n}\ln x_0\to 0\ (n\to\infty)$，所以上式成立。

785. 利用第 753 题的结果证明瓦理斯公式：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

［证］ 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时有

$$\sin^{2n+2}x<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x,$$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+2}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx.$$

由第753题得

$$\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}{(2n+2)2n\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}$$

$$<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

不等式各端同乘 $\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}$ 得

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}<\frac{\pi}{2},$$

令 $n\to+\infty$，上式左右两端皆趋于 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

786. 证明等式 $\int_0^\pi\frac{\ln(1+k\cos x)}{\cos x}dx=\pi\arcsin k\ (|k|<1)$.

［分析］ 将积分看作带有参变量 k 的积分，即

$$I(k)=\int_0^\pi\frac{\ln(1+k\cos x)}{\cos x}dx,$$

由于被积函数及其关于 k 的导数都连续，故可以在积分号内求导，得

$$I'(k)=\int_0^\pi\left[\frac{\ln(1+k\cos x)}{\cos x}\right]_k'dx=\int_0^\pi\frac{dx}{1+k\cos x},$$

而后者是容易积出的.

［解］ 令 $$I(k)=\int_0^\pi\frac{\ln(1+k\cos x)}{\cos x}dx.$$

$$I'(k)=\int_0^\pi\frac{dx}{1+k\cos x}=\left[\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}.$$

$$\therefore\quad I(k)=\int\frac{\pi}{\sqrt{1-k^2}}dk=\pi\arcsin k+C,$$

C 是待定系数. 令 $k=0$，有 $I(0)=0$，$\therefore C=0$.

$$\therefore\quad I(k)=\pi\arcsin k.$$

787. 证明等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)dx = \pi\ln\frac{a+b}{2}$, $(a,\ b>0)$.

［证］ 令　$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)dx$,

由于被积函数及其关于 a 的导数都连续，故

$$I'(a)=2a\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$$

$$=2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)}\quad（令\ t=\mathrm{tg}\,x）$$

$$=\frac{2a}{b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{a^2}{b^2}+t^2\right)(1+t^2)},$$

当 $a\neq b$ 时，

$$I'(a)=\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\frac{a}{b}}-\mathrm{arctg}\,x\right)\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(\frac{b}{a}-1\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{a+b}.$$

当 $a=b$ 时，

$$I'(a)=\frac{2}{b}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{2}{b}\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x\right]\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2b}=\frac{\pi}{a+b}.$$

因此，不论 $a\neq b$ 或 $a=b$，都有 $I'(a)=\dfrac{\pi}{a+b}$,

$$\therefore\quad I(a)=\int\frac{\pi}{a+b}da=\pi\ln(a+b)+c,$$

c 是待定常数．令 $a=b$, $I(a)=\pi\ln(a+a)+c$,

另一方面有　$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln a^2\,dx=\pi\ln a$,

两式应相等　$\therefore\quad c=-\pi\ln 2$.

最后得　$I(a)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

788. 计算 $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx\quad(|r|<1)$.

［解］ 令
$$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx,$$
由于被积函数及其关于 r 的导数都连续，故
$$I'(r)=\int_0^\pi \frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=\frac{1}{r}\int_0^\pi\left(1+\frac{r^2-1}{1-2r\cos x+r^2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{r}+\frac{1}{r}\int_0^\pi \frac{r^2-1}{1-2r\cos x+r^2}\,dx.$$
令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，
$$\therefore\quad I'(r)=\frac{\pi}{r}+\frac{1}{r}\cdot(r^2-1)\int_0^\infty \frac{2\,dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}$$
$$=\frac{\pi}{r}+\frac{1}{r}\left[-2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\right]\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{r}+\frac{1}{r}(-\pi)=0,$$
$$\therefore\quad I(r)=C\,(C\text{ 是常数}),$$
令 $r=0$，则 $I(0)=0$，$\therefore C=0$，得
$$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx=0,\ (|r|<1).$$

§3. 中 值 定 理

789. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 连续，在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内恒正，并且 $f\left(\frac{a}{2}+x\right)=-f(x)\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right)$. 确定下列积分的符号.

(1) $\int_0^a xf(x)\,dx$； (2) $\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx\left(若\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\ 存在\right)$.

［解］ (1) $\int_0^a xf(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}xf(x)\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^a xf(x)\,dx$. 在后一积分中令 $x=\frac{a}{2}+t$，则
$$\int_0^a xf(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}xf(x)\,dx+\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)f\left(\frac{a}{2}+t\right)dt$$
$$=\int_0^{\frac{a}{2}}xf(x)\,dx-\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)f(t)\,dt=-\frac{a}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}f(t)\,dt$$
$$=-\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}f(\xi)<0\quad\left(\text{中值定理}\quad 0<\xi<\frac{a}{2}\right).$$

(2) $\int_0^a \frac{f(x)}{x}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{a}{2}}^a\frac{f(x)}{x}dx$,在后一积分中令 $x=\frac{a}{2}+t$,则

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f\left(\frac{a}{2}+t\right)}{\frac{a}{2}+t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\frac{a}{2}+x}\right)dx=\frac{a}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{f(x)}{x\left(\frac{a}{2}+x\right)}dx$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\frac{f(\xi)}{\xi\left(\frac{a}{2}+\xi\right)}>0\quad\left(\text{中值定理,}\ 0<\xi<\frac{a}{2}\right).$$

790. 设函数 $f(x)$ 是连续的奇函数,并且当 $x>0$ 时 $f(x)>0$,确定 $\int_{-2}^2 f(x)a^x dx\ (a>1)$ 的符号.

[解] $\int_{-2}^2 f(x)a^x dx=\int_{-2}^0 f(x)a^x dx+\int_0^2 f(x)a^x dx$, 在右端第一个积分中令 $x=-t$, 则

$$\int_{-2}^2 f(x)a^x dx=\int_2^0 f(-t)a^{-t}(-dt)+\int_0^2 f(x)a^x dx$$

$$=\int_0^2 f(-x)a^{-x}dx+\int_0^2 f(x)a^x dx=\int_0^2 f(x)(a^x-a^{-x})dx$$

$$=2\cdot f(\xi)(a^\xi-a^{-\xi})>0\quad(\text{中值定理}\ 0<\xi<2).$$

791. 利用中值定理判断下面的积分哪个大.

$$I_1=\int_0^\pi e^{-x^2}\cos^2 x\,dx,\quad I_2=\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 x\,dx.$$

[解] 在 I_2 中令 $x=\pi+t$, 则

$$I_2=\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 x\,dx=\int_0^\pi e^{-(\pi+t)^2}\cos^2 t\,dt.$$

$$\therefore\quad I_1-I_2=\int_0^\pi\left[e^{-t^2}-e^{-(\pi+t)^2}\right]\cos^2 t\,dt$$

$$=\pi\left(e^{-\xi^2}-e^{-(\pi+\xi)^2}\right)\cos^2\xi>0\quad(0<\xi<\pi).$$

$$\therefore\quad I_1>I_2.$$

792. 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a, b]$上的连续函数，$f(x)<g(x)$，$(x\in[a, b])$，利用中值定理证明：

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx.$$

［证］ $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

$$=(b-a)(g(\xi)-f(\xi))>0\quad(a<\xi<b),$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx.$$

793. 证明：$\dfrac{1}{7\sqrt{2}}<\int_0^1 \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx<\dfrac{1}{7}$.

［证］ 由中值定理

$$\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^6dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot\frac{1}{7}\qquad(0<\xi<1),$$

得

$$\frac{1}{7\sqrt{2}}<\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx<\frac{1}{7}.$$

794. 求下列函数在所给区间上的平均值(亦即中值)

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[0, 8]$;　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

［解］ (1) 所求的平均值是

$$\frac{1}{8-0}\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^8=\frac{3}{2}.$$

(2) 所求的平均值是

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

795. 设函数$f(x)$在$[0, 1]$连续，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^nf(x)dx=0.$$

［证］ 由中值定理

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(\xi)\int_0^1 x^n\,dx = \frac{f(\xi)}{n+1} \quad (0<\xi<1).$$

这里 ξ 将随 n 的变化而变化，但 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数，所以 $f(\xi)$ 是有界的，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f(\xi)\cdot\frac{1}{n+1} = 0.$$

796. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=0, \quad \text{当 } n \text{ 为奇数；}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=0, \quad \text{当 } n \text{ 为偶数.}$$

［证］ 当 n 为奇数时

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad \text{（参见第 753 题）.}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0\left(\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=I_1+I_2,$$

$$|I_2|\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}|\sin^n x|\,dx\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}dx=\varepsilon,$$

$$|I_1|=\sin^n\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}dx<\frac{\pi}{2}\cdot\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$$

$$\because\quad 0<\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<1,$$

∴ 存在 N，当 $n>N$ 时有

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left[\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]<\varepsilon,$$

这样便得到当 $n>N$ 时，

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx<2\varepsilon,$$

即证明了　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$。

当 n 是偶数时，利用

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

（参见第 753 题），相仿可以证得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=0.$$

797. 设函数 $f(x)$ 连续，并且对任何 x，$\int_x^{x+1}f(t)dt=c$，c 是与 x 无关的常数．证明 $f(x)$ 是一个周期函数，周期是 1．

［证］ 对任何 x 和任何 a：$x<a<x+1$，

$$\because\quad \int_x^{x+1}f(t)\,dt=\int_x^a f(t)\,dt+\int_a^{a+1}f(t)\,dt+\int_{a+1}^{x+1}f(t)\,dt,$$

$$\int_x^{x+1}f(t)\,dt=c,\ \int_a^{a+1}f(t)\,dt=c,$$

$$\therefore\quad \int_x^a f(t)\,dt+\int_{a+1}^{x+1}f(t)\,dt=0.$$

利用中值定理：

$$\int_x^a f(t)\,dt=f(\xi)(a-x)\quad (x\leqslant\xi\leqslant a),$$

$$\int_{a+1}^{x+1}f(t)\,dt=f(\xi')(x-a)\quad (a+1\leqslant\xi'\leqslant x+1).$$

得　$$f(\xi)(a-x)+f(\xi')(x-a)=(a-x)[f(\xi)-f(\xi')]=0,$$

$$\therefore\quad f(\xi)-f(\xi')=0.$$

令 $a\to x$，则 $\xi\to x$，$\xi'\to x+1$，再由 $f(x)$ 的连续性得 $f(x)=f(x+1)$，故 $f(x)$ 是一周期函数，其周期为 1．

798. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，非负，并且有连续的导数，又设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，利用分部积分法证明存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi}f(x)dx.$$

［证］ 利用分部积分法，得到

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\int_a^b \varphi(x)\,d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$=\left(\varphi(x)\int_a^x f(t)\,dt\right)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b \varphi'(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx$$

$$=\varphi(b)\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^b \varphi'(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx$$

记 $$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x f(t)\,dt,\ m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x f(t)\,dt,$$

注意到 $\varphi(b)\geqslant 0$, $\varphi'(x)\leqslant 0$（$\because$ $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 单调减少），所以

$$\left(\varphi(b)-\int_a^b \varphi'(x)\,dx\right)m\leqslant\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx\leqslant\left(\varphi(b)-\int_a^b \varphi'(x)\,dx\right)M,$$

而 $\varphi(b)-\int_a^b \varphi'(x)\,dx=\varphi(b)-[\varphi(b)-\varphi(a)]=\varphi(a)$，所以存在 μ: $m\leqslant\mu\leqslant M$，使 $\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\mu\varphi(a)$，再由 $\int_a^x f(t)\,dt$ 关于 x 的连续性，故存在 $\xi\in[a, b]$ 使 $\mu=\int_a^\xi f(t)\,dt$。这样便证明了

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

799. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加、非负、并且有连续的导数，又设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. 利用分部积分法证明存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

［证］ 利用分部积分法，得到

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=-\int_a^b \varphi(x)\,d\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)$$

$$=\left(-\varphi(x)\int_x^b f(t)\,dt\right)\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b \varphi'(x)\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)dx$$

$$=\varphi(a)\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b \varphi'(x)\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)dx.$$

记 $$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_x^b f(t)\,dt,\ m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\int_x^b f(t)\,dt,$$

注意到 $\varphi(a)\geqslant 0$, $\varphi'(x)\geqslant 0$（$\because$ $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加），所以

$$\left(\varphi(a)+\int_a^b\varphi'(x)dx\right)m\leqslant\int_a^b\varphi(x)f(x)dx\leqslant\left(\varphi(a)+\int_a^b\varphi'(x)dx\right)M,$$

而
$$\varphi(a)+\int_a^b\varphi'(x)dx=\varphi(a)+(\varphi(b)-\varphi(a))=\varphi(b),$$

所以存在 μ: $m\leqslant\mu\leqslant M$，使 $\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\mu\varphi(b)$，再由 $\int_x^b f(t)dt$ 关于 x 的连续性，故存在 $\xi\in[a, b]$ 使 $\mu=\int_\xi^b f(t)dt$ 这样便证明了

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\varphi(b)\int_\xi^b f(t)dt.$$

800. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调并且有连续的导数，又设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. 利用上一题的结论，证明存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

［证］ 设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，作 $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(a)$，则 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，非负，并且有连续的导数. 利用上一题的结论：存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b\psi(x)f(x)dx=\int_a^b[\varphi(x)-\varphi(a)]f(x)dx=[\varphi(b)-\varphi(a)]\int_\xi^b f(x)dx,$$

将上式改写一下就得到

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\varphi(a)\int_a^b f(x)dx-\varphi(a)\int_\xi^b f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx$$
$$=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

［说明］ 更一般的结论是：设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 单调，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，则存在 $\xi\in[a, b]$，使

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

这一结论称为积分第二中值定理.

801. 利用第 798 题的结论，估计下列积分：

(1) $\int_a^b e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha\geqslant0,\ 0<a<b)$；

(2) $\int_a^b \sin(x^2)dx \quad (0<a<b)$.

［解］ (1) $I=\int_a^b e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{e^{-aa}}{a}\int_a^\xi \sin x dx \quad (a<\xi<b)$

$$=\frac{e^{-aa}}{a}(\cos a-\cos\xi).$$

$$\therefore \quad -2\frac{e^{-aa}}{a}\leqslant I\leqslant 2\frac{e^{-aa}}{a}.$$

(2) 令 $x^2=t$，则

$$I=\int_a^b \sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi),\ a^2<\xi<b^2.$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{a}\leqslant I\leqslant\frac{1}{a}.$$

802. 设 $I=\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$，证明 $0<I<\frac{1}{100\pi}$.

［证］ $I=\sum_{k=100}^{199}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{k=100}^{199}(-1)^k\int_0^\pi\frac{\sin t\,dt}{t+k\pi}$ （令 $x-k\pi=t$）

$$=\sum_{n=50}^{99}\left(\int_0^\pi\frac{\sin t\,dt}{t+2n\pi}-\int_0^\pi\frac{\sin t\,dt}{t+(2n+1)\pi}\right)$$

$$=\pi\sum_{n=50}^{99}\int_0^\pi\frac{\sin t\,dt}{(t+2n\pi)(t+(2n+1)\pi)},$$

利用第798题的结论，有

$$\int_0^\pi\frac{\sin t\,dt}{(t+2n\pi)(t+(2n+1)\pi)}=\frac{1}{2n(2n+1)\pi^2}\int_0^{\xi_n}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{2n(2n+1)\pi^2}(1-\cos\xi_n),$$

$$\therefore \quad I=\sum_{n=50}^{99}\frac{1-\cos\xi_n}{2n(2n+1)\pi}.$$

$$\because \quad 0<1-\cos\xi_n<2.$$

$$\therefore \quad 0<I<\frac{2}{\pi}\sum_{n=50}^{99}\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=50}^{99}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)-\cdots-\frac{1}{199}\right]$$

$$<\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{200}\right)=\frac{1}{100\pi}.$$

§4. 广义积分

803. 研究下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^6+x^2+1}$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{x^2-x+1}$.

[解] (1) ∵ $\frac{x^3}{x^6+x^2+1}\sim\frac{1}{x^3}\quad(x\to+\infty)$,

$$\therefore\ \int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^6+x^2+1}\ \text{收敛}.$$

(2) ∵ $\frac{1}{x\sqrt[3]{x+1}}\sim\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\quad(x\to+\infty)$, ∴ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$ 收敛.

(3) ∵ $\frac{1}{1+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\quad(x\to+\infty)$, ∴ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 发散.

(4) ∵ $\frac{x^\alpha}{x^2-x+1}\sim\frac{1}{x^{2-\alpha}}\quad(x\to+\infty)$, ∴ 当 $\alpha<1$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha dx}{x^2-x+1}$ 收敛. 当 $\alpha\geqslant1$ 时发散.

804. 研究下列积分的收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$; (2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x^\alpha}\quad(\alpha>0)$;

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln x}\quad(\alpha>0)$; (4) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0)$.

[解] (1) ∵ 对 ε: $0<\varepsilon<1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1-\varepsilon}}=0$,

$$\therefore\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx\ \text{收敛}.$$

(2) 对任何 $A>2$, 当 $\alpha\neq1$ 时

$$\int_2^A\frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}=\int_2^A\frac{d\ln x}{(\ln x)^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}\Big|_2^A$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}[(\ln A)^{1-\alpha}-(\ln 2)^{1-\alpha}],$$

$$\therefore\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}(\ln 2)^{1-\alpha}, & \alpha>1,\\ +\infty, & \alpha<1.\end{cases}$$

当 $\alpha=1$ 时,

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^A=+\infty.$$

结论: 当 $\alpha>1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ 收敛,当 $0<\alpha\leqslant1$ 时发散.

(3) 当 $\alpha>1$ 时, $\because\ \frac{1}{x^\alpha\ln x}<\frac{1}{x^\alpha}\ (x>e)$, $\therefore\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln x}$ 收敛.

当 $\alpha<1$ 时, 对 β: $\alpha<\beta<1$, 有

$$\frac{1}{x^\alpha\ln x}=\frac{1}{x^\beta}\cdot\frac{x^{\beta-\alpha}}{\ln x},\quad 而\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta-\alpha}}{\ln x}=+\infty.$$

可见当 x 充分大时有 $\frac{1}{x^\alpha\ln x}>\frac{1}{x^\beta}$, 所以 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln x}\ (\alpha<1)$ 发散.

当 $\alpha=1$ 时,

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^A=+\infty.$$

结论: 当 $\alpha>1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln x}$ 收敛,当 $0<\alpha\leqslant1$ 时发散.

(4) 当 $\alpha>1$ 时, $\because\ \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}<\frac{1}{x^\alpha}$, $\therefore\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ 收敛.

当 $\alpha<1$ 时, 对 γ: $\alpha<\gamma<1$, 有

$$\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}=\frac{1}{x^\gamma}\cdot\frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta},\quad 而\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta}=+\infty.$$

可见当 x 充分大时有 $\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}>\frac{1}{x^\gamma}$, $\therefore\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ 发散.

当 $\alpha=1$ 时, 由本题(2)知,当 $\beta>1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ 收敛,当 $0<\beta\leqslant1$ 时发散.

结论: 当 $\alpha>1$ 时, 或当 $\alpha=1$ 而 $\beta>1$ 时, $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ 收敛, 其他情形都发散.

805. 研究下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}dx\quad(\alpha>0)$;

(2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}dx \quad (\alpha>0)$;

(3) $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^\alpha x} \quad (\alpha>0)$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(x-\sin x)^\alpha} \quad (\alpha>0)$.

［解］ (1) 当 $\alpha\geqslant1$ 时，$\because \frac{-\ln x}{x^\alpha}>\frac{1}{x^\alpha}$，$\therefore \int_0^1 \frac{-\ln x}{x^\alpha}dx$ 发散，即 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 发散. 当 $0<\alpha<1$ 时，对 β: $\alpha<\beta<1$，有

$$\frac{\ln x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^\beta}x^{\beta-\alpha}\ln x, \quad 而 \quad \lim_{x\to+0}x^{\beta-\alpha}\ln x=0.$$

可见，当 x 充分接近 0 时，$\frac{\ln x}{x^\alpha}<\frac{1}{x^\beta}$，所以 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 收敛.

结论：当 $0<\alpha<1$ 时，$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 收敛；当 $\alpha\geqslant1$ 时发散.

(2) $\because \ln x=\ln[1-(1-x)]\sim x-1(x\to1)$，$\therefore \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\sim\frac{-1}{(1-x)^{\alpha-1}}(x\to1-0)$. 得：当 $\alpha-1<1$(即 $0<\alpha<2$) 时，$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}dx$ 收敛；$\alpha\geqslant2$ 时发散.

(3) $\because \sin x\sim x(x\to0)$，$\sin x\sim\pi-x(x\to\pi)$，$\therefore \frac{1}{\sin^\alpha x}\sim\frac{1}{x^\alpha}(x\to+0)$，$\frac{1}{\sin^\alpha x}\sim\frac{1}{(\pi-x)^\alpha}(x\to\pi-0)$，得：当 $0<\alpha<1$ 时，$\int_0^\pi \frac{1}{\sin^\alpha x}dx$ 收敛；当 $\alpha\geqslant1$ 时发散.

(4) $\because x-\sin x\sim\frac{x^3}{3!}(x\to0)$，$\therefore \frac{1}{(x-\sin x)^\alpha}\sim\frac{6}{x^{3\alpha}}(x\to+0)$，得：当 $0<\alpha<\frac{1}{3}$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(x-\sin x)^\alpha}$ 收敛，当 $\alpha\geqslant\frac{1}{3}$ 时发散.

806. 研究下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}dx$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

[解] (1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=I_1+I_2$

对 I_1, 当 $\alpha-1>-1$ (即 $\alpha>0$) 时, I_1 收敛, 当 $\alpha\leqslant 0$ 时 I_1 发散.

对 I_2, $\because \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\sim x^{\alpha-2}\ (x\to+\infty)$, $\therefore \alpha-2<-1$ (即 $\alpha<1$) 时 I_2 收敛, 当 $\alpha\geqslant 1$ 时 I_2 发散.

结论: 当 $0<\alpha<1$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛,其他情形都发散.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=I_1+I_2$.

对 I_1, 当 $m>-1$ 时, I_1 收敛; 当 $m\leqslant -1$ 时, I_1 发散.

对 I_2, $\because \frac{x^m}{1+x^n}\sim x^{m-n}\ (x\to+\infty)$, $\therefore$ 当 $m-n<-1$ 时 I_2 收敛; 当 $m-n>-1$ 时 I_2 发散.

结论: 当 $-1<m<n-1$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛,其他情形都发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx=I_1+I_2$

对 I_1: $\because \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}\ (x\to+0)$, $\therefore$ 当 $\alpha-1<1$ (即 $\alpha<2$) 时 I_1 收敛; 当 $\alpha\geqslant 2$ 时发散.

对 I_2: 当 $\alpha\leqslant 1$ 时, $\because \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}>\frac{1}{x^\alpha}$, $\therefore I_2$ 发散; 当 $\alpha>1$ 时, 对 β: $\alpha>\beta>1$, 有 $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=\frac{1}{x^\beta}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-\beta}}$, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-\beta}}=0$, 可见当 x 充分大时, $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}<\frac{1}{x^\beta}$, $\therefore I_2$ 收敛.

结论: 当 $1<\alpha<2$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 其他情形都发散.

(4) $\because \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, 所以 $x=0$ 不是奇点.

对任何 $A>0$, $\left|\int_0^A\sin x\,dx\right|=|\cos A-1|\leqslant 2$, 并且当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调趋于0, 由狄利克雷判别法, 得知 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

807. 研究下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$;　　　(2) $\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx$.

［解］ (1) 令 $t=x^2$, 则

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

对任何 $A>0$, $\left|\int_0^A\sin t\,dt\right|\leqslant 2$, 并且 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调, $\frac{1}{\sqrt{t}}\to 0\ (t\to+\infty)$, 利用狄利克雷判别法, 得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ 收敛.

(2) 和 (1) 完全相仿, 得 $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ 收敛.

［说明］ (1) 和 (2) 的积分称为富乃勒积分. 可以通过计算含参变量广义积分的方法求出这两个积分值相等, 都等于 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

808. 研究下列积分的收敛性:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$　$(p>0,\ q>0)$;

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$　$(p>0,\ q>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}x^p|1-x|^q dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx$.

［解］ (1) $\because$ $\sin x\sim x\ (x\to 0)$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sim\frac{\pi}{2}-x\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore\quad \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\frac{1}{x^p}\ (x\to+0),$$

$$\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}\left(x\to\frac{\pi}{2}-0\right).$$

得当 $0<p<1$, $0<q<1$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛, 其他情形都发散.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^{2}\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=I_1+I_2.$

对 I_1: $\because \ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1\ (x\to1)$,

$$\therefore\quad \frac{1}{x^p\ln^q x}\sim\frac{1}{(x-1)^q}\quad (x\to1+0).$$

得当 $0<q<1$ 时 I_1 收敛，当 $q\geqslant1$ 时发散.

对 I_2: 由第804(4)题知，当 $p>1$ 时或当 $p=1$, $q>1$ 时 I_2 收敛，其余情况发散.

结论：当 $0<q<1$, $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛，其余情形发散.

(3) $$\int_0^{+\infty}x^p|1-x|^q dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p|1-x|^q dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 x^p|1-x|^q dx$$

$$+\int_2^{+\infty}x^p|1-x|^q dx=I_1+I_2+I_3.$$

对 I_1: $\because x^p|1-x|^q\sim x^p\ (x\to+0)$, $\therefore$ 当 $p>-1$ 时 I_1 收敛，当 $p\leqslant-1$ 时 I_1 发散.

对 I_2: $\because x^p|1-x|^q\sim|1-x|^q\ (x\to1)$, $\therefore$ 当 $q>-1$ 时 I_2 收敛，当 $q\leqslant-1$ 时 I_2 发散.

对 I_3: $\because x^p|1-x|^q\sim x^{p+q}\ (x\to+\infty)$, $\therefore$ 当 $p+q<-1$ 时 I_3 收敛，当 $p+q\geqslant-1$ 时，I_3 发散.

结论. 当 $p>-1$, $q>-1$, $p+q<-1$ 时 $\int_0^{+\infty}x^p|1-x|^q dx$ 收敛，其他情形都发散.

(4) $$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=I_1+I_2.$$

对 I_1: $\because x^{p-1}e^{-x}\sim x^{p-1}\ (x\to+0)$, $\therefore$ 当 $p-1>-1$ 即 $p>0$ 时 I_1 收敛，当 $p\leqslant0$ 时 I_1 发散.

对 I_2: $\because \lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{p-1}e^{-x}=0$, $\therefore$ 对任何 p, $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

结论：当 $p>0$ 时 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛，当 $p\leqslant0$ 时发散.

809. 研究 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\ (\alpha>0)$ 的绝对收敛和条件收敛.

［解］ $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx=I_1+I_2.$$

对 I_1: $\because \frac{\sin x}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-1}}\ (x\to0)$, $\therefore$ 当 $\alpha-1<1$(即 $\alpha<2$) 时 I_1, 收敛.

对 I_2: 当 $\alpha>1$ 时，$\because \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$，$\therefore I_2$ 绝对收敛．当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，$\because$ 对任何 $A>1$，$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|\leqslant2$，并且 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $[1,+\infty)$ 内单调减少，$\frac{1}{x^\alpha}\to0\ (x\to+\infty)$，$\therefore$ 由狄利克雷判别法得 I_2 收敛．又

$$\because\quad \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}=\frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}=\frac{1}{2x^\alpha}-\frac{\cos 2x}{2x^\alpha},$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}dx\ (0<\alpha\leqslant1)$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha}dx$ 收敛（狄利克雷判别法），所以 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx$ 发散 $(0<\alpha\leqslant1)$．

结论：对 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\ (\alpha>0)$，当 $1<\alpha<2$ 时为绝对收敛，当 $0<\alpha\leqslant1$ 时为条件收敛．

810．研究积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ 的绝对收敛和条件收敛．

［解］　对任何 $A>0$，$\left|\int_0^A\cos x\,dx\right|\leqslant2$，并且 $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调，$\frac{\sqrt{x}}{x+100}\to0\ (x\to+\infty)$，由狄利克雷判别法，得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ 收敛．

再考虑 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}dx$，

$$\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\geqslant\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}=\frac{\sqrt{x}}{2(x+100)}+\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(x+100)},$$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(x+100)}dx$ 收敛（利用狄利克雷判别法），$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(x+100)}dx$ 发散，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}dx$ 发散．

得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ 是条件收敛．

811．设 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$．证明：当 $\alpha>1$ 并且 $\alpha>\beta$ 时 I 收敛，其他情形都发散．

［证］ 当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^{\alpha}\sin^{\beta}t}\quad(\text{令 } x=n\pi+t)$$

$$\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+\pi)^{\alpha}t^{\beta}}\quad(\because|\sin t|\leqslant|t|)$$

$$\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\frac{dt}{1+(n\pi+\pi)^{\alpha}t^{\beta}}\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\frac{dt}{1+(n\pi+\pi)^{\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)\pi}\right]^{\beta}}$$

$$\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

$\therefore$ 当 $\alpha\leqslant\beta$ 时 I 发散. 当 $\alpha<1$ 时由于 $\frac{1}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}\geqslant\frac{1}{1+x^{\alpha}}$，而 $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}}$ 发散，故 I 亦发散.

当 $\alpha>\beta>1$ 时，

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}+\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}\right].$$

在右端括号内的两个积分中，分别令 $x=n\pi+t$ 和 $x=(n+1)\pi-t$. 得

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^{\alpha}\sin^{\beta}t}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+[(n+1)\pi-t]^{\alpha}\sin^{\beta}t}$$

$$=I_1+I_2.$$

利用不等式 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x$, $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，有

$$I_1\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^{\alpha}\left(\frac{2}{\pi}t\right)^{\beta}}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\left[(n\pi)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{2}{\pi}t\right]^{\beta}}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2(n\pi)^{\frac{\alpha}{\beta}}}\int_{0}^{+\infty}\frac{ds}{1+s^{\beta}}\quad\left(\text{令 } s=(n\pi)^{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{2}{\pi}t\right)$$

因为 $\beta>1$，所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{ds}{1+s^{\beta}}$ 收敛. 又 $\because\frac{\alpha}{\beta}>1$，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ 收敛. 这样便得到了 I_1 收敛. 同样证明 I_2 也收敛.

当 $\alpha>1$ 并且 $\alpha>\beta$ 时，总可取 $\beta'\geqslant\beta$，使 $\alpha>\beta'>1$，这时

$$I\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}.$$

再由刚才的证明知道右端的积分收敛，故 I 亦收敛。

812. 求下列收敛的广义积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ （n 是自然数）；

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$；

(3) $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ （$a<b$）；

(4) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

［解］ (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$ （令 $x=\sin t$）

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数},\\[2mm] \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}, & \text{当 } n \text{ 是奇数},\end{cases}$$

（参见第 753 题）.

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

(3) 令 $t=\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}$，则 $x=\dfrac{b+at^2}{1+t^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\dfrac{1+t^2}{(b-a)t}$，

$$dx=\frac{2(a-b)t}{(1+t^2)^2}dt.$$

$$\therefore\quad\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=-2\int_{+\infty}^0\frac{dt}{1+t^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}2\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^A=\pi.$$

(4) 令 $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，则 $x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1}$，$dx=\dfrac{-4t}{(t^2+1)^2}dt$，$\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2t}{t^2+1}$，

$$\therefore\quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{3t^2+1}dt=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{A\to+\infty}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}t\Big|_0^A=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

813. 求下列收敛的广义积分：

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^a}}\quad(a>0)$；

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad$（$n$ 是正整数，$n>1$）；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+be^x)^2}\quad(a,\ b>0)$；

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx.$

［解］ (1) 令 $\sqrt{1+x^a}=t$，则 $x^a=t^2-1$，$ax^{a-1}dx=2t\,dt$。

$$\therefore\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^a}}=\frac{2}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{2}{a}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^A=-\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2}{a}\ln(\sqrt{2}+1).$$

(2) 由公式

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\quad（参见第 635 题），$$

得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\lim_{A\to+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\Big|_0^A$$

$$+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}=\cdots$$

$$=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^A=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}}.$$

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+be^x)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{(ae^{-x}+b)^2}dx.$

令 $ae^{-x}+b=t$，则 $e^{-x}=\frac{t-b}{a}$，$-ae^{-x}dx=dt$.

$$\therefore\quad I=-\frac{1}{a^2}\int_{a+b}^{b}\frac{t-b}{t^2}dt=\frac{1}{a^2}\int_b^{a+b}\left(\frac{1}{t}-\frac{b}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\ln t+\frac{b}{t}\right]\Big|_b^{a+b}=\frac{1}{a^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)-\frac{1}{a(a+b)}.$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$. 在右端第一个积分中，令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_{+\infty}^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt,$$

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0.$$

814. 求下列收敛的广义积分:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx\quad(a>b>0)$;

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}+3}$;　　(4) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^n dx$.

［解］ (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^A$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^A=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}.$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+a^2}-\frac{x}{x^2+b^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\Big|_0^A=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{a}{b}.$

(3) 令 $t=e^x$, 则 $dx=\frac{1}{t}dt$,

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}+3}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+2t^{-1}+3}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+2)(t+1)}=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{t+1}{t+2}\Big|_0^A=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^n dx=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}x^n de^{-ax}=-\frac{1}{a}\lim\limits_{A\to+\infty}x^ne^{-ax}\Big|_0^A$

$+\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^{n-1}dx$

$=\frac{n}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^{n-1}dx=\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^{n-2}dx=\cdots$

$=\frac{n!}{a^n}\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{n!}{a^{n+1}}\lim\limits_{A\to+\infty}e^{-ax}\Big|_0^A=\frac{n!}{a^{n+1}}.$

815. 求 $I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$, $J=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx\ (a>0)$.

[解一] $I=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\sin bx\,de^{-ax}=-\frac{1}{a}\lim\limits_{A\to+\infty}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^A$

$+\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{b}{a}J.$

$J=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\cos bx\,de^{-ax}=-\frac{1}{a}\lim\limits_{A\to+\infty}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^A$

$-\frac{b}{a}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}I,$

解得: $I=\frac{b}{a^2+b^2},\quad J=\frac{a}{a^2+b^2}.$

[解二] $J+iI=\int_0^{+\infty}e^{-ax}(\cos bx+i\sin bx)\,dx$

$=\int_0^{+\infty}e^{(-a+ib)x}dx=\frac{1}{-a+ib}\lim\limits_{A\to+\infty}e^{(-a+ib)x}\Big|_0^A$

$$=\frac{1}{-a+ib}\lim_{A\to+\infty}e^{-ax}(\cos bx+i\sin bx)\Big|_0^A$$

$$=\frac{-1}{-a+ib}=\frac{a+ib}{a^2+b^2},$$

$$\therefore\quad I=\frac{b}{a^2+b^2},\quad J=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

816. 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

［解］ 0是奇点．对任何$0<\alpha<1$有

$$\lim_{x\to+0}x^\alpha\ln\sin x=0$$

所以该积分收敛.

令$x=2t$，得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cdot\cos t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)\,dt$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt\right).$$

在右端最后的一个积分中令$t=\frac{\pi}{2}-u$，得

$$I=2\left(\frac{\pi}{4}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,du\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,$$

$$\therefore\quad I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

817. 求下列收敛的广义积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2dx$;

(3) $\int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\,dx$;　　(4) $\int_0^{\pi}x\ln\sin x\,dx$

[解] (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \ln \sin x$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} x \ln \sin x \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad \text{(参见第 816 题)}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d \operatorname{ctg} x = -\lim_{\varepsilon \to +0} x^2 \operatorname{ctg} x \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x \, dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \pi \ln 2 \quad \text{(参见本题 (1))}.$$

(3) $\int_0^{\pi} \ln(1+\cos x) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi} \ln \cos \frac{x}{2} dx$

$$= \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t \, dt \quad \left(\text{令 } t = \frac{x}{2}\right)$$

$$= \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du \quad \left(\text{令 } t = \frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$= -\pi \ln 2 \quad \text{(参见第 816 题)}.$$

(4) $I = \int_0^{\pi} x \ln \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) \ln \sin t \, dt \quad (\text{令 } x = \pi - t)$

$$= \pi \int_0^{\pi} \ln \sin dt - \int_0^{\pi} t \ln \sin t \, dt,$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du\right) \quad (\text{后一式中令 } t = \pi - u)$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} \ln 2 \quad \text{(参见第 816 题)}.$$

818. 称 $m(f) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t) \, dt}{x}$ 是函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上的平均值(中值)，求下列函数在 $[0, +\infty)$ 上的平均值.

(1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(\sqrt{2}\, x)$；　(2) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

［解］ (1) $\int_0^x\left[\sin^2 t+\cos^2(\sqrt{2}\ t)\right]dt$

$$=\int_0^x\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{1+\cos 2\sqrt{2}\,t}{2}\right)dt$$

$$=x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 2\sqrt{2}\,x}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad m(f)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 2\sqrt{2}\,x}{4\sqrt{2}}\right)=1.$$

(2) $\int_0^x \operatorname{arc\,tg} t\,dt=t\cdot\operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt=x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$\therefore\quad m(f)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

819. 求极限 $\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$，其中 $\alpha>0$，$f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

［解］ 利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+0}x^\alpha\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\lim_{x\to+0}\frac{-\int_1^x\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt}{x^{-\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha x^{-(\alpha+1)}}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{\alpha}=\frac{f(0)}{\alpha}.$$

820. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 连续，并且对任何 $A>0$，$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,\ b>0).$$

并利用这一结果求

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\quad(a>0,\ b>0).$$

［证］ $I=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx\right]$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{a\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\right]\quad（分别令 t=ax 和 t=bx）$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dt}{t}\quad（利用中值定理，其中 \xi 在 a\varepsilon 和 b\varepsilon 之间）$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad（\because f(x) 在 x=0 连续）$$

利用上面结果立即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}.$$

821. 证明 $\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln a\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}$，其中 $a>0$，函数 f 在 $[0,+\infty)$ 连续，并且上面的广义积分收敛.

［分析］ 将 $\ln x$ 写为 $\ln a\cdot\frac{x}{a}=\ln a+\ln\frac{x}{a}$，左端积分化为

$$\ln a\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}+\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx,$$

证明第二个积分为零，亦即证明 $\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx=0$.

［证］ $\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln a\cdot\frac{x}{a}}{x}dx$

$$=\ln a\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}+\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx.$$

在右端第二个积分中，

$$\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx=\int_0^{a}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx$$

$$+\int_a^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}dx$$

在后一式中令 $\frac{x}{a}=\frac{a}{t}$，则

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}\,dx=\int_a^0 f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln\frac{t}{a}}{t}\,dt$$

$$=-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln\frac{t}{a}}{t}\,dt$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln\frac{x}{a}}{x}\,dx=0$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}$$

822. 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，问是否一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

［解］ 不一定．例如积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ 是收敛的（参见第 807 题），但当 $x\to+\infty$ 时，$\sin(x^2)$ 不趋于零．

823. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 内有连续的导数，并且

$$|f'(x)|\leqslant M\quad (x\in[a\ \ +\infty))$$

又设 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$，证明 $f(x)\to0(x\to+\infty)$．

［证］ $\because$ $|f'(x)f(x)|\leqslant M|f(x)|$，$x\in[a,\ +\infty)$ 以及

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<\infty,\quad \therefore\ \int_a^{+\infty} f'(x)f(x)\,dx$$

收敛．另一方面

$$\int_a^{+\infty} f'(x)f(x)\,dx=\int_a^{+\infty} f(x)\,df(x)=\frac{1}{2}f^2(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$\therefore$ 当 $x\to+\infty$ 时 $f^2(x)$ 的极限存在，设它是 l．很明显 $l\geqslant0$，则

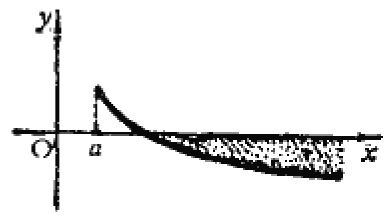
$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=\sqrt{l}.$$

下面证明 $l=0$．设 $l\neq0$，则存在 $A>0$，当 $x>A$ 时，有 $|f(x)|>\frac{\sqrt{l}}{2}$，于是 $\int_A^{+\infty}|f(x)|dx>\frac{\sqrt{l}}{2}\int_A^{+\infty}dx=\infty$，与 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$ 矛盾，所以 $l=0$．

324. 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 内的单调函数，并且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

[分析] 可先设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内单调减少，由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，可以断言 $f(x)\geqslant 0$, 否则的话，如图所示，将有



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=-\infty.$$

再考虑 $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$. 一方面由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=0$; 另一方面由于 $f(x)$ 单调减少非负，所以

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant f(x)\cdot\int_{\frac{x}{2}}^{x} dt=\frac{1}{2}xf(x),$$

这样便获得证明.

[证] 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内单调减少，首先证明 $f(x)\geqslant 0$. 采用反证法. 设存在 $x_0\in[a, +\infty)$ 使 $f(x_0)<0$, 那么对任何 $x>x_0$ 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$, 故对任何 $A>x_0$ 有

$$\int_{x_0}^{A} f(x)dx\leqslant f(x_0)\int_{x_0}^{A} dx\to-\infty \quad (A\to+\infty),$$

但这与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾. 所以对一切 $x\in[a, +\infty)$ 都有 $f(x)\geqslant 0$.

再证明结论. 对充分大的 x, 由于 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内单调减少并且非负，所以有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} dt=\frac{1}{2}xf(x)\geqslant 0.$$

另一方面，由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=0$.

将上面的两个式子联系起来便得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内是单调增加的，考虑 $F(x)=-f(x)$ $(x\in[a, +\infty))$, 那么 F 在 $[a, +\infty)$ 内是单调减少的，并且

$$\int_a^{+\infty} F(x)\,dx = -\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛．由刚才已经证明的结果得

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x)=0,\quad 即\quad \lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

［说明］ 如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 不单调，即使 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，也不能保证当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 必趋于 0．例如

$$f(x)=\begin{cases} n, & n\leqslant x<n+\dfrac{1}{n^3} \\ 0, & n+\dfrac{1}{n^3}\leqslant x<n+1 \end{cases}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots),$$

容易验证 $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，但当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不趋于 0．

825．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内有界，问 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ 是否收敛？

［解］ 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 绝对收敛，那么由

$$|f(x)g(x)|\leqslant M|f(x)|,$$

其中
$$|g(x)|\leqslant M\quad (x\in[a, +\infty)),$$

得知 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 亦绝对收敛．

如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 是条件收敛，那么 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ 可能发散，例如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\ g(x)=\sin x,$$

由第 809 题知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 收敛，但 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ 发散．

826．设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内单调减少，并且非负．证明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$ 同时收敛或同时发散

［证］ 由 $f(x)\sin^2 x\leqslant f(x)$ 知，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 亦收敛．

再证若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散，

$$\because\quad \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\sin^2 x\,dx$$

又 $\because$

$$\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\sin^2 x\,dx \geqslant f[a+(n+1)\pi]\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$= f[a+(n+1)\pi]\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx \geqslant \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f[a+(n+1)\pi]$$

另一方面

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\,dx$$

$$\because\quad \int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\,dx \leqslant f(a+n\pi)\pi$$

$$\therefore\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \pi\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n\pi)$$

这样便得到，若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx = +\infty$。

827. 利用积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$，求：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$；

(3) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos xt\,dx$.

［解］ (1) $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty}(1-\cos x)\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x}(1-\cos x)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 dt \quad \left(令\ x=\frac{t}{2}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

(3) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos xt\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin x(1+t)}{x}+\frac{\sin x(1-t)}{x}\right]dx,$

$$\because\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x(1+t)}{x}dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}, & t>-1,\\ 0, & t=-1,\\ -\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\frac{\pi}{2}, & t<-1,\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x(1-t)}{x}dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}, & t<1,\\ 0, & t=1,\\ -\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\frac{\pi}{2}, & t>1,\end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos xt\,dx=\begin{cases}0, & |t|>1,\\ \frac{1}{2}, & |t|=1,\\ 1, & |t|<1.\end{cases}$$

828. 已知: $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 求: $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x^2}dx$ (n 是正整数).

[解] $I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-1}de^{-x^2}$

$$=-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-2}e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}I_{n-2}.$$

当 n 为奇数时, 设 $n=2k+1$, 则

$$I_n=k(k-1)\cdots2\cdot1I_1=k!\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{k!}{2}.$$

当 n 为偶数时, 设 $n=2k$, 则

$$I_n=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdots\frac{1}{2}I_0=\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2^k}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.$$

829. 求下列发散的广义积分的主值:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$;　　　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$.

[解] (1) $$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-A}^{A}=0.$$

(2) $$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_{-A}^{A}$$
$$=\lim_{A\to+\infty}[\operatorname{arc\,tg}A-\operatorname{arc\,tg}(-A)]=\pi.$$

830. 求下列发散的广义积分的主值:

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$; (2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}$.

[解] (1) $$\text{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=0.$$

(2) $$\text{P.V.}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}\right)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{0}^{1-\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{+\infty}\right)=0.$$

831. 求下列发散的广义积分的主值:

(1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$; (2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

[解] (1) 被积函数有两个奇点 $x=1$ 和 $x=2$.

$$\text{P.V.}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left[\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right.$$
$$\left.+\int_{2+\eta}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right]$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{0}^{1-\varepsilon}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{2-\eta}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{2+\eta}^{+\infty}\right]$$
$$=-\ln 2+\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)=-\ln 2.$$

(2) $$\text{P. V.}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|\ln x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}+\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|.$$

利用洛必达法则求得

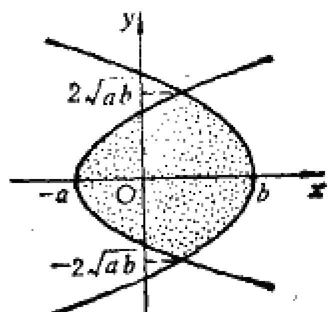
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-\frac{1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}=-1.$$

$$\therefore\quad \text{P. V.}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=0.$$

§5. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

832. 求两抛物线 $y^2=4a(x+a)$, $y^2=4b(b-x)$, $(a,\ b>0)$所围图形的面积.



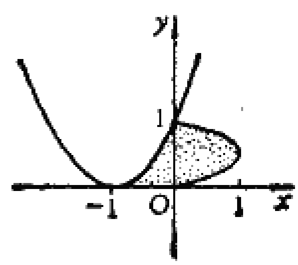
［分析］ 取变量 y 作为积分变量较方便.

［解］ 两抛物线交点的纵坐标是 $y=2\sqrt{ab}$ 和 $y=-2\sqrt{ab}$, 故

$$A=2\int_0^{2\sqrt{ab}}\left[\left(b-\frac{y^2}{4b}\right)-\left(\frac{y^2}{4a}-a\right)\right]dy$$

$$=2\left[(b+a)y-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2\sqrt{ab}}=\frac{8}{3}(a+b)\sqrt{ab}.$$

833. 求曲线 $y=(x+1)^2, x=\sin\pi y, y=0$ 所围成图形的面积.



［解］ $$A=\int_0^1[\sin\pi y-(\sqrt{y}-1)]dy$$

$$=-\frac{\cos\pi y}{\pi}\Big|_0^1+\left(y-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1$$

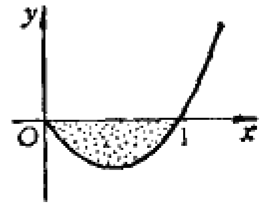
$$=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}.$$

834. 求曲线 $y=x\ln x$ 和 $y=0$ 所围图形的面积.

［解］ $A=\int_0^1|x\ln x|dx=-\int_0^1 \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}x^2\ln x\Big|_\varepsilon^1+\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}.$$

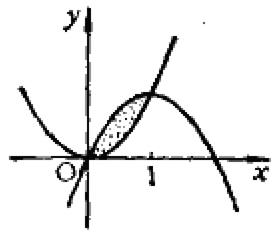


835. 求两抛物线 $y=-x^2+2x$, $y=x^2$ 所围图形的面积.

［解］ 两抛物线交点的横坐标是 $x=0$ 和 $x=1$, 故

$$A=\int_0^1[(-x^2+2x)-x^2]dx=\int_0^1(-2x^2+2x)dx$$

$$=\left(-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

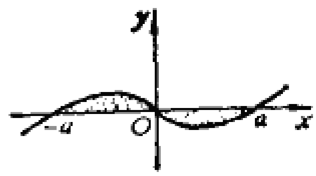


836. 求曲线 $a^2y=x(x^2-a^2)\,(a>0)$ 和 x 轴所围图形的面积.

［解］ 曲线关于原点 O 对称, 它和 x 轴的交点坐标是 $x=a$ 和 $x=-a$, 故

$$A=\frac{2}{a^2}\int_0^a x(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2}{a^2}\left(\frac{a^2}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}.$$



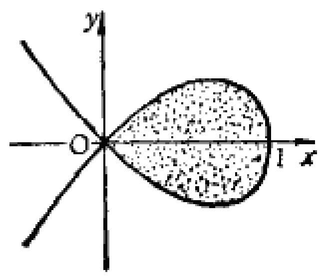
837. 求曲线 $y^2=x^2(1-x)$ 所围图形的面积.

［解］ 将曲线写成两支 $y=|x|\sqrt{1-x}$ 和 $y=-|x|\sqrt{1-x}$, 其图形如图所示, 故

$$A=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=-2\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}\,dx+2\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=2\left[\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$



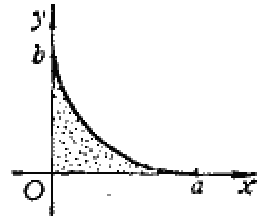
838. 求曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1\,(a,\ b>0)$ 和 x、y 轴所围图形的面积.

［解］ 曲线方程可以写为：

$$y=b\left(1-2\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{x}{a}\right)$$

$$\therefore\quad A=b\int_0^a\left(1-2\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{x}{a}\right)dx$$

$$=b\left(x-\frac{4}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}+\frac{x^2}{2a}\right)\Big|_0^a=\frac{ab}{6}.$$



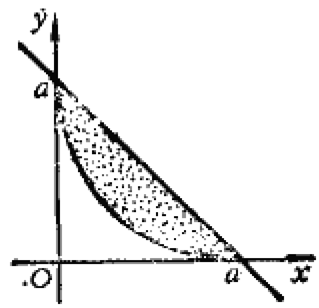
839. 求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 和直线 $x+y=a$ 所围图形的面积.

［解］ 曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 可写为 $y=a-2\sqrt{ax}+x$,

$$\therefore\quad A=\int_0^a\left[(a-x)-(a-2\sqrt{ax}+x)\right]dx$$

$$=2\int_0^a(\sqrt{ax}-x)\,dx$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{3}.$$

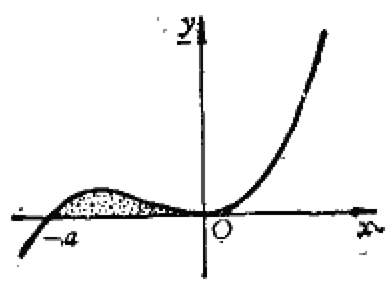


840. 求曲线 $a^2y=x^2(x+a)$ 和 x 轴所围图形的面积.

［解］ 曲线 $a^2y=x^2(x+a)$ 和 x 轴的交点的横坐标是 $x=0$ 和 $x=-a$, 故

$$A=\int_{-a}^0\frac{1}{a^2}x^2(x+a)\,dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Big|_{-a}^0=\frac{a^2}{12}.$$



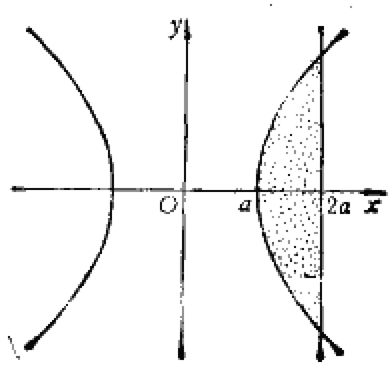
841. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和 $x=2a$ 所围图形的面积.

［解］ 双曲线可写为 $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, 故

$$A=2\int_a^{2a}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

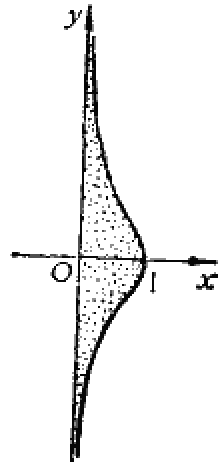
$$=\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]\Big|_a^{2a}$$

$$=\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]ab.$$



842. 求位于曲线 $y^2=\dfrac{1-x}{x}$ 与 y 轴之间的图形面积.

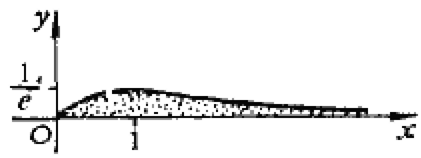
［解］ 曲线的方程可写为 $y=\pm\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\ (0<x\leqslant 1)$，故



$$A=2\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$$
$$=4\int_0^1\sqrt{1-x}\,d\sqrt{x}$$
$$=4\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt\quad(\text{令 } t=\sqrt{x})$$
$$=\pi.$$

843. 求位于曲线 $y=xe^{-x}(x\geqslant 0)$ 和 x 轴之间的图形面积.

［解］ $A=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx.$

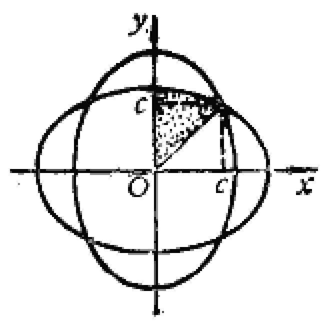


因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(xe^{-x})=0$，所以积分是收敛的，故

$$A=\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x\,de^{-x}=\lim_{B\to+\infty}(-xe^{-x})\Big|_0^B+\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$$
$$=\lim_{B\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^B=1.$$

844. 求两椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqslant 1$ 的公共部分的面积.

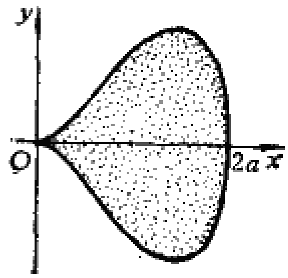
［解］ 两椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 在第一象限内的交点是 (c,c)，其中 $c=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由对称性，所求面积 A 等于图中阴影部分面积的 8 倍，即



$$A=8\int_0^c\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-x\right)dx=\frac{4b}{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^c-4c^2$$
$$=4ab\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

845. 求曲线 $a^2y^2=x^3(2a-x)\ (a>0)$ 所围图形的面积.

[解]　曲线的方程可写为 $y=\pm\frac{x}{a}\sqrt{2ax-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 2a$. 故



$$A=2\cdot\frac{1}{a}\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

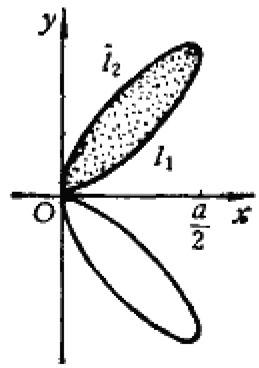
$$=\frac{2}{a}\int_{-a}^{a}(t+a)\sqrt{a^2-t^2}\,dt\quad(令\ x-a=t)$$

$$=4\int_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,dt\quad\left(\because\ \int_{-a}^{a}t\sqrt{a^2-t^2}\,dt=0\right)$$

$$=\pi a^2\quad\left(\because\ \int_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,dt\ 等于半径为\ a\ 的圆面积的\frac{1}{4}\right).$$

846. 求曲线 $y^4-axy^2+x^4=0\ (a>0)$ 所围图形的面积.

[解]　其图形在第一象限和第四象限内,关于 x 轴是对称的. 在第一象限内,曲线由 l_1 和 l_2 组成, l_1 和 l_2 的方程分别是:



l_1: $y_1^2=\frac{x}{2}(a-\sqrt{a^2-4x^2})$, $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$,

l_2: $y_2^2=\frac{x}{2}(a+\sqrt{a^2-4x^2})$, $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$,

故

$$A=2\int_0^{\frac{a}{2}}(y_2-y_1)\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}(y_2^2-2y_1y_2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{ax-2x^2}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{a^2}{16}-\left(x-\frac{a}{4}\right)^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}}\sqrt{\frac{a^2}{16}-t^2}\,dt\quad\left(令\ x-\frac{a}{4}=t\right)$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-t^2}\,dt=4\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^2.$$

847. 求椭圆 $ax^2+2bxy+cy^2=1\ (c>0,\ b^2-ac<0)$ 的面积.

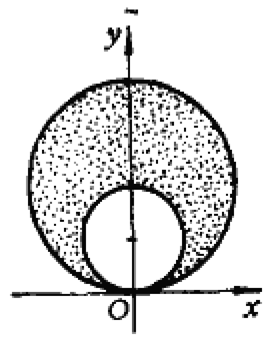
［解］ 上述椭圆由上半椭圆$y_2=\dfrac{-bx+\sqrt{c-(ac-b^2)x^2}}{c}$和下半椭圆$y_1=\dfrac{-bx-\sqrt{c-(ac-b^2)x^2}}{c}$组成$\left(-\alpha\leqslant x\leqslant\alpha,\ \alpha=\sqrt{\dfrac{c}{ac-b^2}}\right)$，

$$A=\int_{-\alpha}^{\alpha}(y_2-y_1)\,dx=\frac{2}{c}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{c-(ac-b^2)x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{c\sqrt{ac-b^2}}\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}\sqrt{c-t^2}\,dt\quad(令\ t=\sqrt{ac-b^2}x)$$

$$=\frac{2}{c\sqrt{ac-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}c=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

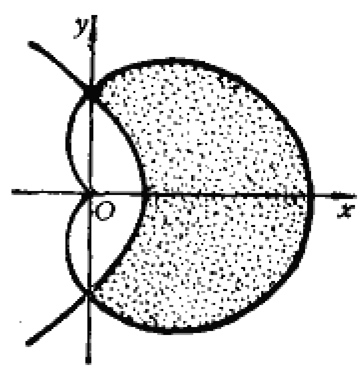
848. 求两圆 $r=6\sin\theta$, $r=12\sin\theta$ 之间图形的面积.



［解］ $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}[(12\sin\theta)^2-(6\sin\theta)^2]d\theta$

$$=108\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=27\pi.$$

849. 求心脏线 $r=2a(1+\cos\theta)$ 内部并位于曲线 $r=\dfrac{2a}{1+\cos\theta}$ $(a>0)$ 右侧的图形面积.



［解］ $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{[2a(1+\cos\theta)]^2-\left(\frac{2a}{1+\cos\theta}\right)^2\right\}d\theta$

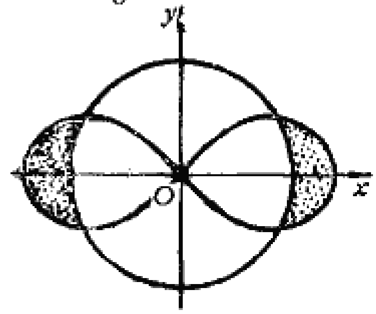
$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta-a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4a^2\left(\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}\right)-2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\varphi\,d\varphi=3\pi a^2+4a^2-2a^2$$

$$=(3\pi+2)a^2.$$

850. 求双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 之内并位于圆 $r=a$ 之外的图形的面积.

［解］ 两曲线在第一象限内的交点的 θ 坐标是 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 故



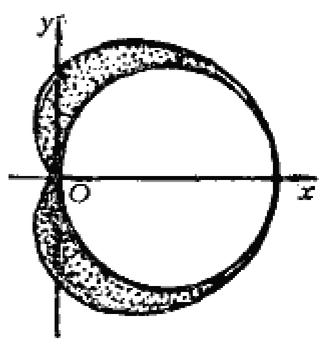
$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos 2\theta-a^2)\,d\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta-1)\,d\theta$$

$$=a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$

851. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 和圆 $r=2a\cos\theta$ 之间的图形面积.

［解］ 因为圆 $r=2a\cos\theta$ 的面积是 πa^2, 所以



$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta-\pi a^2$$

$$=a^2\int_0^{\pi}4\cos^4\frac{\theta}{2}\,d\theta-\pi a^2$$

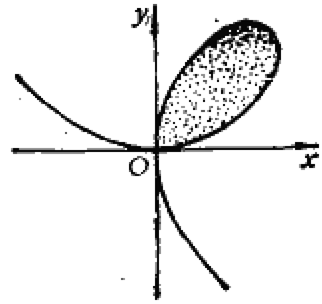
$$=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-\pi a^2\quad\left(令\ t=\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=8a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\pi a^2=\frac{\pi a^2}{2}.$$

852. 求笛卡尔叶形线 $x^3+y^3-3axy=0\,(a>0)$ 所围图形的面积.

［分析］ 将笛卡尔叶形线用极坐标表示将带来方便.

［解］ 利用极坐标.



令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$

代入方程得笛卡尔叶形线的极坐标方程为

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$$

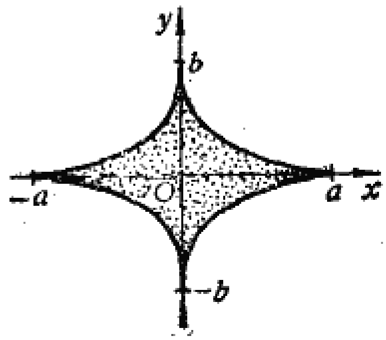
所围成的极角从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 故

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,d\theta=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos^2\theta(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}\,d\theta=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}\,d\operatorname{tg}\theta$$

$$=\frac{9}{2}a^2\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{tg}^3\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=-\frac{3}{2}a^2\lim_{B\to\frac{\pi}{2}}\left.\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}\right|_0^B=\frac{3}{2}a^2.$$

853. 求星形线 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1\ (a,\ b>0)$ 所围图形的面积.



[分析] 将星形线用参数方程表示将更方便.

[解] 令 $x=a\cos^3 t$，则得星形线的参数方程为

$x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，

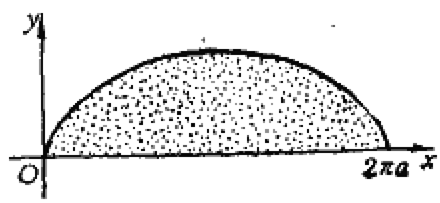
故

$$A=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0(b\sin^3 t)(-3a\sin t\cos^2 t)\,dt$$

$$=12ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=12ab\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right)$$

$$=12ab\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi ab.$$

854. 求旋轮线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 和 x 轴所围图形的面积.



[解] $A=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,dt$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt$$

$$=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi=16a^2\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2.$$

855．求：(1) 半径为 a 的圆面积；(2) 长轴和短轴分别为 $2a$ 和 $2b$ 的椭圆面积.

［解］ (1) 用极坐标，圆方程是 $r=a$，

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\,d\theta=\pi a^2.$$

(2) 用参数方程，椭圆的参数方程是 $x=a\cos t$，$y=b\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

$$\therefore\quad A=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t\,(-a\sin t\,dt)$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\pi ab.$$

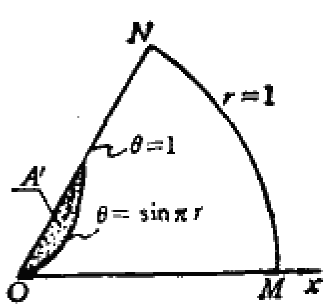
856．求椭圆渐屈线 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$，$y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t\quad (a>b>0,\ c=\sqrt{a^2-b^2}\,)$ 所围图形的面积.

［解］ $A=4\int_0^{\frac{c^2}{b}}x\,dy=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$

$$=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t-\cos^6 t)\,dt$$

$$=\frac{12c^4}{ab}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

857．在极坐标系内，求由曲线 $\theta=\sin\pi r\,(0\leqslant r\leqslant 1)$，圆弧 $r=1$ 以及射线 $\theta=0$，$\theta=1$ 所围图形的面积.



［分析］ 先作出该图形的草图. $r=1$ 以及射线 $\theta=0$，$\theta=1$ 是容易画出的. 对 $\theta=\sin\pi r$，当 r 从 0 单调增加到 $\frac{1}{2}$ 时，θ 从 0 增加到 1；当 r 从 $\frac{1}{2}$ 增加到 1 时，θ 从 1 又回到 0. 曲线 $\theta=\sin\pi r\left(0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 和曲线 $\theta=\sin\pi r\left(\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1\right)$ 是同一个图象. 这样便可画出所围图形.

［解］ 扇形 OMN 的面积为 $\frac{1}{2}$. 图中阴影部分的面积

$$A'=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} r^2 d(\sin\pi r)=\frac{1}{2}\left(r^2\sin\pi r\Big|_0^{\frac{1}{2}}-2\int_0^{\frac{1}{2}} r\sin\pi r\,dr\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r\,d\cos\pi r=\frac{1}{8}+\frac{1}{\pi}\left(r\cos\pi r\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi r\,dr\right)$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi r\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}.$$

故所求图形的面积

$$A=\frac{1}{2}-A'=\frac{3}{8}+\frac{1}{\pi^2}.$$

858. 在极坐标中，求封闭曲线 $r=\frac{2at}{1+t^2}$, $\theta=\frac{\pi t}{1+t}$ $(t\geqslant 0)$ 所围图形的面积.

［解］ 当 $t=0$ 时, $\theta=0$, $r=0$; 当 $t\to+\infty$ 时 $\theta\to\pi$, $r\to 0$, 故所求面积

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2at}{1+t^2}\right)^2 d\left(\frac{\pi t}{1+t}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{4a^2\pi t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}\,dt$$

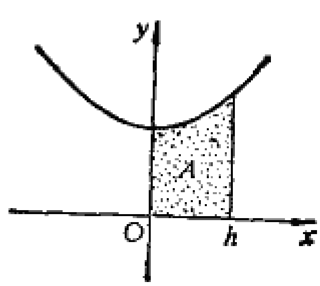
$$=2\pi a^2\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right)\right]^2 dt$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2t}{(1+t^2)^2}-\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right]dt$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^2}-\operatorname{arc\,tg} t-\frac{1}{1+t}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi a^2}{4}(4-\pi).$$

(2) 平面曲线的弧长

859. 求悬链线 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 在 $0\leqslant x\leqslant h$ 之间的弧长 L $(a>0,\ h>0)$，并证明该悬链线和 $x=0, x=h, y=0$ 所围图形的面积 $A=aL$.



［解］ $L=\int_0^h\sqrt{1+y'^2}\,dx$

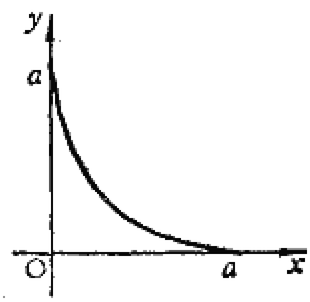
$$=\frac{1}{2}\int_0^h\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

$$=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_0^h=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h}{a}}\right).$$

$$A=\int_0^h y\,dx=\frac{a}{2}\int_0^h\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_0^h$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h}{a}}\right).$$
$$\therefore\quad A=aL.$$

860. 求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\quad(a>0)$ 的弧长.

[解]　曲线的方程可写为 $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\quad(0\leqslant x\leqslant a)$，故



$$L=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^a\frac{\sqrt{a-2\sqrt{ax}+2x}}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{a}}\sqrt{a-2\sqrt{a}\,t+2t^2}\,dt\quad(令\sqrt{x}=t)$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a}{4}+\left(t-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\sqrt{\frac{a}{4}+u^2}\,du\quad\left(令\,t-\frac{\sqrt{a}}{2}=u\right)$$
$$=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\left[u\sqrt{\frac{a}{4}+u^2}+\frac{a}{4}\ln\left(u+\sqrt{\frac{a}{4}+u^2}\right)\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}$$
$$=\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right]a.$$

861. 求抛物线 $y^2=2px\,(y\geqslant0)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a\,(a>0)$ 间的弧长.

[解一]　$y=\sqrt{2px}$，$y'=\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$.

$$L=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{2x+p}\,d\sqrt{2x}=\int_0^{\sqrt{2a}}\sqrt{t^2+p}\,dt\quad(令\sqrt{2x}=t)$$
$$=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+p}+p\ln(t+\sqrt{t^2+p})\right]\Big|_0^{\sqrt{2a}}$$
$$=\sqrt{a^2+\frac{ap}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a+p}}{\sqrt{p}}.$$

[解二]　抛物线方程可写为 $x=\dfrac{y^2}{2p}$，$0\leqslant y\leqslant\sqrt{2pa}$，取变量 x 作为积分变量，有

$$L=\int_0^{\sqrt{2pa}}\sqrt{1+x_y'^2}\,dy=\int_0^{\sqrt{2pa}}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{\sqrt{2pa}}\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2p}\left[y\sqrt{p^2+y^2}+p^2\ln\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right]\Big|_0^{\sqrt{2pa}}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{ap}{2}}+\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a+p}}{\sqrt{p}}.$$

862. 求曲线 $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\quad(1\leqslant y\leqslant e)$的弧长.

［解］ $x_y'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y}=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$,

$$L=\int_1^e\sqrt{1+x_y'^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^2}\,dy$$

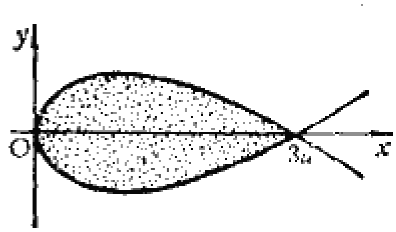
$$=\frac{1}{2}\int_1^e\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=\frac{1}{2}\left(\ln y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{1}{4}(1+e^2).$$

863. 求抛物叶形线 $9ay^2=x(x-3a)^2(a>0)$ 叶形部分的长度.

［解］ 叶形部分由下列两条曲线围成:

$$y=\sqrt{\frac{x}{a}}\left(a-\frac{x}{3}\right),\ y=-\sqrt{\frac{x}{a}}\left(a-\frac{x}{3}\right)\quad(0\leqslant x\leqslant 3a),\quad y'=\pm\frac{a-x}{2\sqrt{ax}};$$

$$\therefore\quad L=2\int_0^{3a}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$



$$=2\int_0^{3a}\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{4ax}}\,dx$$

$$=\int_0^{3a}\frac{x+a}{\sqrt{ax}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2ax^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^{3a}=4\sqrt{3}\,a.$$

864. 求星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t(a>0)$ 的全长.

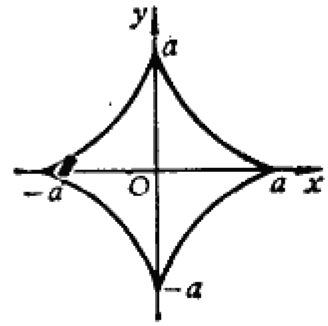
［解］ $x_t'=-3\cos^2 t\sin t,\ y_t'=3a\sin^2 t\cos t$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=4\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

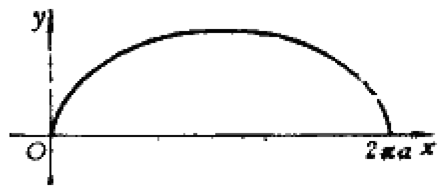
$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$$

$$=12a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$



865. 求旋轮线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

[解]　$x_t'=a(1-\cos t)$，$y_t'=a\sin t$.



$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=8a.$$

866. 证明椭圆 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ $(a,\ b>0)$ 的全长等于正弦曲线 $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\frac{x}{b}$ 的一个波长的长度.

[证]　记椭圆的全长为 L_1，正弦波一个波的长为 L_2，有

$$L_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

$$L_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_0^{2\pi b}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\frac{x}{b}}\,d\left(\frac{x}{b}\right)$$

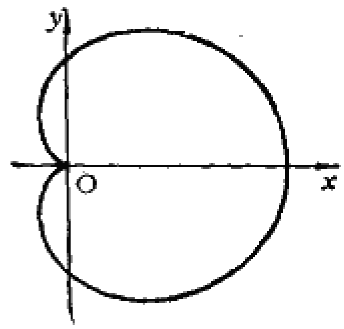
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt\quad\left(令\,t=\frac{x}{b}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt$$

在 L_2 中令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$L_2=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,(-dt)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=L_1.$$

867. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)\,(a>0)$ 的全长.



［解］ $r'_\theta=-a\sin\theta$,

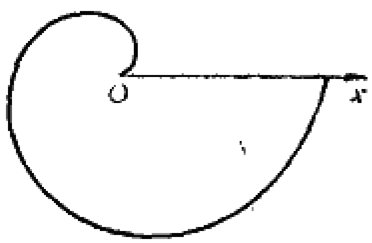
$$\sqrt{r^2+r'^2_\theta}=\sqrt{2}\,a\sqrt{1+\cos\theta},$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a.$$

868. 求阿基米得螺线 $r=a\theta$ 第一圈的弧长.



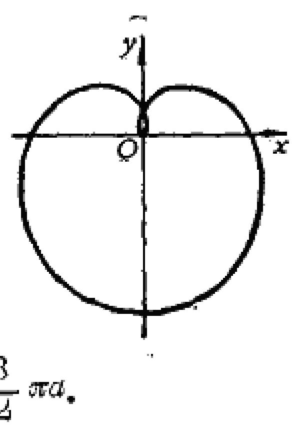
［解］ $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$=a\,\frac{1}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].$$

869. 求曲线 $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}\,(a>0)$ 的全长.



［解］ $r'_\theta=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2_\theta}=a\sin^2\frac{\theta}{3}.$$

又：当 $0\leqslant\theta\leqslant3\pi$ 时对应整个曲线，故

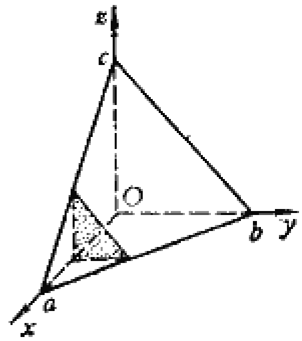
$$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta=3a\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{3}{2}\pi a.$$

(3) 体　　积

870. 求由平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围图形的体积.

［分析］ 用平面 $x=x_0$ 截此体积，其截口是一个三角形，截口的面积是容易求得的，从而可求得所要的体积.



［解］ $z=0$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的交线是 $y=b-\frac{b}{a}x$; $y=0$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的交线是 $z=c-\frac{c}{a}x$. 所以 $x=x_0$ 截此体积的截口面积为

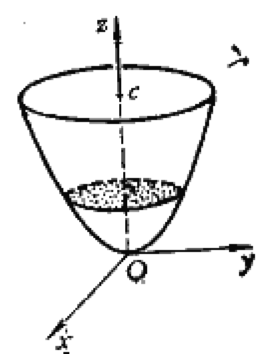
$$A(x_0)=\frac{1}{2}\left(c-\frac{c}{a}x_0\right)\left(b-\frac{b}{a}x_0\right),$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{2}\int_0^a\left(c-\frac{c}{a}x\right)\left(b-\frac{b}{a}x\right)dx=\frac{bc}{2a^2}\int_0^a(a-x)^2dx$$

$$=\frac{bc}{2a^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot a^3=\frac{1}{6}abc.$$

871. 求抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 和平面 $z=c(a,\ b,\ c>0)$ 所围空间图形的体积.

［分析］ $z=z_0\ (0<z_0\leqslant c)$ 在所给抛物面上的截口是椭圆，其长轴和短轴都容易求得，从而得到这一椭圆的面积，即可求出所要的体积.



［解］ $z=z_0$ 的截口是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z_0$, 即 $\frac{x^2}{2z_0a^2}+\frac{y^2}{2z_0b^2}=1$, 所以截口的面积为

$$A(z_0)=a\sqrt{2z_0}\cdot b\sqrt{2z_0}\,\pi=2\pi abz_0,$$

$$\therefore\quad V=\int_0^c 2ab\,\pi z\,dz=\pi abc^2.$$

872. 用微元分析的方法解释下列公式. 设 $y=y(x)$ 在 $[a,b]$ 连续、非负，那么由它和直线 $x=a$, $x=b$ 以及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转后生成的旋转体的体积是

$$V=2\pi\int_a^b xy\,dx.$$

［解］ 考虑在 x 处，高为 y 底边为 dx 的矩形绕 y 轴旋转后生成旋转体的体积 dV（即两同轴圆柱体之间的体积）有

$$dV=\pi(x+dx)^2y-\pi x^2y=2\pi xydx+\pi xy(dx)^2,$$

略去高阶无穷小 $(dx)^2$，得 $dV\sim 2\pi xy\,dx$. 将这些 dV 从 $x=a$ 到 $x=b$ 积累起来，便得到所求体积，即：

$$V=2\pi\int_a^b xy\,dx.$$

873. 用微元分析的方法解释下列公式. 如图 1 所示，在极坐标内，设 $r=r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续、非负，那么由 $r=r(\theta)$, $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围图形绕极轴旋转后生成的旋转体的体积 V 是

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

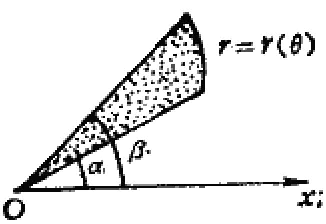


图 1

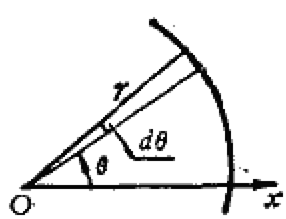


图 2

［解］ 考虑在 θ 处，夹角为 $d\theta$，半径为 r 的扇形绕 x 轴旋转后生成的旋转体的体积 dV（即两个同半径的球扇形之间体积），如图 2 所示，有

$$dV=\frac{2}{3}\pi r^2[r-r\cos(\theta+d\theta)]-\frac{2}{3}\pi r^2(r-r\cos\theta)$$

$$=-\frac{2}{3}\pi r^3[\cos(\theta+d\theta)-\cos\theta],$$

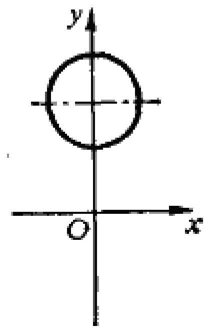
$$\because\quad \cos(\theta+d\theta)-\cos\theta=d\cos\theta=-\sin\theta\,d\theta,$$

$$\therefore \quad dV=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\,d\theta.$$

将 dV 从 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta$ 积累起来，便得到

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

874. 求车胎体积，即圆 $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转后生成的旋转体的体积.



［解］ 圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 由下列两条曲线组成:

$$y_2=b+\sqrt{a^2-x^2} \quad (上半圆)$$

和

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2} \quad (下半圆),$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad V&=\pi\int_{-a}^a y_2^2\,dx-\pi\int_{-a}^a y_1^2\,dx\\&=\pi\int_{-a}^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-a}^a(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx\\&=\pi\int_{-a}^a 4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

875. 求抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转和绕 y 轴旋转后生成的旋转体的体积.

［解］ 抛物线与 x 轴交点的横坐标是 $x=0$ 和 $x=2$，绕 x 轴旋转得

$$V_x=\pi\int_0^2 y^2\,dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2\,dx=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2$$
$$=\frac{16}{15}\pi.$$

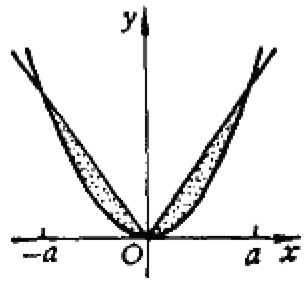
绕 y 轴旋转(参见第 872 题)，得

$$V_y=2\pi\int_0^2 xy\,dx=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)\,dx=2\pi\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}\pi.$$

876. 求曲线 $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$ 和 $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$ $(a>b>0)$ 所围图形绕 x 轴和绕 y 轴旋转后生成的旋转体的体积.

［解］ 两曲线的交点的横坐标为 $x=\pm a$ 和 $x=0$，当 $|x|\leqslant a$ 时，

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leqslant \left|\frac{x}{a}\right|,$$



所以绕 x 轴旋转得

$$V_x = 2\pi b^2 \int_0^a \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4}\right) dx$$

$$= 2\pi b^2 \left(\frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^5}{5a^4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{15}\pi a b^2.$$

绕 y 轴旋转(参见第 872 题),得

$$V_y = 2\pi b \int_0^a \left[x\frac{x}{a} - x\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] dx = 2\pi b \int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}\right) dx$$

$$= 2\pi a^2 b\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi a^2 b$$

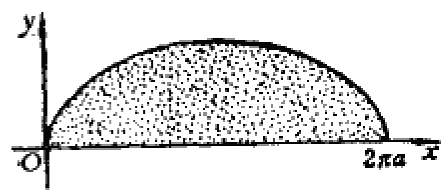
又考虑绕 y 轴旋转时也可以取变量 y 作为自变量,这时在第一象限内的两曲线方程分别为 $x = a\sqrt{\frac{y}{b}}$ 和 $x = \frac{a}{b}y$, 其交点的纵坐标是 $y=0$ 和 $y=b$.

$$\therefore \quad V_y = \pi \int_0^b \left[a^2\frac{y}{b} - \frac{a^2}{b^2}y^2\right] dy = \frac{\pi a^2}{b}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b}\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \pi a^2 b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\pi a^2 b.$$

877. 求旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 绕 x 轴和绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积.

[解] 绕 x 轴旋转得



$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 d(t - \sin t)$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt = 5\pi^2 a^3.$$

绕 y 轴旋转(参见第 872 题),得

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\, dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt$$

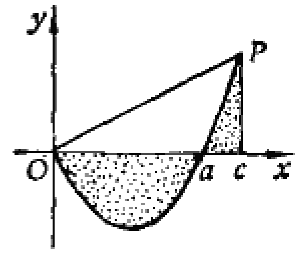
$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t\sin t)\, dt.$$

再由 $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ 以及

$$\int_0^{2\pi}\left(2t\cos t+\frac{t\cos 2t}{2}-\sin t+2\sin t\cos t-\cos^2 t\sin t\right)dt=0,$$

$$\therefore\quad V_y=2\pi a^3\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,t\,dt=6\pi^3a^3.$$

878. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 在横坐标 0 与 $c(0<a<c)$ 之间的弧段绕 x 轴旋转，问 c 为何值时，该旋转体的体积 V 等于弦 OP 绕 x 轴旋转所成锥体的体积.



［解］ $V=\pi\int_0^c x^2(x-a)^2dx$

$$=\pi\left(\frac{c^5}{5}-\frac{ac^4}{2}+\frac{a^2c^3}{3}\right),$$

锥体体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi c^2(c-a)^2\cdot c=\frac{\pi}{3}c^3(c-a)^2$,

$$V=V_1 \text{ 即 } \pi\left(\frac{c^5}{5}-\frac{ac^4}{2}+\frac{a^2c^3}{3}\right)=\frac{\pi}{3}c^3(c-a)^2,$$

$$c^4\left(\frac{2c}{5}-\frac{a}{2}\right)=0.$$

由于 $c>a>0$，故 $c=\frac{5}{4}a$. 所以当 $c=\frac{5}{4}a$ 时，旋转体的体积等于弦 OP 绕 x 轴旋转所成锥体的体积.

879. 把曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，它在点 $x=0$ 和 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$，求 a 为何值时，能使 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$.

［解］ $V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\xi^2}\frac{dt}{(1+t)^2}$　（令 $x^2=t$）

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right),$$

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}V(\xi),$$

也就是　$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right)=\frac{\pi}{4},$$

解得　$$a=1.$$

故当 $a=1$ 时， $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$.

880. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转后生成一旋转椭球体，把它沿 x 轴方向打一个穿心孔，圆孔的轴是 x 轴，求钻空的半径，使剩下的环形体积等于这一椭球体体积的一半.

［解］ 设椭球体体积与剩下的环形体体积分别为 V 和 V_1.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

设钻空的半径为 ρ. $y=\rho$ 与上半椭圆交于

$$\left(-a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}},\ \rho\right)\text{及}\left(a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}},\ \rho\right)$$

两点.

$$V_1=\pi\left[\int_{-a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{b^2}}}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx-2\rho^2a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{b^2}}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

要使 $V_1=\frac{1}{2}V$，须有

$$\frac{4}{3}\pi ab^2\left(1-\frac{\rho^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\pi ab^2,$$

从而得到 $$\rho=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}.$$

881. 设有一烧杯，其表面是由抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转抛物面. 杯内盛有高为 h 的液体. 问再加入 m 个体积单位的液体后，液面升高多少？

［解］ 设液面升高 δ，则

$$m=\pi\int_h^{h+\delta}y^2\,dx=2p\pi\int_h^{h+\delta}x\,dx=p\pi x^2\Big|_h^{h+\delta}=p\pi[(h+\delta)^2-h^2]$$

$$\therefore\quad \delta=\sqrt{h^2+\frac{m}{p\pi}}-h.$$

882. 求下列曲线绕极轴旋转后生成的旋转体的体积:

(1) 心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$;

(2) 阿基米得螺线 $r=a\theta$ $(a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

[解] (1) 利用第873题的结果,有

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

(2) $$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(a\theta)^3\sin\theta\,d\theta=\frac{2\pi a^3}{3}\left(-\theta^3\cos\theta\Big|_0^{\pi}+3\int_0^{\pi}\theta^2\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}\pi^3+2\pi a^3\left(\theta^2\sin\theta\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{2\pi^4a^3}{3}-4\pi a^3\left(-\theta\cos\theta\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{2\pi^4a^3}{3}-4\pi^2a^3=2\pi^2a^2\left(\frac{1}{3}\pi^2-2\right).$$

(4) 旋转曲面的面积

883. 求曲线 $y=e^x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转生成后的旋转曲面的面积.

[解] $y'=e^x$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+e^{2x}}$,

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_0^2 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$$=2\pi\int_1^{e^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\quad(\text{令 } t=e^x)$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]\Big|_1^{e^2}$$

$$=\pi\left[e^2\sqrt{1+e^4}+\ln(e^2+\sqrt{1+e^4})-\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right].$$

884. 求悬链线 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转后生成的旋转曲面的面积.

［解］ $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

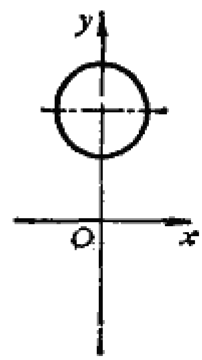
$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^2 (e^x+e^{-x})^2\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2(e^{2x}+e^{-2x}+2)\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x\right]\Big|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^4-e^{-4}+8).$$

885．求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转后生成旋转曲面的面积．

［解］ 圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 由两条曲线 $y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$（上半圆）和 $y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}$（下半圆）组成．故



$$S=2\pi\int_{-a}^{a} y_2\sqrt{1+y_2'^2}\,dx+2\pi\int_{-a}^{a} y_1\sqrt{1+y_1'^2}\,dx$$

$$\because\quad \sqrt{1+y_2'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{1+y_1'^2}$$

$$\therefore\quad S=4\pi\int_{-a}^{a} b\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=8\pi ab\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=8\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a=4\pi^2ab.$$

886．求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转后生成的椭球面的面积．

［解］ 需要分 $a\geqslant b$ 和 $a<b$ 两种情形．当 $a\geqslant b$ 时

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}$$

（其中 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率）．

$$\therefore\quad S=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

$$=4\pi\frac{b}{a}\frac{1}{e}\int_0^{ae}\sqrt{a^2-t^2}\,dt\quad(\text{令 } t=ex)$$

$$=4\pi\frac{b}{ae}\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\arcsin\frac{t}{a}\right]\Big|_0^{ae}$$

$$=2\pi b\sqrt{a^2-a^2e^2}+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a}{e}\arcsin e\right).$$

当 $a<b$ 时,

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2-a^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}$$

$$(\text{其中 } c=\sqrt{b^2-a^2}).$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}\,dx$$

$$=4\pi\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}\int_0^c\sqrt{a^2+t^2}\,dt\quad\left(\text{令 } t=\frac{c}{a}x\right)$$

$$=4\pi\frac{b}{c}\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{a^2+t^2}+a^2\ln(t+\sqrt{a^2+t^2})\right]\Big|_0^c$$

$$=2\pi b\sqrt{a^2+c^2}+2\pi\frac{ba^2}{c}\ln(c+\sqrt{a^2+c^2})-2\pi\frac{ba^2}{c}\ln a$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c}\ln\frac{b+c}{a}\right).$$

887. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,(a>0)$ 绕 x 轴旋转后生成的旋转曲面的面积.

[解] 将星形线用参数方程表示:

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi,$$

$$x'_t=-3a\cos^2 t\sin t,\ y'_t=3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=3a\sin t\cos t,$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^{\pi} y(t)\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

888. 求旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，绕下列直线旋转后生成的旋转曲面的面积:

(1) x 轴;　(2) y 轴;　(3) $y=2a$.

[解] (1) $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=2a\sin\frac{t}{2}$,

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y(t)\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\,du$$

$$=32\pi a^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{3}\pi a^2$$

(2) $S=2\pi\int_0^{2\pi}x(t)\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$

$$=8\pi a^2\int_0^{\pi}(2u-\sin 2u)\sin u\,du,$$

$$\because\quad \int_0^{\pi}u\sin u\,du=-u\cos u\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos u\,du=\pi.$$

$$\int_0^{\pi}\sin 2u\cdot\sin u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos u-\cos 3u)\,du=0$$

$$\therefore\quad S=16\pi^2a^2$$

(3) 作坐标变换 $x_1=x$, $y_1=y-2a$, 有

$$\sqrt{x_{1t}'^2+y_{1t}'^2}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^{2\pi}|y_1(t)|\sqrt{x_{1t}'^2+y_{1t}'^2}\,dt=4\pi a^2\int_0^{2\pi}|-\cos t-1|\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=-\frac{16}{3}\pi a^2\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

889. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 绕极轴旋转后生成的旋转曲面的面积.

[解] $\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\theta}{2}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,

$$y(\theta)=r(\theta)\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta=4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^{\pi}y(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-\frac{32}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

890. 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 绕下列直线旋转后生成的旋转曲面的面积：

(1) 极轴； (2) 轴 $\theta=\frac{\pi}{2}$； (3) 轴 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

［解］ (1) $\sqrt{r^2+r'^2}=\dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$,

$$y(\theta)=r(\theta)\sin\theta=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\therefore\quad S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}y(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $x(\theta)=r(\theta)\cos\theta=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\therefore\quad S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2.$$

(3) 将 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 作为新坐标的极轴，在新坐标下双纽线的方程为

$$r^2=a^2\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}},$$

$$y(\theta)=r(\theta)\sin\theta=a\sqrt{\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\sin\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0\right),$$

$$\therefore \quad S=2\cdot 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|y(\theta)|\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=4\pi a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|\sin\theta|\,d\theta$$

$$=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=4\pi a^2.$$

(5) 定积分在物理中的应用

891. 质点沿直线运动，运动速度为 $v(t)=5+0.1t^2$ (cm/s)，求从 $t=0$ 开始经过 50 秒后质点经过多少路程？

［解］ $S=\int_0^{50}v(t)\,dt=\int_0^{50}(5+0.1t^2)\,dt=\left(5t+\frac{1}{30}t^3\right)\Big|_0^{50}$

$=4416.7\,\text{cm}.$

892. 已知某轴长 10 米，线密度 $\rho(x)=6+0.3x$ (kg/m)，其中 x 是该点到轴的一个给定端点的距离．求轴的质量．

［解］ $m=\int_0^{10}\rho(x)\,dx=\int_0^{10}(6+0.3x)\,dx=\left(6x+\frac{0.3}{2}x^2\right)\Big|_0^{10}=75\,\text{kg}.$

893. 长为 a 的细直棒，棒上任一点的线密度与该点到棒的某一端点 O 的距离平方成正比．求该棒的质量和平均密度．



［解］ 由假设，线密度 $\rho(x)=kx^2$ (k 是比例常数)，所以质量为

$$m=\int_0^a\rho(x)\,dx=k\int_0^a x^2\,dx=\frac{k}{3}a^3.$$

平均密度为

$$\bar{\rho}=\frac{m}{a}=\frac{k}{3}a^2.$$

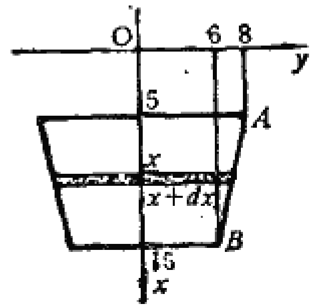
894. 一定质量的理想气体，在等温过程中体积从 v_a 膨胀到 v_b，计算在此过程中气体压强的平均值．

［解］ 设 p 是压强，v 是体积，那么在等温过程中有 $pv=C$，C 是常数，即 $p=\frac{C}{v}$．故压强的平均值为：

$$\bar{p}=\frac{1}{v_b-v_a}\int_{v_a}^{v_b}p\,dv=\frac{C}{v_b-v_a}\int_{v_a}^{v_b}\frac{dv}{v}$$
$$=\frac{C}{v_b-v_a}\ln v\Big|_{v_a}^{v_b}=\frac{C}{v_b-v_a}\ln\frac{v_b}{v_a}.$$

895. 求梯形板所受的水压力. 梯形板垂直于水面, 上底 16 m, 下底 12 m, 高 10 m, 上底离水平面 5 m.

［解］ 设 y 轴是水平面, 梯形板右边界的方程(即直线段 AB 的方程)是



$$y=-\frac{x}{5}+9,\ 5\leqslant x\leqslant 15$$

在 $[x,\ x+dx]$ 处截取板上一段微元, 其面积为 $2y\,dx=2\left(9-\frac{x}{5}\right)dx$. 在水深 x 处水压强是 x, 所以该微元所受的水压力是

$$2\left(9-\frac{x}{5}\right)x\,dx.$$

故整个梯形板所受压力为

$$2\int_5^{15}x\left(9-\frac{x}{5}\right)dx=2\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{x^3}{15}\right)\Big|_5^{15}=1366.7\text{t}.$$

896. 求半椭圆形板 $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{100}=1(x\geqslant 0)$ 所受水的压力. 该板垂直于水平面, 短轴在水平面上.

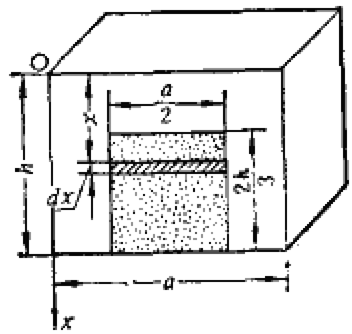
［解］ 椭圆的方程是 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{400-x^2}$, 在 $[x,\ x+dx]$ 处取椭圆板上一段微元, 其面积为 $2y\,dx=\sqrt{400-x^2}\,dx$. 在水深 x 处的水压强为 x, 所以该微元所受的水压力为 $x\sqrt{400-x^2}\,dx$. 于是整个半椭圆板所受水压力为

$$\int_0^{20}x\sqrt{400-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\left(400-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{20}=\frac{8000}{3}.$$

897. 容器如下页图所示, 在容器下面有一矩形闸门, 容器内装满了水. 求打开闸门后的瞬时流量.

［解］ 由托里拆里定律知, 在灌满水的容器的壁上, 于水平面下深 x

处有一水平裂缝,那么水会以速度 $v=\sqrt{2gx}$ 流出(g 是重力加速度),于是在水深为 x 处宽为 dx,长为 $\frac{a}{2}$ 的窄缝中水的瞬时流量为



$$dQ=\frac{a}{2}\sqrt{2gx}\,dx.$$

所以打开闸门后流过闸门的瞬时流量为

$$Q=\int_{\frac{2}{3}h}^{h}dQ=\frac{a}{2}\int_{\frac{2}{3}h}^{h}\sqrt{2gx}\,dx$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{2g}\,\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{2}{3}h}^{h}=\frac{a}{3}\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

898. 压缩某弹簧 1 cm 须 2 N,求压缩 10 cm 所耗费的功.

[解] 由胡克定律知弹簧的弹性力 f 与弹簧拉伸或压缩的长度 x 成正比,方向指向平衡位置,即 $f(x)=-kx$,k 是弹簧的刚性系数. 已知当 $x=1$ cm 时 $f=2$ N,所以 $k=2$ N/cm. 将弹簧压缩 10 cm 所耗费的功为

$$W=\int_0^{10}kx\,dx=\frac{k}{2}x^2\Big|_0^{10}=100\,\text{N}\cdot\text{cm}.$$

899. 物体按规律 $x=ct^3$($c>0$,c 是常数)作直线运动. 设介质的阻力与速度的平方成正比,求物体从 $x=0$ 到 $x=\alpha$ 时阻力所作的功.

[解] 物体运动速度 $v=\frac{dx}{dt}=3ct^2=3c^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$,介质的阻力

$$F=kv^2=9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}\quad(k\text{ 是比例常数},\ k>0).$$

于是物体从 $x=0$ 移动到 $x=\alpha$ 时阻力所作的功为

$$W=\int_0^{\alpha}9kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{7}{3}}.$$

900. 设空气压缩机的气缸中活塞面积是 A,体积是 V,里面充满了气体,在等温过程中经压缩体积缩小一半,求所耗费的功.

［解］ 设 p 是气体的压强，V 是体积，那么在等温过程中有 $p=\frac{C}{V}$ (C 是常数)．故作用于活塞的压力是 $pA=\frac{C}{V}A$．设当体积为 V 时活塞离气缸底的距离是 x，那么 $V=Ax$．所以 $pA=\frac{CA}{Ax}=\frac{C}{x}$．再设当体积是 V 时活塞离气缸底的距离是 x_0，那么体积压缩一半所耗费的功是

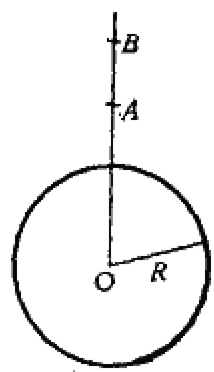
$$W=-\int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} pA\,dx=\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0}\frac{C}{x}\,dx=C\ln 2.$$

901．从地面垂直发射质量为 m 的物体，计算物体从 A 点发射到 B 点，为克服地球引力所需消耗的功．若要物体飞越地球引力范围，物体的初速度 v_0 应为多少？

［解］ 地球对物体的引力为

$$f=mg\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

其中 R 是地球半径，r 是地球中心 O 到物体的距离，g 是重力加速度．设 $OA=r_A$，$OB=r_B$，则所消耗的功为



$$W=\int_{r_A}^{r_B} f\,dr=\int_{r_A}^{r_B} mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 dr$$

$$=-mgR^2\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}=mgR^2\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right).$$

为了计算物体从地面发射后飞出地球的引力范围所消耗的功 A，即取 $r_A=R$，$r_B=+\infty$ 得

$$W=\int_R^{+\infty} f\,dr=\int_R^{+\infty} mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 dr=\lim_{R'\to\infty} mg\,R^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)=mgR$$

可见，在发射物体时给予物体的动能至少要等于所消耗的功，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR.$$

所以初速度 $$v_0=\sqrt{2gR}.$$

902．半径为 r 的球沉入水中，它与水面相接，球的比重为 1，现将球从水中取出，要作多少功？

［解］ 水的比重为 1．用 x 表示球顶与水平面之间的距离，此时露出水

面的球冠体积为 $\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right)$，所受重力为 $\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right)\cdot 1$. 由于球的比重等于水的比重，所以没于水中的部分所受的向下的重力与向上的浮力数值相等，故当 x 增加到 $x+dx$ 时，需要作功为

$$dW=\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right)dx\ ,$$

将球从水中取出要作的功为

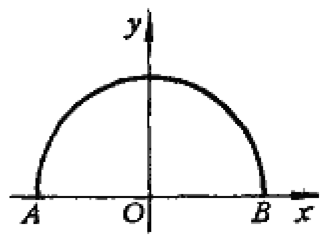
$$W=\int_0^{2r}\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right)dx=\frac{4}{3}\pi r^4$$

903. **一圆柱形水池，直径是 20 m，高 30 m，装有深 27 m 的水. 现将水抽尽，求克服重力所作的功.**

［解］ 水的密度为 1000 kg/m³. 用 x 表示水面与水池口的距离. 当水平面高度降低 dx 时，被抽去的水的重量为 $\pi g\cdot 10^2\cdot dx\cdot 1000=10^5\pi g\,dx$，克服重力所作之功为 $dW=10^5\pi g\,dx\cdot x$. 如将水抽尽，克服重力所作功为

$$W=\int_3^{30}10^5\pi gx\,dx=4.455\times 10^7\pi g\,(\mathrm{J}).$$

904. **求半径为 a 的均匀半圆弧，关于过这条弧的两个端点的直径的静力矩和惯性矩以及半圆弧的重心.**



［解］ 半圆弧用参数方程表示为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$，则 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=a\,dt$. 过两端点的直径即 x 轴上 AB 段，设半圆弧的密度为 ρ，故静力矩

$$M_x=\rho\int_0^{\pi}y\,ds=\rho a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=2a^2\rho.$$

惯性矩

$$I_x=\rho\int_0^{\pi}y^2\,ds=\rho a^3\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}a^3\rho.$$

重心

$$\bar{x}=0\quad(\because\ \text{半圆弧关于 } y \text{ 轴对称}),\quad \bar{y}=\frac{M_x}{\int_0^{\pi}\rho\,ds}=\frac{2a^2\rho}{a\pi\rho}=\frac{2}{\pi}a.$$

905. **求抛物线 $y^2=2px\,(y\geqslant 0)$ 和 x 轴以及 $x=x_0$ 所围图形关于坐标轴的静力矩和重心，设此图形密度 $\rho=1$.**

［解］ 静力矩是

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{x_0} y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{x_0} 2px\,dx=\frac{1}{2}px_0^2.$$

$$M_y=\int_0^{x_0} xy\,dx=\int_0^{x_0}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{2p}\,x_0^{\frac{5}{2}}.$$

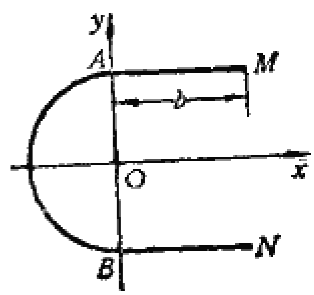
图形的面积为

$$A=\int_0^{x_0} y\,dx=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x_0^{\frac{3}{2}}.$$

故图形的重心是

$$\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{3}{5}x_0,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{3}{8}\sqrt{2px_0}.$$

906. 一根密度均匀的金属丝弯成半径为 a 的半圆弧，在两端用同样的金属丝接上两条切线，问切线段的长度 b 是多少才能使金属丝 $MABN$ 的重心正好落在圆心 O 上？



［解］ 由密度的均匀性和图形的对称性知道，所求重心的纵坐标为 0. 设半圆弧的重心的横坐标为 x_1. 用参数方程 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $\left(\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$ 表示半圆弧，则 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=a\,dt$

$$\therefore\quad x_1=\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} x\cdot ds}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} ds}=\frac{a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos t\,dt}{\pi a}=-\frac{2a}{\pi}$$

再设直线段 AM 和 BM 的重心的横坐标为 x_2, 则 $x_2=\frac{b}{2}$. 令 m_1 和 m_2 分别是半圆弧和直线段 AM, BM 的质量，则 $m_1=\pi a\rho$, $m_2=2b\rho$ (ρ 是密度，它是常数).

已知金属丝 $MABN$ 的重心在 O 点，所以

$$m_1x_1+m_2x_2=0.$$

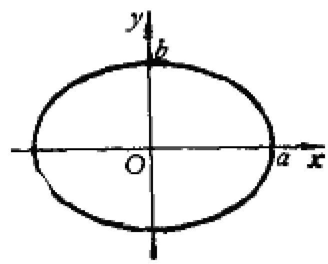
即 $-\pi a\rho\cdot\frac{2a}{\pi}+2b\rho\cdot\frac{b}{2}=0$, 解得 $b=\sqrt{2}a$.

907. 求抛物线 $ay=2ax-x^2(a>0)$ 和 x 轴所围图形（密度 $\rho=1$）关于 x 轴和 y 轴的惯性矩.

［解］ $I_x=\frac{1}{3}\int_0^{2a} y^3\,dx=\frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}(2ax-x^2)^3\,dx=\frac{32}{105}a^4.$

$$I_y=\int_0^{2a} x^2y\,dx=\int_0^{2a} x^2\left(2x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\frac{8}{5}a^4.$$

908. 求半轴为 a 和 b 的均匀椭圆薄片关于它的主轴的惯性矩.



［解］ 设椭圆的方程为 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，密度为 1，则其主轴为坐标轴. 再由对称性得:

$$I_x=4\cdot\frac{1}{3}\int_0^a y^3\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b^3\sin^3 t(-a\sin t)\,dt=\frac{4}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt$$

$$=\frac{4}{3}ab^3\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}ab^3\pi.$$

$$I_y=4\int_0^a x^2y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\cos^2 t\,b\sin t(-a\sin t\,dt)$$

$$=4a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=4a^3b\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt\right)$$

$$=4a^3b\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi a^3b.$$

909. 证明古鲁金第一定理：密度均匀的曲线绕某一条不与它相交的轴旋转，旋转后生成的曲面的面积 S 等于此曲线的弧长 L 乘曲线重心 C 旋转后的圆周长，即

$$S=L\cdot 2\pi r\,(r\text{ 是重心 }C\text{ 到轴的距离}).$$

［证］ 设该轴是 x 轴，曲线的方程是 $y=f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，那么曲线的重心的纵坐标是

$$\bar{y}=r=\frac{\int_a^b y\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{1}{L}\int_a^b y\,ds$$

$$\therefore\quad 2\pi r\cdot L=2\pi\int_a^b y\,ds=S.$$

910. 证明古鲁金第二定理：密度均匀的平面图形绕不与它相交的轴旋转生成的旋转体体积 V，等于此图形的面积 A 与重心 C 旋转后的圆周长的乘积，即

$$V=A\cdot 2\pi r\quad (r\ 是重心\ C\ 到轴的距离).$$

[证] 设该轴是 x 轴，图形由 $y=f(x)\geqslant 0$，$x=a$，$x=b$ 和 x 轴围成，则该图形重心的纵坐标为

$$\bar{y}=r=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{A}$$

$$\therefore\quad A\cdot 2\pi r=\pi\int_a^b y^2\,dx=V.$$

911. 利用古鲁金第一定理(参见第 909 题)求：

(1) 旋轮线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ a>0)$ 的重心，密度均匀；

(2) 半径为 r 的圆，圆心与其轴的距离为 $d(d>r)$，绕该轴旋转后生成旋转曲面(车胎面)的面积 S.

[解] (1) 由对称性知 $\bar{x}=\pi a$，利用古鲁金第一定理以及第 865 和第 888题的结果，得

$$\bar{y}=\frac{S}{2\pi L}=\frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{2\pi\cdot 8a}=\frac{4}{3}a$$

(2) 圆周的重心位于圆心，圆周长 $L=2\pi r$，由古鲁金第一定理得

$$S=2\pi L\bar{y}=2\pi\cdot 2\pi r\cdot d=4\pi^2 rd.$$

912. 利用古鲁金第二定理(参见第 910 题)求：

(1) 均匀的四分之一椭圆板 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ 的重心；

(2) 半径为 r 的圆，圆心与某轴的距离为 $d(d>r)$，绕该轴旋转后生成的旋转体(车胎)的体积.

［解］ (1) 利用古鲁金第二定理以及椭圆分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转后的旋转体的体积是

$$V_x=\pi\int_0^a y^2\,dx=\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2}{3}\pi ab^2,$$

$$V_y=\frac{2}{3}\pi a^2b,$$

椭圆面积

$$A=\frac{1}{4}\pi ab,$$

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{V_y}{2\pi A}=\frac{\frac{2}{3}\pi a^2b}{2\pi\cdot\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$\bar{y}=\frac{V_x}{2\pi A}=\frac{\frac{2}{3}\pi ab^2}{2\pi\cdot\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

(2) 圆的重心位于圆心，圆面积 $A=\pi r^2$，由古鲁金第二定理，旋转体的体积是

$$V=A\cdot 2\pi\bar{y}=\pi r^2\cdot 2\pi\cdot d=2\pi^2r^2d.$$

§ 6. 定积分的近似计算

913. 利用定积分近似计算的梯形公式和辛浦生公式分别求出 π 的近似值. 已知

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

(在计算中将[0, 1]作四等分).

［解］ 将 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 在分点上的数值列表如下:

$x_0=0$, $y_0=1.0000$; $x_1=0.25$, $y_1=0.9412$;

$x_2=0.5$, $y_2=0.8000$; $x_3=0.75$, $y_3=0.6400$;

$x_4=1$, $y_4=0.5000$.

利用梯形公式:

$$\pi=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\frac{y_4}{2}$$
$$=0.5000+0.9412+0.8000+0.6400+0.2500=3.1312.$$

利用辛浦生公式:

$$\pi=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{4}{12}[y_0+2y_2+4(y_1+y_3)+y_4]$$
$$=\frac{1}{3}(1.0000+1.6000+6.3248+0.5000)=\frac{1}{3}\times 9.4248,$$
$$\therefore\quad \pi\approx 3.1416.$$

[说明]　一般说来,在分点的个数相同时,辛浦生公式比梯形公式精确。利用梯形公式求定积分的近似值时,其误差为$O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,利用辛浦生公式时,其误差减小为$O\left(\frac{1}{n^4}\right)$,其中$n$是对区间的等分点的个数. 现代在计算机上常用的求定积分近似值的方法是龙贝方法,其精确度更高.

914. 求椭圆 $2x^2+y^2=1$ 的弧长.

[解]　将椭圆的方程用参数方程

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ y=\sin\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

表示将更方便. 这时$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta$.

$$\therefore\quad 弧长=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta.$$

将区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$作 6 等分,在分点上求出相应的$y=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}$如下:

$\theta_0=0,\quad y_0=1.0000;\qquad \theta_1=\frac{\pi}{12},\ y_1=0.9831;$

$\theta_2=\frac{\pi}{6},\ y_2=0.9354;\qquad \theta_3=\frac{\pi}{4},\quad y_3=0.8660;$

$\theta_4=\frac{\pi}{3},\ y_4=0.7906;\qquad \theta_5=\frac{5\pi}{12},\ y_5=0.7304;$

$\theta_6=\frac{\pi}{2},\ y_6=0.7071.$

利用辛浦生公式($n=3$).

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{18}[y_0+y_6+2(y_2+y_4)+4(y_1+y_3+y_5)]$$

$$\approx 5.4025.$$

［说明］ 形如 $\int\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$ 的积分称为椭圆积分. 椭圆积分的一般形式是

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

和
$$\int\frac{dx}{(1+h\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\qquad(0<k<1,\ h\neq 0),$$

它们通常都不能用初等函数表示出来，因此计算这类形式的定积分只能采取近似计算的方法.

915. 在 20m 宽的河面上，测量河流横断面的面积，如果从河的一岸向对岸每隔 2m，测得河水深度 y 如下(单位为 m)：

$x_0=0,\quad y_0=0.4;\quad x_1=2,\quad y_1=0.8;\quad x_2=4,\quad y_2=1.4;$

$x_3=6,\quad y_3=2.0;\quad x_4=8,\quad y_4=2.4;\quad x_5=10,\quad y_5=2.1;$

$x_6=12,\quad y_6=1.9;\quad x_7=14,\quad y_7=1.6;\quad x_8=16,\quad y_8=1.3;$

$x_9=18,\quad y_9=0.8;\quad x_{10}=20,\quad y_{10}=0.4.$

求此河流横断面的面积 A.

［解］ 利用辛浦生公式($n=5$)，

$$A=\int_0^{20}y\,dx\approx\frac{20}{6\times5}[y_0+y_{10}+2(y_2+y_4+y_6+y_8)$$
$$+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$
$$=\frac{2}{3}(0.8+2\times7.0+4\times7.3)=29.33\ \mathrm{m}^2.$$

§ 7. β-函数和 Γ-函数

916. 对 β-函数 $\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ (p,\ q>0)$，证明

(1) $\beta(p,\ q)=\beta(q,\ p)$;

(2) $\beta(p,\ q)=\beta(p+1,\ q)+\beta(p,\ q+1)$;

(3) $\beta(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\ \beta(p,\ q)$,

$$\beta(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\ \beta(p,\ q);$$

(4) $\beta(p,\ q)=2^{1-p-q}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$.

[证] (1) $\beta(p,\ q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$$=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\beta(q,\ p)\quad(\text{令 } t=1-x).$$

(2) $\beta(p+1,\ q)+\beta(p,\ q+1)=\displaystyle\int_0^1[x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q]dx$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\beta(p,\ q).$$

(3) $\beta(p,\ q+1)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$

$$=\frac{1}{p}x^p(1-x)^q\Big|_0^1+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\frac{q}{p}\beta(p+1,\ q)=\frac{q}{p}[\beta(p,\ q)-\beta(p,\ q+1)]$$

$$\therefore\quad \beta(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}\beta(p,\ q).$$

此外,由(1)又得$\beta(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\ \beta(p,\ q)$.

(4) 令 $x=\dfrac{1+t}{2}$, 则

$$\beta(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=2^{1-p-q}\int_{-1}^{1}(1+t)^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

917. 对 β-函数 $\beta(p,\ q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, 证明:

(1) $\beta(p,\ q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta$, 并由此求 $\beta\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $\beta(p, q)=\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$.

［证］ (1) 令 $x=\cos^2\theta$，则 $x^{p-1}=\cos^{2p-2}\theta$，$(1-x)^{q-1}=\sin^{2q-2}\theta$，$dx=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$，

$$\therefore\quad \beta(p, q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

$$\therefore\quad \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi.$$

(2) 令 $x=\frac{1}{1+t}$，则 $x^{p-1}=\frac{1}{(1+t)^{p-1}}$，$(1-x)^{q-1}=\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{q-1}}$，

$$dx=-\frac{1}{(1+t)^2}\,dt,$$

$$\therefore\quad \beta(p, q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^1\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt,$$

在后一个积分中令 $t=\frac{1}{u}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^1\frac{1}{u^{q-1}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{p+q}}\cdot\frac{1}{u^2}\,du=\int_0^1\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

$$\therefore\quad \beta(p, q)=\int_0^1\frac{t^{q-1}+t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

918. 对 Γ-函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx\,(s>0)$，证明：

(1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$； (2) $\Gamma(n+1)=n!$ (n 是正整数).

［证］ (1) $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x^s\,de^{-x}$

$$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx=s\Gamma(s).$$

(2) 当 n 是正整数时，由 (1) 即得

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$$

而 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1$，$\therefore\ \Gamma(n+1)=n!$

［说明］ 本题表明 $\Gamma(s+1)$ 可以看作 $n!$ 的拓广.

919. 求下列各值：

(1) $\dfrac{3\Gamma(5)}{\Gamma(3)}$； (2) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$； (3) $\dfrac{3\Gamma\left(\frac{12}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}$.

［解］ 由第918题得

(1) $\dfrac{3\Gamma(5)}{\Gamma(3)}=\dfrac{3\cdot 4!}{2!}=36$.

(2) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{15}{8}$.

(3) $\dfrac{3\Gamma\left(\frac{12}{5}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{3\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{5}\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{21}{25}$.

920. 证明 β-函数和 Γ-函数满足下列关系：

$$\beta(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

［证］ 在 $\Gamma(p)$ 中令 $x=\dfrac{t^2}{2}$，得

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=2^{1-p}\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2/2}dt,$$

$$\therefore\quad \Gamma(p)\Gamma(q)=2^{1-p}\cdot 2^{1-q}\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2/2}dt\int_0^{+\infty}u^{2q-1}e^{-u^2/2}du$$

$$=2^{2-p-q}\iint\limits_D t^{2p-1}u^{2q-1}e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}dt\,du,$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x<+\infty,0\leqslant y<+\infty\}$，作代换 $t=r\cos\theta, u=r\sin\theta$ 则

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\int_0^{+\infty}2^{1-p-q}r^{2(p+q)-2}e^{-r^2/2}r\,dr.$$

$$\because\quad 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta=\beta(p,\ q)\quad（参见第917(1)题）$$

$$2^{1-(p+q)},\int_0^{+\infty}r^{2(p+q)-2}e^{-r^2/2}r\,dr=\Gamma(p+q).$$

$$\therefore \quad \Gamma(p)\Gamma(q)=\beta(p,q)\Gamma(p+q)$$

即
$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

921. 求：(1) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$；(2) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$；(3) $\int_0^{+\infty}x^3e^{-2x}dx$.

[解] (1) 由第920题，

$$\therefore \quad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

而$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$(参见第917(1)题)，$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

(2) 令 $x^2=t$，则

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(3) 令 $2x=t$，则

$$\int_0^{+\infty}x^3e^{-2x}dx=\frac{1}{2^4}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt=\frac{1}{2^4}\Gamma(4)=\frac{3!}{2^4}=\frac{3}{8}.$$

922. 求：(1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x^3}dx$；(2) $\int_0^{+\infty}3^{-4x^2}dx$；

(3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$；　(4) $\int_0^{+\infty}x^me^{-ax^n}dx\,(m,n,a>0)$.

[解] (1) 令 $x^3=t$，则

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(参见第921(1)题).

(2) $$\int_0^{+\infty}3^{-4x^2}dx=\int_0^{+\infty}(e^{\ln 3})^{-4x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(4\ln 3)x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t}d\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{4\ln 3}} \quad (令\,(4\ln 3)x^2=t)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4\ln 3}}.$$

(3) 令 $-\ln x=t$，则

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

(4) 令 $ax^n=t$，则

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-ax^n}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{m}{n}}e^{-t}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

923. 证明 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$，其中 n 是正整数，$m>-1$.

［证］ 令 $x=e^{-t}$，则

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^n e^{-(m+1)t}dt$$

$$=(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{(m+1)^n}e^{-u}\frac{du}{m+1}\quad(\text{令 }(m+1)t=u)$$

$$=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}u^n e^{-u}du=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

924. 求：(1) $\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,dx\quad(\alpha,\ \beta>0)$；

(2) $\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\,dx\quad(\alpha>0)$；　(3) $\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1}x\,dx\quad(\alpha>0)$；

(4) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^r x\,dx\quad(|r|<1)$.

［解］ (1) $\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}\right)$（参见第917(1)题）

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

(2) 在 (1) 中令 $\beta=1$ 即得

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

(3) 在(2)中令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 即得

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

(4) 在(1)中令 $\alpha=1+r$, $\beta=1-r$, $|r|<1$, 得

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^r x\,dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right).$$

925. 设曲线的极坐标方程是 $r^m=a^m\cos m\theta$ (m 是正整数), 求: (1) 其一支所围区域的面积; (2) 这一支的长度.

[解] (1) 当 θ 从 $-\frac{\pi}{2m}$ 变动到 $\frac{\pi}{2m}$ 时,便得到曲线的一支. 故

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}a^2\cos^{\frac{2}{m}}m\theta\,d\theta=\frac{a^2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi\,d\varphi\quad(令\ \varphi=m\theta)$$

$$=\frac{a^2}{m}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}\quad(参见第 924 题)$$

$$=\frac{a^2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

(2) $$L=2\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{1}{m}-1}m\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2a}{m}\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi\,d\varphi=\frac{a\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)}{m\Gamma\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2}\right)}.$$

第六章　级　　数

1．数项级数

(1) 定义　对于数列 $\{u_n\}$，称形如 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的式子为数项级数，简称级数．记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$．其中 u_n 称通项，

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=s_n$$

称级数前 n 项的部分和．

(2) 收敛级数　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛，即存在实数 s，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收敛级数，s 是它的和，记作

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

若 $\{s_n\}$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为发散级数．

(3) 正项级数收敛性的判别法

设

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{2}$$

为两个正项级数，收敛的判别法如下表：

判别法名称		条件	级数的收敛性	
			收敛	发散
比较判别法	I	当 $n>N$ 时，$u_n\leqslant cv_n$，c 是正常数	若级数 (2) 收敛，则级数 (1) 收敛.	若级数 (1) 发散，则级数 (2) 发散.
	II	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=k\ (v_n\neq 0)$.	若级数 (2) 收敛，且 $0\leqslant k<+\infty$，则级数 (1) 收敛.	若级数 (2) 发散，且 $0<k<+\infty$，则级数 (1) 发散.
比值判别法 (达朗贝尔)		$u_n>0\quad(n>N)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$	当 $l<1$，级数 (1) 收敛.	当 $l>1$，级数 (1) 发散.
根值判别法 (柯西)		$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$	当 $l<1$，级数 (1) 收敛.	当 $l>1$，级数 (1) 发散.
拉阿伯判别法		$u_n>0\quad(n>N)$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=l$	当 $l>1$，级数 (1) 收敛.	当 $l<1$，级数 (1) 发散.
积分判别法 (柯西)		$f(x)$ 为非负不增函数	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ 同时收敛.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ 同时发散.

(4) 变号级数收敛性的判别法

a. 绝对收敛　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

b. 莱布尼茨判别法　若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n\geqslant 0)$ 满足条件：

(i) $u_n \geqslant u_{n+1}(n>N)$，(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，并且又有

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| \leqslant |u_n|.$$

c. 阿贝尔判别法　对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$，若满足条件：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，(ii) $\{v_n\}$ 是单调有界数列，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$ 收敛.

d. 狄利克雷判别法　对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$，若满足条件：

(i) 部分和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 有界，(ii) 当 $n\to\infty$ 时，v_n 单调趋于零. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$ 收敛.

2. 函数项级数

(1) 定义　函数列 $\{u_n(x)\}$ 中的每一项函数都在数集 A 上有定义，则称 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在 A 上的函数项级数，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 称为函数项级数的部分和.

(2) 收敛域　若 α 为数集 A 中一点，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)$ 收敛，则称 α 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点；否则称发散点. 函数项级数收敛点的集合称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域.

(3) 一致收敛　对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$x\in I$，有函数 $S(x)$，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对 I 内任意 x 都有 $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$，则称函数项级数在 I 内一致收敛.

(4) 柯西准则 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 内一致收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对任意 P 及 I 内的任意 x，都有

$$|s_{n+p}(x)-s_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

(5) 优级数判别法(维尔斯特拉斯)．若对函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$，有

$$|u_n(x)|\leqslant c_n,\quad x\in I \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 内一致收敛．

(6) 阿贝尔判别法 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x)$ 满足条件：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 一致收敛，(ii) 函数列 $\{v_n(x)\}$ 关于 x 是单调的，且对任意 $x\in I$ 和任何自然数 n 有 $|v_n(x)|\leqslant M$，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x)$ 在 I 内一致收敛．

(7) 狄利克雷判别法 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x)$ 满足条件：

(i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和对任意 $x\in I$ 和任何自然数 n 都有界：

$$|s_n(x)|\leqslant M,$$

(ii) 函数列 $\{v_n(x)\}$ 关于 n 是单调的，并且 $x\in I$ 是一致趋于零，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x)$ 在 I 上一致收敛．

(8) 函数项级数的性质

性质	条件	结论
连续性	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛于$s(x)$. (ii) $u_n(x)(n=1, 2, \cdots, n)$在$[a,b]$上连续.	$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上连续，即$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x)$ $x\in[a,b]$.
逐项微分	(i) $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 定义在$[a, b]$上，而且$u_n'(x)$连续. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a, b]$上收敛. (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$[a, b]$上一致收敛.	$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x)$ $x\in[a,b]$.
逐项积分	(i) $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在$[a, b]$上连续(或可积). (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛.	$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$

(9) 幂级数　形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$($a$为实数)的级数称幂级数.

a. 幂级数的收敛半径　任何幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$必存在数$r\geqslant 0$，使得

(i) 这一幂级数在$(-r, r)$内闭区间一致收敛且绝对收敛;

(ii) 若幂级数在$x=r$收敛，则对任何$x\in(-r, r)$，这一幂级数在$[-r, r]$一致收敛；若幂级数在$x=-r$收敛，亦有相同结果;

(iii) 对任何$|x|>r$，幂级数在x发散. 称r是幂级数的收敛半径.

b. 幂级数的和函数的性质

(i) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-r, r)$ 内的和函数连续．即

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0} a_n x^n,\ x\in(-r, r).$$

(ii) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-r, r)$ 内逐项可微，即

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\quad x\in(-r, r).$$

(iii) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-r, r)$ 内的任何闭区间 $[a, b]$ 上逐项可积，即

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx.$$

o．函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad x\in(-1, 1),$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad x\in(-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$x\in[-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad x\in(-1, 1),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$x\in(-\infty, +\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,\ +\infty).$$

r 的一个求法是：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$ 存在 $(0\leqslant l\leqslant+\infty)$．则幂级数的收敛半径

$$r=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, & \text{当 } 0<l<+\infty,\\ +\infty, & \text{当 } l=0,\\ 0, & \text{当 } l=+\infty.\end{cases}$$

3．傅立叶级数

(1) 定义　设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 可积和绝对可积，令

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

则称 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

如果 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的函数，在 $[-l,\ l]$ 可积和绝对可积，则其傅立叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

其中
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

特别是(i)若 $f(x)$ 是偶函数，则有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

(ii) 若 $f(x)$ 是奇函数,则有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

(2) 收敛定理　若以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-l,\ l]$ 上逐段连续且逐段可微,或逐段单调,则

(i) 在 $f(x)$ 的连续点 x 处,有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right);$$

(ii) 在 $f(x)$ 的有限间断点 x 处,有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

§1. 数项级数

(1) 数项级数的收敛性

926. 证明下列级数收敛,并求它们的和:

(1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{3}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

［解］ (1) ∵ $$\frac{n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\cdot5\cdots(2n-1)}-\frac{1}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\right]\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

得部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3\cdot5\cdots(2k+1)}=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot5}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{3\cdot5\cdots(2n-1)}-\frac{1}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\right\}.$$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$. 即左端级数收敛，其和为$\frac{1}{2}$.

(2) ∵ $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

得 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right],$$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$. 即左端级数收敛，其和为$\frac{1}{4}$.

(3) 部分和 $$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$
$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

显然 $$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

∴ $$S_n=2\left(\frac{1}{2}+2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\frac{1}{2^2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right\}$$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=2\left\{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right\}=3$. 即级数收敛，其和为 3.

(4) 由 $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$,

得

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sum_{k=1}^{n}[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})]$$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+1=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

即级数收敛，其和为 $1-\sqrt{2}$.

927. 求证： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}=\frac{1}{q\cdot q!}$.

［证］ $\because$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}=\frac{1}{q}\left[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+q-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}\right]\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

$$\therefore\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+q)}=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}\right).$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+q)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q}\left[\frac{1}{q!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}\right]=\frac{1}{q\cdot q!}.$$

［说明］ 不难证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)(p+n+1)}=\frac{1}{p+1}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)}=\frac{1}{2(p+1)(p+2)}$$

$$(p\neq -1,\ -2,\ -3,\ \cdots).$$

一般地 $q\geqslant 1$, q 为整数时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)(p+n+1)\cdots(p+n+q)}=\frac{1}{q(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}.$$

取 $p=0$ 就是本题的结论．只要注意到

$$\frac{1}{(p+n)(p+n+1)\cdots(p+n+q)}$$
$$-\frac{1}{(p+n+1)(p+n+2)\cdots(p+n+q+1)}$$
$$=\frac{q+1}{(p+n)(p+n+1)\cdots(p+n+q+1)},$$

并且对 q 进行归纳，即能得结论

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)(p+n+1)\cdots(p+n+q)}=\frac{1}{q(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}.$$

928. 求证：$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}$

$$+\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}+\cdots=1.$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)=\infty.$

[证] ∵ $\frac{a_1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1},$

$$\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$
$$\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$
$$-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)},\quad\cdots$$

于是有

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}$$
$$=1-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)}\right]=1,$$

$$\therefore\quad \frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}+\cdots=1.$$

[说明] 当 $\{a_n\}$ 为某些具体数列时，就可得到更多的结论．如取 $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $\cdots$ $a_n=n-1$, $\cdots$ 则可得

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\cdots=1.$$

又如取 $a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=4,\ \cdots,\ a_{n+1}=2n,\ \cdots$ 则可得

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{4}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}+\cdots=1.$$

再若取 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ \cdots,\ a_n=2n-1,\ \cdots$ 则可得

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2\cdot4}+\frac{5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}+\cdots=1.$$

929. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3-2n}$ 的和.

［解］
$$\frac{1}{(2n)^3-2n}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{4n}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2n-(2n-1)}{2n(2n-1)}-\frac{(2n+1)-2n}{2n(2n+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^3-2k}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-1+\frac{1}{2n+1}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right\}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{n}{2n+1}.$$

$$\because\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n},$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}-\frac{n}{2n+1}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]-\frac{n}{2n+1}\right\}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\ln2-\frac{1}{2}.$$

［说明］ 另有一解法见第1021题

930. 已知：$x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$， $y_0=\frac{1+x^2}{x}$， $y_1=\frac{1+x^4}{x^2}$，

$$y_2=\frac{1+x^8}{x^4},\ \cdots,\quad y_n=\frac{1}{x^{2^n}}+x^{2^n},\ \cdots,$$

求：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$.

［解］ ∵ $\frac{a}{a+1}=1-\frac{1}{a+1}$，

$$\frac{b}{(a+1)(b+1)}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{(a+1)(b+1)},$$

$$\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{1}{(a+1)(b+1)}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)},$$

一般地

$$\frac{t}{(a+1)(b+1)\cdots(t+1)}=\frac{1}{(a+1)(b+1)\cdots(s+1)}-\frac{1}{(a+1)(b+1)\cdots(s+1)(t+1)},$$

$$\therefore\ \frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\cdots+\frac{t}{(a+1)(b+1)\cdots(t+1)}=1-\frac{1}{(a+1)(b+1)\cdots(s+1)(t+1)}.$$

$$\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots=\frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^4)}+\frac{x^8}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}+\cdots\right],$$

取 $a=x^2$, $b=x^4$, $c=x^8$, …. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}\right]=1\quad(\text{其中 } x>1).$$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{2}{3+\sqrt{5}}.$$

931. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}$ 的和.

［解］ 由等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}$ 得到

$$\frac{(n!)^2\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)!}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{-n}\cos^{2n+1}x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\cos^2 x\right)^n dx.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cos^2 x\right)^n\right]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cos^2 x\right]^{-1}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$$

$$=4\operatorname{arc\,tg}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

932. 已知数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$a_n>0(n=1, 2, 3, \cdots)$. 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n^2}$ 同时敛散.

［证］ 令 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_{k^2}$.

(1) $\because$ $\{a_n\}$ 是正项数列，故

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n<a_1+a_2+\cdots+a_{n^2}+\cdots+a_{(n+1)^2-1}$$

$$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots$$
$$+[a_{n^2}+a_{n^2+1}+\cdots+a_{(n+1)^2-1}]$$
$$<(2\cdot1+1)a_1+(2\cdot2+1)a_{2^2}+\cdots+(2n+1)a_{n^2}$$
$$<\sum_{k=1}^{n}3ka_{k^2}.$$

即
$$A_n<3B_n.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n^2}$ 收敛，则有 $A_n<3B_n<3\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n^2}$.

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) $\because$ $\{a_n\}$ 单调减少，故

$$S_n=\sum_{k=1}^{n^2}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{n^2}$$
$$=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)+\cdots$$
$$+(a_{(n-1)^2+1}+\cdots+a_{n^2})$$
$$>a_1+(2\cdot2-1)a_{2^2}+(2\cdot3-1)a_{3^2}+\cdots+(2n-1)a_{n^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2ka_{k^2}-\sum_{k=1}^{n}a_{k^2}>\sum_{k=1}^{n}2ka_{k^2}-\sum_{k=1}^{n^2}a_k,$$

$$\therefore \quad B_n < A_{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$ 的部分和有上界，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$ 收敛。

933. 已知数列 $\{a_n\}$ 单调，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 求证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛.

［证］ (1) 不失一般性，设数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 级数收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由柯西准则得，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$0 \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon.$$

再由数列的单调性有

$$0 \leqslant n a_{2n} \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} < \varepsilon.$$

故
$$\lim_{n\to\infty} n a_{2n} = 0, \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

(2) $\because$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} [(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots$$
$$+ n(a_n - a_{n+1})]$$
$$= \lim_{n\to\infty} [(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - n a_{n+1}].$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛以及 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_{n+1} = 0$，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

934. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ 收敛 $(p_i>0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2} p_n$ 收敛

［证］ 取 $q_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$，$q_0 = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{q_k}\right)^2 (q_k - q_{k-1})$，

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}.$$

显然 $\{q_n\}$ 单调增加，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{q_k}\right)^2(q_k-q_{k-1})\leqslant\frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k\cdot q_{k-1}}\cdot(q_k-q_{k-1})$$

$$=\frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}=\frac{1}{p_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{q_k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}$$

$$\leqslant\frac{2}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{q_k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{q_k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}$$

$$\leqslant\frac{5}{p_1}+2\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{q_k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{q_k}.$$

由柯西-许瓦兹不等式

$$\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{q_k}\right\}^2\leqslant\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k^2}p_k\right\}\cdot\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p_k}\right\}$$

$$\therefore\quad S_n\leqslant\frac{5}{p_1}+2\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{q_k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{q_k}$$

$$\leqslant\frac{5}{p_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}+2\sqrt{\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k^2}p_k\right\}\left\{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p_k}\right\}}$$

$$\leqslant\frac{5}{p_1}+T+2\sqrt{S_nT},$$

$$S_n-2\sqrt{S_nT}+T\leqslant\frac{5}{p_1}+2T,$$

于是

$$\sqrt{S_n}\leqslant\sqrt{T}+\sqrt{2T+\frac{5}{p_1}}.$$

∴ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}p_n$ 部分和有上界，该级数收敛。

935. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{2^n}$.

[解](1) 对任给 $\varepsilon>0$，考察

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|=\left|\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{(2n+2p-1)(2n+2p+1)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n+2p-1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)<\frac{1}{4n}<\varepsilon.$$

取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 p 均有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛.

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|=\left|\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{n+p}}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

取 $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 p 均有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}}$ 收敛.

(2) 正项级数收敛性的判别

936. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$.

［解］ (1) $n^2-\ln n>n^2-n>n^2-\frac{n^2}{2}$ $(n>2)$，

$$\frac{1}{n^2-\ln n}<\frac{1}{\frac{n^2}{2}}.$$

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ 收敛.

(2) $\dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}>\dfrac{n-\frac{n}{2}}{2n^2}\quad(n>4)$,

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{n}{2}}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n}$ 发散，$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$ 发散.

937. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

［解］ $n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)>0$，故上述级数是正项级数.

$$n^2\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)=n^2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{1}{2n^2}\leqslant 2n^2\cdot\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2=\frac{1}{2n^2}.$$

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

938. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1+n}{n}}}$ 的敛散性.

［解］ $n<2^n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

$$n^{\frac{1}{n}}<2,\quad \frac{1}{n^{\frac{1+n}{n}}}=\frac{1}{n\cdot n^{\frac{1}{n}}}>\frac{1}{2n}.$$

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1+n}{n}}}$ 发散.

939. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4+x^2}\,dx$ 的敛散性.

［解］ 显然

$$0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{4+x^2}\,dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{4}\,dx=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4+x^2}\,dx$ 收敛.

940. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

［解一］ $\because\quad 0<\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx\leqslant e^{-\sqrt{n}}\int_n^{n+1}dx=e^{-\sqrt{n}}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 收

敛，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$ 收敛.

［解二］ ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx=\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$

$$\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-\sqrt{x}}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t^2}2ye^{-y}dy$$

$$=2\lim_{t\to+\infty}[-(1+y)e^{-y}]\Big|_1^{t^2}=\frac{4}{e}.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$ 收敛，且其和为 $\frac{4}{e}$.

941. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

［解］ (1) ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1,$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(2) ∵ $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1+n^2}{1+n^3}}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(1+n^2)}{1+n^3}\right]^2=1.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ 收敛.

(3) ∵ $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}}{\frac{1}{\sqrt[8]{n^9}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[8]{n}}=0.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{n^9}}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ 收敛.

(4) ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})}{\dfrac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2n}{(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})}}{\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=1.$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$$

发散.

942. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)\quad(a>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

[解] (1) ∵ $a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2=(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2$,

根据洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}})^2}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{2n}}-a^{-\frac{1}{2n}}}{\dfrac{1}{n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{2n}}-1}{\dfrac{1}{2n}}+\frac{a^{-\frac{1}{2n}}-1}{-\dfrac{1}{2n}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\ln^2 a.$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收敛.

(2) ∵ $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^{\ln\ln n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\ln\ln n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^{\ln\ln n}}=0.$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散。

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$.

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ 收敛。

943. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

［解］(1) ∵ $\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}$.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}}{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\cos^2\frac{n\pi}{3}=0$.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ 收敛．得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛。

944. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n=1$，求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

［证一］ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，则存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}-1\right|<0.5,\quad 0<\frac{0.5}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}<a_n<\frac{1.5}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}.$$

∴ 可将 a_n 看作正项级数.

又 $$\lim_{n\to\infty} 2n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=2.$$

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，则存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，有

$$\left|2n\sin\frac{1}{n}-2\right|<\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2}<2n\sin\frac{1}{n}<\frac{5}{2}.$$

于是，取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$0<a_n<\frac{1.5}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}<\frac{1.5}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.5}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

［证二］ ∵ 按证一有 $a_n>0$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数. 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2)^{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}}=1.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 收敛. 再由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}=\lim_{n\to\infty} n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n=1.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

945. 已知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，求证 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛.

［证］ $\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$,

$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由级数的运算性质，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛.

946. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则下列级数也收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

［证］ 由级数的运算性质得$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛.

$$\because\quad \sqrt{a_nb_n}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+b_n),$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$ 收敛.

$$\because\quad (\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2=a_n+2\sqrt{a_nb_n}+b_n\leqslant2(a_n+b_n),$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2$ 收敛.

此外，令 $b_n=\frac{1}{n^2}$，$\because\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sqrt{a_nb_n}=\frac{\sqrt{a_n}}{n}$，根据上面讨论，$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

947. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. 求证级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

［证］ $\because a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\therefore 0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$.

令
$$u_n=c_n-a_n,\ v_n=b_n-a_n.$$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，根据级数的运算性质$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛.

由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛.

又级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛.

948. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，$v_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$. 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

［证］ ∵ 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 收敛于 s. 由

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1})=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_n-u_{n-1})=u_n-u_0.$$

和 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k-1})=s,\quad 得 \lim_{n\to\infty}u_n=s+u_0.$$

于是数列 $\{u_n\}$ 必有界，设 $|u_n|<M$.

因而 $|u_nv_n|<Mv_n$，已知 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

949. 设 $a_n\neq 0 (n=1, 2, \cdots)$, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ $(a\neq 0)$. 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同收敛或同发散.

［证］ 设 $u_n=|a_{n+1}-a_n|$, $v_n=\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a_n|}{\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|a_na_{n+1}|=a^2.$$

∵ $a\neq 0$, ∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同敛散.

950. 已知 $a_n>0$, $b_n\geqslant 0$, $c_n=b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}$. 证明 (1) 若存在自然数 N 及常数 k, 当 $n>N$, $c_n\geqslant k>0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. (2) 若 $n>N$, $c_n\leqslant 0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}=\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

［证］ ∵ 设 $\sum_{k=1}^{n}a_k=s_n$.

由已知，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $c_n\geqslant k>0$,

则 $b_{N+1}\dfrac{a_{N+1}}{a_{N+2}}-b_{N+2}\geqslant k>0,\ b_{N+1}a_{N+1}-b_{N+2}a_{N+2}\geqslant k\cdot a_{N+2};$

$b_{N+2}\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+3}}-b_{N+3}\geqslant k>0,\ b_{N+2}a_{N+2}-b_{N+3}a_{N+3}\geqslant k\cdot a_{N+3};$

… …

$b_{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}-b_n\geqslant k>0,\quad b_{n-1}a_{n-1}-b_na_n\geqslant k\cdot a_n.$

将上述各不等式相加，得

$$b_{N+1}a_{N+1}-b_na_n\geqslant k(a_{N+2}+a_{N+3}+\cdots+a_n).$$

于是 $$\sum_{k=N+2}^{n}a_k\leqslant\frac{1}{k}(b_{N+1}a_{N+1}-b_na_n)\leqslant\frac{1}{k}b_{N+1}a_{N+1}.$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{N+1}+\frac{1}{k}b_{N+1}a_{N+1}.$$

而 N 是确定的常数，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和 s_n 有上界，其上界为常数 $a_1+a_2+\cdots+a_{N+1}+\dfrac{1}{k}b_{N+1}a_{N+1}$.

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $n>N$，其中 N 是确定的常数，$c_n\leqslant0$，即有 $a_nb_n\leqslant a_{n+1}b_{n+1}$.

$$a_nb_n\geqslant a_{n-1}b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_{N+1}b_{N+1},$$

$$a_n\geqslant\frac{1}{b_n}a_{N+1}b_{N+1}$$

$\because\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 发散，$a_{N+1}b_{N+1}$ 是确定的数，$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

951．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^{2n}}{n!}$ 的敛散性.

［解］ $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{2n+2}\cdot n!}{(n+1)!\cdot10^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^2}{n+1}=0.$

由比值判别法，$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^{2n}}{n!}$ 收敛.

952．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}\ (a>0,\ p>0)$ 的敛散性.

［解］ $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}\cdot n^p}{(n+1)^p\cdot a^n}=a.$

由比值判别法，得当 $a>1$ 时，级数发散. 当 $0<a<1$ 时，级数收敛. 当

$a=1$ 时，级数是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，

∴ 当 $p>1$ 时，级数收敛；$p\leqslant 1$ 时，级数发散.

953. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$；　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$.

［解］ (1) ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2}=\frac{1}{2}.$$

由比值判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 收敛.

(2) ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{1\cdot3\cdots(2n-1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(n+1)\cdot3}=\frac{2}{3}.$$

由比值判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ 收敛.

954. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}$ 的敛散性.

［解］ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{[(n+2)!]^{n+1}}{2!4!\cdots(2n+2)!}\cdot\frac{2!4!\cdots(2n)!}{[(n+1)!]^n}$

$$=\frac{(n+2)^n}{(n+3)(n+4)\cdots(2n+2)}<\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1-\frac{1}{n+3}\right]^{-(n+3)}\right\}^{-\frac{n}{n+3}}=\frac{1}{e}.$$

根据比值判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}$ 收敛.

955. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n-1}$ 的敛散性.

[解一]　∵ 利用根值判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{e^n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{e^n-1}}\sqrt[n]{\frac{n}{e^n}}=1\cdot\frac{1}{e}.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n-1}$ 收敛.

[解二]　∵　$0<\frac{n}{e^n-1}<\frac{n}{e^n-\frac{e^n}{2}}=\frac{2n}{e^n}$.

用根值判别法可推得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{e^n}$ 收敛.

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n-1}$ 收敛.

956. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^n}$;　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n+(-1)^n}$.

[解]　(1) ∵　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n}=0$.

根据根值判别法, ∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^n}$ 收敛.

(2) ∵　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{-n+(-1)^n}{n}}=\frac{1}{3}$.

根据根值判别法, ∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n+(-1)^n}$ 收敛.

957. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln n}}$;　　　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(2n^2+3n+4)^{\frac{n-1}{2}}}$.

[解]　(1) ∵ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

(2) $\because$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}=\frac{e}{3}$.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ 收敛.

(3) $\because$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}}=2$.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln n}}$ 发散.

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{(2n^2+3n+4)^{\frac{n-1}{2}}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n^2+3n+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(2n^2+3n+4)^{-\frac{1}{2n}}},$$

$\because$ $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$, $2n^2\leqslant 2n^2+3n+4\leqslant 9n^2$,

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2)^{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}(9n^2)^{\frac{1}{2n}}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+3n+4)^{-\frac{1}{2n}}=1.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(2n^2+3n+4)^{\frac{n-1}{2}}}$ 收敛.

958. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性.

[解一] $\because$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\cdot\frac{\pi}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}}$

$$=\frac{1}{2}.$$

根据根值判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

［解二］ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}.$$

根据比值判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

［解三］ $0<\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$，$0<n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{n^2\pi}{2^n}$.

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi}{2^n}$ 收敛，故由比较判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛。

959．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 的敛散性．

［解一］ ∵ $k(n-k+1)\leqslant\left(\frac{k+n-k+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$(k=1, 2, \cdots, n)$，将 n 个不等式相乘，开平方得

$$n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

则
$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\leqslant\frac{n+1}{2n}<\frac{n+\frac{n}{2}}{2n}<\frac{3}{4}\quad(n>1).$$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。

［解二］ ∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$.

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。

960．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n-2^n}$ 的敛散性。

[解一] $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{4^{n+1}-2^{n+1}}\cdot\frac{4^n-2^n}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{4^n-2^n}{4^{n+1}-2^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{3}{4}.$$

∴ 由比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n-2^n}$ 收敛.

[解二] ∵ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n-2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4\cdot\sqrt[n]{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}}=\frac{3}{4}.$$

∴ 由根值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n-2^n}$ 收敛.

961. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)}{(y+1)(2y+1)\cdots(ny+1)}$ $(x,\ y>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n[\sqrt{2}+(-1)^n]}{2^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

[解] (1) ∵ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x+1}{(n+1)y+1}=\frac{x}{y}.$$

∴ 当 $0<x<y$ 时，由比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)}{(y+1)(2y+1)\cdots(ny+1)}$ 收敛. 当 $x\geqslant y>0$ 时，级数发散.

(2) ∵ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{n+\frac{1}{n}}=0.$$

∴ 根据根值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

(3) $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据比较判别法，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散。

(4) $\because$ $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}=0.$$

根据根值判别法，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

(5) $\because$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2}+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}$.

根据根值判别法，$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[\sqrt{2}+(-1)^n]}{2^n}$ 收敛。

(6) $\because$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}\cdot\frac{2^{n^2}}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0$.

$\therefore$ 根据比值判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛。

962. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;　　　(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

［解］ (1) 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

$$\because \int_2^{+\infty}f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{dt}{t\ln t}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln|\ln x|-\ln|\ln 2|)=+\infty.$$

$\therefore$ 由积分判别法 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散。

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$.

$$\int_3^{+\infty}f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_3^x f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_3^x\frac{dt}{t\ln t\ln\ln t}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln|\ln|\ln t||-\ln|\ln\ln 3|)=+\infty.$$

$\therefore$ 由积分判别法 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ 发散.

963. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1+\alpha}}\quad(\alpha>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^{1+\alpha}}\quad(\alpha>0)$.

[解] (1) 令 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{1+\alpha}}$.

$$\because\quad \int_2^{+\infty}f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{dt}{t(\ln t)^{1+\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha(\ln x)^{\alpha}}+\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}.$$

由积分判别法, $\therefore\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{1+\alpha}}(\alpha>0)$ 收敛.

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{1+\alpha}}$,

$$\because\quad \int_3^{+\infty}f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_3^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t(\ln\ln t)^{1+\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha(\ln\ln x)^{\alpha}}+\frac{1}{\alpha(\ln\ln 3)^{\alpha}}\right)=\frac{1}{\alpha(\ln\ln 3)^{\alpha}}.$$

由积分判别法, $\therefore\ \sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^{1+\alpha}}$ 收敛.

964. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}\ (\alpha>0,\ \beta>0)$ 的敛散性.

[解] (1) 当 $\alpha>1$ 时, $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}<\frac{1}{n^{\alpha}}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛, 得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$ 收敛.

(2) 当 $0<\alpha<1$ 时, 取 α_0, $\alpha<\alpha_0<1$, 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha_0}}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha_0-\alpha}}{\ln^{\beta}n}=\infty.$$

得出当 n 充分大时, 有 $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}>\frac{1}{n^{\alpha_0}}$. 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha_0}}$ 发散, 故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$ 发散.

(3) 当 $\alpha=1$ 时,令

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^\beta x},\quad \int_2^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t}=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t}.$$

由此即可得若 $\beta>1$, 则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^\beta n}$ 收敛; 若 $0<\beta\leqslant1$, 则该级数发散。

965. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ 的敛散性。

[解] 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}$.

$$\because\quad \int_2^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t}}\ln\frac{t+1}{t-1}\,dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{t}\ln\frac{t+1}{t-1}+4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{t}+2\ln\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right]\Bigg|_2^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1}+4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+2\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right\}$$

$$-[2\sqrt{2}\ln3+4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}+4\ln(\sqrt{2}-1)],$$

$$\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}2\ln\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2\sqrt{x}}{x-1}}=0.$$

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,dt=2\pi-2\sqrt{2}\ln3-4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}-4\ln(\sqrt{2}-1).$$

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ 收敛。

966. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 的敛散性。

[解] $\because\quad n^n>n!\quad(n=2,3,\cdots)$,

$$n\ln n>\ln(n!),\quad \frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{\ln(n!)}.$$

由于 $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ 发散, 故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散。

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 发散。

967. 利用级数收敛的必要条件,求证下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\quad(a>0)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0\quad(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$.

[解] (1) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0,$$

得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 收敛,根据级数收敛的必要条件

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

(2) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}(a>1)$,

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{a^{(n+1)!}}\cdot\frac{a^{n!}}{(2n)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{[(n+1)!-n!]}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n\cdot n!}}=0,$$

得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}(a>1)$ 收敛,根据级数收敛的必要条件

$$\therefore\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0\quad(a>1).$$

(3) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$,

$$\because\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$ 收敛,根据级数收敛的必要条件

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$$

(4) 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$,

$$\because \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0,$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ 收敛，根据级数收敛的必要条件

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$$

968. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}(x>0)$ 的敛散性.

［解］ $\because \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x+n+1}{n+1}-1\right)=x,$

$\therefore$ 根据拉阿贝判别法，

当 $x>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ 收敛.

当 $0<x<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ 发散.

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散.

969. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ 的敛散性.

［解］ $\because \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 根据拉阿贝判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ 收敛.

970. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}(a,\ b,\ d>0)$ 的敛散性.

［解］ $\because \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{b+(n+1)d}{a+(n+1)d}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+n(n+1)d-na-n(n+1)d}{a+(n+1)d}=\frac{b-a}{d}.$$

根据拉阿贝判别法

$\therefore$ 当 $\frac{b-a}{d}>1$ 时，级数收敛；$\frac{b-a}{d}<1$ 时，级数发散.

当 $\frac{b-a}{d}=1$ 时，则 $b=a+d$。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{(a+2d)(a+3d)\cdots[a+(n+1)d]}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+d}{a+(n+1)d}.$$

由比较判别法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+d}{a+(n+1)d}}{\frac{1}{n}}=\frac{a+d}{d}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故当 $\frac{b-a}{d}=1$ 时级数亦发散。

(3) 变号级数收敛性的判别

971. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-3}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(4n+5)}$.

［解］ (1) ∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-3}$ 是交叉级数，$\left\{\frac{1}{2n-3}\right\}$ 单调减少且趋于0，

∴ 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-3}$ 收敛.

(2) ∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(4n+5)}$ 是交叉级数，$\left\{\frac{1}{\ln(4n+5)}\right\}$ 单调减少且趋于0，

∴ 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(4n+5)}$ 收敛.

972. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+10}$ 的敛散性.

［解］ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$ 是交叉级数，$\frac{\sqrt{n}}{n+10}$ 单调减少，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+10}=0.$$

∴ 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$ 收敛.

973. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 的敛散性.

［解］ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 是交叉级数. 此外,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

很明显，数列 $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ 单调减少且趋于 0，根据莱布尼茨判别法，∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛.

974. 试判别级数 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}+\cdots$ $(\alpha>0)$ 的敛散性.

［解］ (1) 当 $\alpha=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，根据莱布尼茨判别法，级数收敛.

(2) 当 $\alpha>1$ 时.

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$ $(\alpha>1)$ 收敛，根据级数的性质 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$ 发散，

即 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}+\cdots(\alpha>1)$ 发散.

(3) 当 $0<\alpha<1$ 时，

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}\right).$$

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}=\frac{1}{(2n)^\alpha}\cdot\left[\frac{(2n)^\alpha}{2n-1}-1\right],\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^\alpha}{2n-1}=0,$$

故当 n 充分大时 $\frac{(2n)^\alpha}{2n-1}-1$ 恒负.

再由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{v_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2n)^\alpha}\left[\frac{(2n)^\alpha}{2n-1}-1\right]}{\frac{1}{(2n)^\alpha}}\right|=1$，以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$ 发散，

得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\left[\frac{(2n)^{\alpha}}{2n-1}-1\right]$发散.

∴ 当$0<\alpha<1$时,

$$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}+\cdots$$

发散.

975. 已知$a>0$, $b>0$, 试讨论级数

$$\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots$$

的敛散性.

[解] 原级数可写为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)+(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)+(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(a-b)}{2n}+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}\right].$$

显然, (1) 当$a=b$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)+(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}$$

$$=\frac{a+b}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

由莱布尼茨判别法,知该级数收敛.

(2) 当$a\neq b$时,

$$\because\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a-b}{2n}=(a-b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

发散,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}=\frac{a+b}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

收敛,根据级数的运算性质,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)+(-1)^{n+1}(a+b)}{2n}$发散.

976. 证明若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛; 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不是正项级数,那末结论如何?

[证] (1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则由必要条件$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，于是

由正项级数的比较判别法；$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不是正项级数，如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，由莱布尼茨判别法，可知这一级数收敛，但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散．又如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$．由莱布尼茨判别法，可知该级数收敛，这时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

也收敛．$\therefore$ 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不是正项级数，结论不一定成立．

977．判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$是绝对收敛，条件收敛还是发散（其中$a>0$）．

［解］ (1) $a>1$时，则$\sqrt[n]{a}>1$．由洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a.$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由正项级数的比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$发散．　故　级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$非绝对收敛．

又$0<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n-1]{a}$，故 数列$\{\sqrt[n]{a}-1\}$单调减少．$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)=0$．

$\therefore$ 根据莱布尼茨判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$条件收敛．

(2) $0<a<1$时，与上面同理可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$条件收敛．

(3) $a=1$时，级数绝对收敛．

978. 下列级数中，哪些是绝对收敛，哪些是条件收敛，哪些是发散的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$.

［解］ (1) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛．

(2) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2n^2}=0$．由比值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n!}$ 收敛．$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$ 绝对收敛．

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，$\therefore$ 由级数收敛的必要条件，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$ 发散．

(4) 交叉级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$，并且 $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$ 单调减少趋于 0，

根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 收敛．

又
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right|=1,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数非绝对收敛．

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 条件收敛．

979. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\ln n}$ 的敛散性．

［解］ $\because$ 级数为 $-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}-\frac{1}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 7}+\frac{1}{\ln 8}-\cdots$，

当 $n=4k$ 时 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=1$；$n=4k+1$ 时 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=-1$；$n=4k+2$

时 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=-1$; $n=4k+3$ 时 $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=1$.

由上可见 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right|\leqslant 2$.

此外 $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调减少，且趋于零.

∴ 根据狄利克雷判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\ln n}$ 收敛.

980. 判别级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$$

是绝对收敛，条件收敛，还是发散.

[解] 原级数的通项为

$$a_n=(-1)^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}\cdot\frac{1}{n},\quad |a_n|=\frac{1}{n},$$

∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 非绝对收敛.

又 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}\right|\leqslant 3$，且数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减少趋于零，根据狄利克雷判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛.

981. 判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$.

[解] (1) ∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$，又

$$[(n+1)-\ln(n+1)]-[n-\ln n]=1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,$$

∴ 数列 $\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$ 单调减少.

根据莱布尼茨判别法，交叉级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 收敛.

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n-\ln n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n}}=1,$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|$ 发散. $\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

(2) $\because$ $2\sin\dfrac{\alpha}{2}(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha)$

$$=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\cos\frac{2n-1}{2}\alpha-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right)$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha.$$

取 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$,

则有 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{6}\right|=\frac{\left|\cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{12}\right|}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi}{12}\right|}.$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{6}$ 部分和有界. 又数列 $\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}$ 单调减少趋于 0,

由狄利克雷判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛.

此外，

$$\left|\frac{\sin\dfrac{n\pi}{6}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\dfrac{n\pi}{6}}{\ln n}=\frac{1}{\ln n}\cdot\left(\frac{1-\cos\dfrac{n\pi}{3}}{2}\right)=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\dfrac{n\pi}{3}}{2\ln n}.$$

显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\ln n}$ 发散，再根据狄利克雷判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{3}}{2\ln n}$ 收敛.

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2\ln n}-\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{3}}{2\ln n}\right)$ 发散.

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{6}}{\ln n}\right|$ 发散.

综上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 条件收敛.

982. 判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^t$ （其中 t 是参数）.

［解］ (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$.

显然当 $n>2$ 时，$0<\frac{1}{\ln n}<1<\frac{\pi}{2}$，故级数为交叉级数.

首先考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$.

$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}}=1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 发散，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 非绝对收敛.

其次，当 $n>2$ 时，由对数函数的单调性和正弦函数的单调性有

$$\sin\frac{1}{\ln(n+1)}<\sin\frac{1}{\ln n}.$$

又 $\because \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$. 由莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 收敛.

$\therefore$ 由上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$ 条件收敛.

(2) 设 $a_n=(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^t$.

(i) 当 $t<0$ 时，

$$\because \quad (2k-1)(2k+1)<(2k)^2,$$

$$\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}>1,$$

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n-2)^2\cdot(2n)^2}{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots(2n-3)^2\cdot(2n-1)^2}$$

$$=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)}$$

$$>\frac{(2n)^2}{(2n-1)}>2n.$$

故当 $n\to\infty$ 时 $(t<0)$，$a_n=(-1)^n\cdot\left\{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\right\}^{\frac{t}{2}}$ 不可能趋于零。由级数收敛的必要条件，当 $t<0$，∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(ii) ∵ 当 $t=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^0$ 显然发散.

(iii) 当 $0<t<2$ 时，考虑

$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 由 (i) 中讨论可得 $0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{2n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 且

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{(2n+1)}{(2n+2)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!},$$

故 a_n 单调减少. 根据莱布尼茨判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

又 $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^t,$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^t\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^t}{\frac{1}{2n+2}}\cdot\frac{n}{2n+2}=\frac{t}{2}.$$

根据拉阿贝判别法，当 $0<\frac{t}{2}<1$，即 $0<t<2$ 时 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 由此可得，当 $0<t<2$ 时 ∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

(iv) 当 $t=2$ 时，

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$，

考虑

$$|a_n|=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n-2)(2n)}\right]^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2.$$

$$\because\quad\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}>\frac{n-1}{n},$$

$$\therefore\quad\left(\frac{3}{4}\right)^2>\frac{1}{2},\ \left(\frac{5}{6}\right)^2>\left(\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{7}{8}\right)^2>\frac{3}{4},\ \cdots,\ \left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)^2>\frac{n-2}{n-1},$$

将上面各不等式相乘，

$$|a_n|>\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{4n}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛。

(v) 当$t>2$时，$\frac{t}{2}>1$. 由(iii)中讨论以及拉阿贝判别法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，∴ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛。

983. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，求证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$发散。

[证] 由反证法，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$收敛，那末$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(na_n)$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调降有下界，且$\left|\frac{1}{n}\right|\leqslant1$.

根据阿贝尔判别法可以断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot(na_n)$必收敛，与已知矛盾。

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$发散。

984. 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$收敛。

[证] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\frac{1}{n}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，而数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$为正的递减数列。

根据阿贝尔判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$收敛。

985. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$的敛散性。

［解］ 令$a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$, $b_n=\sin nx$.

$$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)>0.$$

数列$\{a_n\}$单调减少. 此外,由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0. \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

又
$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

故
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

当$x\neq 2k\pi$时, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$部分和有界.

根据狄利克雷判别法,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$收敛.

当$x=2k\pi$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin n\pi}{n}=0$, 亦收敛.

∴ 对一切x, 级数均收敛.

986. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$的敛散性.

［解］ $\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}[\cos k(k-1)-\cos k(k+1)]$,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}[1-\cos n(n+1)]\leqslant 1.$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\sin n^2$部分和有界. 又数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调减少趋于零.

∴ 根据狄利克雷判别法,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$收敛.

987. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$的敛散性。

[解] $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2}=1+0-1+0+1+\cdots$.

显然$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2}\right|\leqslant 2$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$部分和有界.

且数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调减少趋于0，根据狄利克雷判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$收敛。

988. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$的敛散性.

[解一] $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2}\right|\leqslant 2$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$部分和有界. 对数列

$$\{a_n\}=\left\{\frac{3n-5}{n^2}\right\},$$

有

$$a_n-a_{n+1}=\frac{3n-5}{n^2}-\frac{3n-2}{(n+1)^2}=\frac{3n^2-7n-5}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{3n(n-3)+2n-5}{n^2(n+1)^2}>0\quad(n>3).$$

即数列单调减少，并且易知a_n趋于0，根据狄利克雷判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$收敛。

[解二] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)\cdot\left(\frac{3n-5}{n}\right)$.

由上题结论，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$收敛。

又对数列$\{a_n\}=\left\{\frac{3n-5}{n}\right\}$有

$$a_n-a_{n+1}=\frac{3n-5}{n}-\frac{3n-2}{n+1}=\frac{-5}{n(n+1)}<0,$$

即数列单调增加，且 $\frac{3n-5}{n}<3$，数列有界.

根据阿贝尔判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-5)\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$ 收敛.

989. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

[解] 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|\leqslant 1+\sqrt{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0,$$

且数列 $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调减少.

根据狄利克雷判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 收敛.

而数列 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ 单调增加且有界.

因此根据阿贝尔判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

由上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

§2. 函数项级数

(1) 一致收敛

990. 讨论下列函数列的一致收敛性:

(1) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$;　　　(2) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$.

[解] (1) 对任何实数 x，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n}=0.$$

任给 $\varepsilon>0$，由　$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$.

取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，对一切$x$有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。

∴ 函数列$f_n(x)$在$(-\infty, +\infty)$一致收敛。

(2) 对任何实数x，有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0$。且

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|,$$

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$。不论$n$为何值，取$x_n=\frac{n\pi}{2}$，

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\sin\frac{\frac{n\pi}{2}}{n}\right|=1>\varepsilon_0,$$

∴ 函数列$f_n(x)$在$(-\infty, +\infty)$非一致收敛。但对任何$a<b$，$f_n(x)$在$[a, b]$是一致收敛的，这是因为令$\xi=\max(|a|, |b|)$，那么当n充分大时，对一切$x\in[a, b]$有$\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\sin\frac{\xi}{n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\xi}{n}=0$，所以$f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$在$[a, b]$一致收敛，或者说$f_n(x)$在$(-\infty, +\infty)$内闭一致收敛。

991. 讨论下列函数列的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$，$x\in[0, 1]$；

(2) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$，$x\in[0, 1]$。

[解] (1) $x\in[0, 1]$时，显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^n-x^{n+1})=0.$$

任给$\varepsilon>0$，$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}$。

令$g(x)=x^n-x^{n+1}$，下面求$g(x)$在$[0, 1]$上的最大值。由

$$g'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=(n+1)x^{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}-x\right),$$

$$g''(x)=n(n-1)x^{n-2}-(n+1)nx^{n-1}$$

$$=n(n+1)x^{n-2}\left(\frac{n-1}{n+1}-x\right).$$

$$g'\left(\frac{n}{n+1}\right)=0,\quad g''\left(\frac{n}{n+1}\right)<0,$$

∴ $x=\frac{n}{n+1}$是$g(x)$的极大值点，且是最大值点。

又 $x^n-x^{n+1}=x^n(1-x)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[0, 1]$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n(1-x)|<\varepsilon.$$

∴ 函数列 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

(2) $x\in[0, 1]$ 时, 显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{2n}.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$, 不论 n 为何值, 取 $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}>\varepsilon_0.$$

∴ $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛, 但非一致收敛.

992. 讨论函数列 $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ 在下列指定区间的一致收敛性:

(1) $(0, 1)$; (2) $[\delta, 1]$; (3) $[\delta, +\infty)$ $(\delta>0)$.

[解] (1) $x\in(0, 1)$ 时, 显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=1-\sqrt[n]{x}.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$, 不论 n 为何值, 取 $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\left|f_n\left(\frac{1}{2^n}\right)-f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

∴ $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非一致收敛.

(2) $x\in[\delta, 1]$ 时, 显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1.$$

任给 $\varepsilon>0(\varepsilon<1)$, 由

$$|f_n(x)-f(x)|=1-\sqrt[n]{x}<1-\sqrt[n]{\delta}<\varepsilon,$$

得 $\sqrt[n]{\delta}>1-\varepsilon$, $\frac{1}{n}\lg\delta>\lg(1-\varepsilon)$, $\frac{1}{n}<\frac{\lg(1-\varepsilon)}{\lg\delta}$, $n>\frac{\lg\delta}{\lg(1-\varepsilon)}$.

取$N=\left[\dfrac{\lg\delta}{\lg(1-\varepsilon)}\right]$，当$n>N$，对一切$x\in[\delta, 1]$有

$$|f_n(x)-f(x)|=|1-\sqrt[n]{x}|<\varepsilon.$$

∴ 函数列$f_n(x)$在$[\delta, 1]$上一致收敛.

(3) $x\in[\delta, +\infty)$时，显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=|1-\sqrt[n]{x}|.$$

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，不论$n$为何值，取$x_n=2^n$，$|f_n(x_n)-f(x_n)|=|1-2|>\varepsilon_0$.

∴ $f_n(x)$在$[\delta, +\infty)$上非一致收敛.

993. 讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$在下列区间的一致收敛性：

(1) $[0, 1-\delta]$； (2) $[1-\delta, 1+\delta]$；

(3) $[1+\delta, +\infty)$ $(0<\delta<1)$.

[解] (1) $x\in[0, 1-\delta]$时，(其中$0<\delta<1$)，显然有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=0.$$

任给$\varepsilon>0$，$|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{x^n}{1+x^n}$.

∵ $\dfrac{x^n}{1+x^n}=1-\dfrac{1}{1+x^n}$，当$x\in[0, 1-\delta]$时，$\dfrac{x^n}{1+x^n}$单调增加.

$$\therefore\quad |f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}<\frac{(1-\delta)^n}{1+(1-\delta)^n}<(1-\delta)^n<\varepsilon.$$

对于任给$0<\varepsilon<1$，取$N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg(1-\delta)}\right]$，当$n>N$时，对一切$x\in[0, 1-\delta]$ $(\delta>0)$有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

∴ 函数列$f_n(x)$在$[0, 1-\delta]$上一致收敛.

(2) $x\in[1-\delta, 1+\delta]$ $(0<\delta<1)$时，

若$x\in(1, 1+\delta)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=+\infty$，

若$x\in(1-\delta, 1)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

于是 $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[1-\delta,1),\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x\in(1,1+\delta].\end{cases}$$

每一个 $f_n(x)$ 都在 $[1-\delta,1+\delta]$ 连续，但 $f(x)$ 在 $[1-\delta,1+\delta]$ 不连续，

∴ 函数列 $f_n(x)$ 在 $[1-\delta,1+\delta]$ 上非一致收敛.

(3) $x\in[1+\delta,+\infty)$ 时，显然 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=1$.

任给 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，由 $|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{1+(1+\delta)^n}<\varepsilon$.

于是取 $N=\left[\frac{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{\lg(1+\delta)}\right]$，当 $n>N$，对一切 $x\in[1+\delta,+\infty)$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

∴ 函数列 $f_n(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

994. 若函数列 $\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$ 都在 $[a,b]$ 上一致收敛，求证函数列 $\{Au_n(x)+Bv_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛，(其中 A, B 是常数).

［证］ ∵ 函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon$.

同理由函数列 $\{v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|v_n(x)-v(x)|<\varepsilon$.

于是对于函数列 $\{Au_n(x)+Bv_n(x)\}$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}&|Au_n(x)+Bv_n(x)-Au(x)-Bv(x)|\\ &\leqslant|A[u_n(x)-u(x)]|+|B[v_n(x)-v(x)]|\\ &<(|A|+|B|)\varepsilon.\end{aligned}$$

∴ 函数列 $\{Au_n(x)+Bv_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

995. 若函数列 $\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且一致有界，求证：函数列 $\{u_n(x)\cdot v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

［证］ 设 $\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上分别一致收敛于 u、v，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon,\ |v_n(x)-v(x)|<\varepsilon.$$

由 $\{u_n(x)\}$、$\{v_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界，则存在 $M>0$，对一切 $x\in[a, b]$ 和一切 n 有 $|u_n(x)|<M$，$|v_n(x)|<M$.

$$\therefore\quad |v(x)|\leqslant|v(x)-v_n(x)|+|v_n(x)|<\varepsilon+M.$$

于是对上述任给 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[a, b]$ 有

$$\begin{aligned}|u_n(x)v_n(x)-u(x)v(x)|&=|u_n(x)v_n(x)-u_n(x)v(x)\\&\quad+u_n(x)v(x)-u(x)v(x)|\\&\leqslant|u_n(x)|\cdot|v_n(x)-v(x)|+|v(x)|\cdot|u_n(x)-u(x)|\\&\leqslant M\cdot\varepsilon+(M+\varepsilon)\cdot\varepsilon=(2M+\varepsilon)\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

∴ 函数列 $\{u_n(x)v_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

996. 讨论下列函数级数在指定区间内的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$，$x\in(-\infty, +\infty)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$，$x\in(0, +\infty)$.

［解］ (1) 对任给 $\varepsilon>0$，由

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x^2}\right|=\left|\frac{1}{n+1+x^2}-\frac{1}{n+2+x^2}+\cdots\right|$$

$$<\frac{1}{n+1+x^2}\leqslant\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in(-\infty, +\infty)$ 有 $|R_n(x)|<\varepsilon$. 即函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，以及每一个 $x\in(0, +\infty)$，由

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right]\right|<\frac{1}{nx+1}<\varepsilon.$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{x\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时，$|R_n(x)|<\varepsilon$. 即函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$$

在 $(0, +\infty)$ 内收敛.

又，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{6}$，不论如何取 n，总存在 $x_n=\frac{1}{n}\in(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned}|R_n(x_n)|&=\left|\left(\frac{1}{nx_n+1}-\frac{1}{(n+1)x_n+1}\right)\right.\\&\quad+\left(\frac{1}{(n+1)x_n+1}-\frac{1}{(n+2)x_n+1}\right)+\cdots\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{2nx_n+1}-\frac{1}{(2n+1)x_n+1}\right)+\cdots\right|\\&>\left|\frac{1}{nx_n+1}-\frac{1}{(n+1)x_n+1}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)x_n+1}-\frac{1}{2nx_n+1}\right|\\&=\left|\frac{1}{nx_n+1}-\frac{1}{2nx_n+1}\right|=\frac{1}{1+1}-\frac{1}{2+1}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

∴ 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 内非一致收敛.

［说明］ (1) 第一小题非绝对收敛，但是一致收敛，第二小题绝对收敛，但是非一致收敛，这说明绝对收敛与一致收敛是两个不相同的概念.

(2) 函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+x^2},$$

亦可用狄利克雷判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和一致有界；函数列 $\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\}$ 关于 n 单调，且关于 $x\in(-\infty, +\infty)$ 一致趋于零，∴ 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 一致收敛.

997. 判别下列函数级数在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$.

［解］ (1) $\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2n^{\frac{5}{2}}|x|}{1+n^5x^2}\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

∵ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，

∴ 根据优级数判别法，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(2) $\left|\frac{x}{1+n^3x^2}\right|=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2n^{\frac{3}{2}}|x|}{1+n^3x^2}\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，根据优级数判别法，$\therefore$ 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

998. 判别下列函数级数在指定区间上一致收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{k}\leqslant|x|\leqslant k$, 其中 k 为自然数；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$, $x\in(-\infty, +\infty)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x\in(-2, +\infty)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, $x\in(-\infty, +\infty)$.

［解］ (1) $\left|\frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^3}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\leqslant\frac{n^3}{\sqrt{n!}}2\cdot k^n$.

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{\sqrt{(n+1)!}}\cdot 2\cdot k^{n+1}}{\frac{n^3}{\sqrt{n!}}\cdot 2\cdot k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot k}{n^3\cdot\sqrt{n+1}}=0.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n!}}\cdot 2\cdot k^n$ 收敛. 根据优级数判别法，函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$$

在 $\frac{1}{k}\leqslant|x|\leqslant k$ 上一致收敛.

(2) $\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

(3) $x\in(-2, +\infty)$, 故 $n>2$ 时，

$$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|=\frac{1}{x+2^n}=\frac{1}{(x+2^{n-1})+2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}.$$

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，∴ 根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(4) $\left|\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2e^{n^2x^2}}\leqslant\frac{1}{n^2}.$

∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，∴ 根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

999. 判别函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^nx\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性，其中 $\{x\}$ 表示 x 到最邻近的整数的距离.

［解］ 显然

$$0\leqslant|\{10^nx\}|\leqslant\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad \left|\frac{1}{10^n}\{10^nx\}\right|\leqslant\frac{1}{2\cdot 10^n},$$

∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 10^n}$ 收敛，根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^nx\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛.

［说明］ 由这一级数确定的函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^nx\}$ 有一个很奇特的性质：$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，但在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处不可导.

1000. 判别函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[1+\delta, +\infty)$ $(\delta>0)$ 上的一致收敛性.

［解］ ∵ $x>1$，有 $0<\ln(1+nx)<1+nx$，

$$\left|\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}\right|\leqslant\frac{1+nx}{nx^n}<\frac{2nx}{nx^n}=\frac{2}{x^{n-1}}<\frac{2}{(1+\delta)^{n-1}}.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(1+\delta)^{n-1}}$ 收敛，根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[1+\delta, +\infty)$ 上一致收敛.

1001. 讨论函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n+x^2}}$在$(-\infty, +\infty)$的一致收敛性.

［解］ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n\pi}{3}$的部分和显然有界：$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{3}\right|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

而函数列$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\right\}$关于$n$是单调减少的，并且关于一切$x\in(-\infty, +\infty)$，函数列一致趋于0，∴ 根据狄利克雷判别法，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n+x^2}}$在$(-\infty, +\infty)$一致收敛.

1002. 判别函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$在$[0, +\infty)$的一致收敛性.

［解］ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{n}{n+x}$.

由莱布尼茨判别法，交叉级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，又对一切$x\in[0, +\infty)$和一切$n$，$0<\frac{n}{n+x}<1$，并且数列$\left\{\frac{n}{n+x}\right\}$对任意$x\in[0, +\infty)$关于$n$，单调增加且有上界.

根据阿贝尔判别法，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$在$[0, +\infty)$上一致收敛.

1003. 讨论函数级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin x+\ln n}$在$[0, 2\pi]$上的一致收敛性.

［解］ 级数$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n$的部分和显然有界，即$\left|\sum_{k=3}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 2$.

而函数列$\left\{\frac{1}{\sin x+\ln n}\right\}$关于$n$是单调减少的，并且对一切$x\in[0, 2\pi]$，函数列一致收敛于0，∴ 根据狄利克雷判别法，函数级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin x+\ln n}$在$[0, 2\pi]$一致收敛.

1004. 讨论函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,\ 1]$ 上的一致收敛性.

［解］ $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=(1-x)\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$=1-x^{n+1}$.

于是，
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

级数的每一项在 $[0,\ 1]$ 连续，但其和 S 在 $[0,\ 1]$ 不连续。

∴ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,\ 1]$ 上收敛，但非一致收敛.

事实上，只要取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，$x_0=\frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}}$，不论 n 为何自然数，都有
$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=\left|1-\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

1005. 讨论函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n(1-x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上的一致收敛性.

［解］ 设 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kx^k(1-x)$,
$$(1-x)\sum_{k=1}^{n}(-x)^k=(1-x)\cdot\frac{-x[1-(-x)^n]}{1+x}.$$

当 $x\in[0,\ 1]$ 时，
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{x(x-1)}{1+x}.$$

对任给 $\varepsilon>0$,
$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\frac{x(x-1)}{1+x}+\frac{(1-x)x[1-(-x^n)]}{1+x}\right|$$
$$=\left|\frac{1-x}{1+x}(-x)^{n+1}\right|=\frac{1-x}{1+x}\cdot x^{n+1}$$
$$<(1-x)\cdot x^{n+1}.$$

易知函数 $f(x)=(1-x)\cdot x^{n+1}$ 在 $[0,\ 1]$ 上的最大值为
$$f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}.$$

$$|S(x)-S_n(x)|<(1-x)x^{n+1}\leqslant\frac{1}{n+2}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

于是，对任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使得 $n>N$ 时，对一切 $x\in[0,1]$ 有

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

1006．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，求证函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，在 $[-a,a]$ $(0<a<1)$ 上一致收敛．并问该函数级数在 $[-1,1]$ 上是否一致收敛？在 $[0,1]$ 上是否一致收敛？

［解］ ∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由收敛级数必要条件 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$．故 $|a_n|\leqslant M$，其中 M 为常数。

于是 $|a_nx^n|\leqslant Ma^n$．由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛 $(0<a<1)$，根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-a,a]$ $(0<a<1)$ 上一致收敛．

但函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-1,1]$ 上的一致收敛性不确定．如取 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot x^n$．在 $x=-1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-1,1]$ 上非一致收敛．

此外，在 $[0,1]$ 上，∵ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而函数列 $\{x^n\}$ 关于 n 是单调的，且对一切 $x\in[0,1]$ 和一切 n 有 $|x^n|\leqslant1$；

根据阿贝尔判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛．

1007．已知函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，求证

$$\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\cdots$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛．

［证明］ ∵ 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}$，有

$$\left|\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，根据优级数判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

1008. 判别函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在下列区间上的一致收敛性：

(1) $[\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<1)$；　(2) $(0, 2\pi)$.

［解］ (1) ∵ $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

则 $$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{2}{2\sin\frac{\delta}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\quad(0<\delta<1).$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和有上界 $\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$.

且数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减少趋于零，

根据狄利克雷判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

(2) 对 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$，取 $x_n=\frac{\pi}{4n}$. 无论 n 为何值，有

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{\sin kx_n}{k}\right|=\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{\sin\frac{k\pi}{4n}}{k}\right|$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{n}+\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{(n+2)\pi}{4n}}{n+2}+\cdots+\frac{\sin\frac{2n\pi}{4n}}{2n}\right|$$

$$\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0, 2\pi)$非一致收敛.

［说明］ 由(1)(2)知函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0, 2\pi)$非一致收敛，但在$(0, 2\pi)$内是闭一致收敛. 此外利用狄利克雷判别法立即得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0, 2\pi)$收敛，显然它在$[0, 2\pi]$也收敛.

1009. 求证函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[-1, 1]$上收敛，但非一致收敛.

［证］ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}$当$x\in[-1, 1]$且$x\neq 0$时，由等比级数的收敛性得上述级数收敛. 又当$x=0$时级数显然收敛.

$\therefore$ 函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[-1, 1]$上收敛，且收敛于1.

此外，取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$以及$x_0=(2^{\frac{1}{n}}-1)^{\frac{1}{2}}\in[-1, 1]$,

$$\because \quad |S_n(x_0)-S(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_0^2}{(1+x_0^2)^k}-1\right|$$

$$=\left|x_0^2\cdot\frac{\frac{1}{1+x_0^2}\left(1-\frac{1}{(1+x_0^2)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+x_0^2}}-1\right|$$

$$=\frac{1}{(1+x_0^2)^n}=\frac{1}{2}\geqslant\varepsilon_0.$$

$\therefore$ 函数级数在$[-1, 1]$上非一致收敛.

1010. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$在$[a, b]$上一致收敛，求证$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上也一致收敛.

［证］ 设$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|u_k(x)|$.

根据柯西准则，对任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，对一切自然数P和一切$x\in[a, b]$，有$|P_{n+p}(x)-P_n(x)|<\varepsilon$.

即 $$|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

又
$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|$$
$$<|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|$$
$$=|P_{n+p}(x)-P_n(x)|<\varepsilon.$$

再根据柯西收敛准则，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

1011. 证明函数列 $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛，但是 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

［证］ $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n(1-x^n)=0,\quad x\in[0, 1]$.

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n(1-x^n).$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$，不论 n 为何值，取 $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，

有
$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{4}>\varepsilon_0.$$

$\therefore f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛.

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

$$\therefore\quad \int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x^n)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)=0.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx.$$

［说明］ 这表明一致收敛是极限可以通过积分号的充分条件，但非必要条件.

1012. 讨论函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 的连续区间，并计算 $\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}dx$ 的值.

［解］ 当 $x\leqslant 0$ 时，$ne^{-nx}\geqslant n$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 发散.

当 $x>0$ 时，考虑级数在 $[\delta,+\infty)$ 上的敛散性 $(\delta>0)$.

$$|ne^{-nx}|=\frac{n}{e^{nx}}<\frac{n}{e^{n\delta}}.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e^{n\delta}}}=\frac{1}{e^{\delta}}<1.$$

由根值判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n\delta}}$ 收敛. 根据优级数判别法，函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 由于 ne^{-nx} 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续，于是可得函数 $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续. 而 δ 是任意正数，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

此外，由级数的一致收敛得

$$\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2 ne^{-nx}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-e^{-nx}\Big|_1^2\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n}-e^{-2n})$$

$$=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}-\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}=\frac{e}{e^2-1}.$$

1013. 设函数 $f(x)$ 由下列等式定义：

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\cdots.$$

求证 $f(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 连续，并计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

［证］ $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$

在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上有 $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|<1$.

$$\therefore\quad \left|\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\right|\leqslant\left|\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛，从而它在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 连续.

此外又有

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\,dx$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{x}{2^n}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\ln\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}},$$

由关系式

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots=\frac{\sin x}{x}\quad(见[说明])$$

$$\therefore\quad\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=-\ln\frac{\sin x}{x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\ln\frac{2}{\pi}+\ln\frac{3}{\pi}=\ln\frac{3}{2}.$$

[说明] $$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

于是 $$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

1014. 证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且有连续导数.

[证] 由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，∴ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，故它在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

又 $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{\cos nx}{n^2}$, $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

$$\therefore\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

显然 $\frac{\cos nx}{n^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 连续，又知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

$\therefore f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$连续，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有连续的导数.

1015. 若$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^3x^2}$，求$f'(x)$.

[解] $\left(\frac{1}{n^2+n^3x^2}\right)'=-\frac{2n^3x}{(n^2+n^3x^2)^2}$.

考虑函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2n^3x}{(n^2+n^3x^2)^2}$,

当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\left|-\frac{2n^3x}{(n^2+n^3x^2)^2}\right|=\frac{2n^3|x|}{(n^2+n^3x^2)^2}=\frac{2n^3|x|}{n^4+2n^5x^2+n^6x^4}$$
$$\leqslant\frac{2n^3|x|}{n^4+2n^5x^2}\leqslant\frac{2n^3|x|}{2\sqrt{2n^9x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{1.5}}<\frac{1}{n^{1.5}}.$$

当 $|x|>1$ 时，

$$\left|-\frac{2n^3x}{(n^2+n^3x^2)^2}\right|\leqslant\frac{2n^3|x|}{2\cdot n^2\cdot n^3\cdot x^2}=\frac{1}{n^2|x|}<\frac{1}{n^{1.5}}.$$

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ 收敛，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+n^3x^2}\right)'$ 在$(-\infty,+\infty)$一致收敛.

又 $\because \frac{1}{n^2+n^3x^2}<\frac{1}{n^2}$，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+n^3x^2}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛.

得 $f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^3x^2}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n(1+nx^2)^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

1016. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上收敛但不是一致收敛，而它的和在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续.

[证] 考虑部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]=nxe^{-nx},$$

显然在 [0, 1] 上其极限函数 $S(x)$ 存在且连续。即

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=0.$$

但是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$ 在 [0, 1] 上非一致收敛.

用反证法. 若级数一致收敛，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N(\varepsilon)$ 时，对于 [0, 1] 上一切 x，都有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 不妨取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$，应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$.

另取 $x=x_0=\frac{1}{n}$，则应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$. 但是

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=S_n(x_0)=e^{-1}>\varepsilon_0\text{ 矛盾.}$$

∴ 在闭区间 [0, 1] 上级数非一致收敛.

1017. 证明黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在 $x>1$ 时连续，并且有各阶连续的导数.

[证] 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 $x>1$ 时收敛. 逐项求导所得的级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$. 现在证明 $1<\alpha\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛.

事实上，当 $\alpha\leqslant x<+\infty$ 时，有 $0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^\alpha}$，而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ 收敛，故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $\alpha\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 注意到 α 是大于 1 的任意实数，故上述级数在 $x>1$ 时可以逐项求导：

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 连续. 显然 ζ 也在 $1<x<+\infty$ 上连续.

利用数学归纳法，注意到对任何正整数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$ 都收敛，同上所述，可证对任何正整数 k，$\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导 k 次得到

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}\quad(1<x<+\infty)$$

故黎曼 $\zeta(x)$ 函数有各阶连续导数.

1018. 证明 θ 函数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x>0$ 时有定义并且可微分无穷次.

［证］ 先证明 $\theta(x)$ 函数在 $(0, +\infty)$ 有定义,且可微.

在级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}u_n(x)$ 中, $u_n(x)=e^{-\pi n^2 x}$、$u_n(x)=u_{-n}(x)$. 故只须考虑

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}\quad (x>0)$$

的可微性. 当 $x>0$ 时,对充分大的 n 有

$$0<e^{-\pi n^2 x}<\frac{1}{n^2 x},$$

对任一确定的 x, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 x}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 逐项求导后, 得级数 $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ 在 $[\varepsilon, +\infty)$ $(\varepsilon>0)$ 内是一致收敛的. 这是因为:

$$0<\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}\leqslant \pi n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon}<\frac{1}{n^2 \varepsilon}.$$

而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ 在 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 而 $\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ 都是连续函数,

$\therefore$ 级数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$ 在 $[\varepsilon, +\infty)$ 上连续可微,且可逐项求导. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性,知 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微,且可逐项求导.

同理可证 $\theta'(x)$ 的可微性. 最后, 利用数学归纳法,并且注意到当 n 充分大时,对于一切 $x\in[\varepsilon, +\infty)$, 都有

$$0<(\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

同理也可证得 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微分 k 次, 由 k 为任意自然数,可得当 $x>0$ 时 $\theta(x)$ 可微分无穷次.

1019. 证明函数列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛,但

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

［证］ 当 $x=0$ 时，对任何 n，$f_n(x)=0$；当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$。

∴函数列 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于 0。

但是注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx=\int_0^1 0\,dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

$$\therefore\quad \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx\neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1020. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{mx^{m-1}}{1+x^m}$ 的和（其中 $|x|<1$，$m=2^{n-1}$）。

［解］ 在 $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 上考虑 $(0<\delta<1)$，

$$\left|\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}\right|\leqslant\left|\frac{mx^{m-1}}{2x^{\frac{m}{2}}}\right|=\frac{1}{2}m|x|^{\frac{m}{2}-1}$$

$$=2^{n-2}\cdot|x^{2^{n-2}-1}|<2^{n-2}\cdot(1-\delta)^{2^{n-2}-1}.$$

对正项级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-2}(1-\delta)^{2^{n-2}-1},$$

由
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}(1-\delta)^{2^{n-1}-1}}{2^{n-2}(1-\delta)^{2^{n-2}-1}}=\lim_{n\to\infty}2(1-\delta)^{2^{n-2}}=0.$$

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-2}(1-\delta)^{2^{n-2}-1}$ 收敛，根据优级数判别法，在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上级数一致收敛。

令
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mx^{m-1}}{1+x^m},$$

在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 内级数可逐项求积，有

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+x^m),$$

$$x\in[-1+\delta, 1-\delta].$$

注意到 $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})\cdots=\dfrac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$，

$$\therefore\quad \int_0^x f(x)\,dx=\ln\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x).$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in[-1+\delta, 1-\delta]$. 再由 $\delta>0$ 的任意性，得

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$（其中 $m=2^{n-1}$）.

1021. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3-2n}$ 的和.

［解］ 由恒等式 $\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2dt=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

以及在 $|t|<1$ 时，

$$(1-t)^2(t^2+t^4+t^6+\cdots)=(1-t)^2\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)=-t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}.$$

并且它在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛，于是在 $(-1, 1)$ 内可以逐项积分，

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3-2n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}\\&=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^1 t^{2n-2}(1-t)^2dt\\&=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^2(t^2+t^4+t^6+\cdots)dt\\&=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2}\int_0^1\left(-t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt\\&=\ln 2-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 幂 级 数

1022. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}x^n$ 的收敛域.

［解］ $a_n=\frac{\ln(1+n)}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2+n)}{n+1}\cdot\frac{n}{\ln(1+n)}=1$.

$\therefore$ 级数的收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$, 由于 $\frac{\ln(1+n)}{n}\geqslant\frac{1}{n}(n>2)$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$ 发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln(1+n)}{n}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=0$,

且 $$\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]'=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}<0,$$

$\therefore \frac{\ln(1+n)}{n}$ 单调减少，根据莱布尼茨判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n}$ 收敛.

得级数的收敛域为 $[-1, 1)$。

1023. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}\cdot x^{2n-1}$ 的收敛域。

［解］ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}x^{2(n-1)}$,

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}x^{2(n-1)}$，令 $t=x^2$, $a_n=\frac{(-1)^n}{n4^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)4^{n+1}}=\frac{1}{4}.$$

对 t 的幂级数，收敛半径为 4，于是对 x 的幂级数收敛半径为 2.

当 $x=2$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n}\cdot 2^{2n-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n}+\cdots.$$

由莱布尼茨判别法，级数收敛. 同理推得 $x=-2$ 处亦收敛.

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n4^n}\cdot x^{2n-1}$ 的收敛域为 $[-2, 2]$.

1024. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{(4n+1)5^n}}$ 的收敛域.

［解］ $a_n=\frac{2^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(4n+5)\cdot 5^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\therefore$ 幂级数的收敛半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$，发散.

$x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ 根据莱布尼茨判别法，级数收敛。

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}$ 的收敛域为 $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

1025. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2\cdot e^{3n}}x^n$;　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$.

［解］ (1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^2\cdot e^{3n}}{(n+1)^2 e^{3(n+1)}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^3}=\infty$.

∴ 收敛半径 $r=0$，收敛域为 $x=0$.

(2) 令 $x-1=u$，考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}u^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}u^n$ 收敛半径为 e.

当 $u=e$ 时，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot e^n$.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{n!\cdot e^n\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot e^{n+1}\cdot(n+1)!}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]}{\frac{1}{n}}.$$

由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{(1+x)^2}}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=-\frac{1}{2}.$$

根据拉阿贝判别法，级数发散. 当 $u=-e$ 时，数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(-1)^n\cdot e^n.$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n!\cdot e^n\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot e^{n+1}\cdot(n+1)!}=\frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1,$$

得 $a_n<a_{n+1}$，∴ 级数发散.

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}u^n$ 的收敛域为 $(-e,\ e)$，

于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-1)^n$ 的收敛半径为 e，收敛域为 $(1-e,\ 1+e)$.

1026. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}(x+1)^{2n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

［解］ (1) 令 $(x+1)^2=u$，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}u^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n+(-3)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+(-3)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}\right|=3.$$

∴ 收敛半径为 $\frac{1}{3}$.

当 $u=\frac{1}{3}$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+(-1)^n}{n}.$$

级数收敛.

$u=-\frac{1}{3}$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{n}.$$

级数发散.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}\cdot u^n$的收敛域为$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$.

于是，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{n}\cdot(x+1)^{2n}$的收敛半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，收敛域为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-1\right]$.

(2) 令$\frac{x-1}{x}=u$，考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}u^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|=1,$$

∴收敛半径为1.

当$u=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，

当$u=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$收敛.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}u^n$的收敛域为$[-1,\ 1)$.

由$-1\leqslant\frac{x-1}{x}<1$，解得$x\geqslant\frac{1}{2}$，

得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$收敛域为$\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$.

1027. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x-2)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$.

[解] (1) 令$x-2=u$，考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1.$$

∴级数的收敛半径为1.

$u=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n)!!(2n+1)!!}-1\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{1}{2}<1.$$

根据拉阿贝判别法，级数在 $u=-1$ 时发散。

$u=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，根据莱布尼茨判别法，级数收敛。

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^n$ 的收敛域为 $(-1, 1]$。

解 $-1<x-2\leqslant 1$，得 $1<x\leqslant 3$，∴ 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x-2)^n$ 的收敛半径为 1，收敛域为 $(1, 3]$。

(2) 令 $x^2=u$，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)u^n$，

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1.$$

∴ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)u^2$ 的收敛半径为 1。

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$ 的收敛半径是 1。

当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 发散。

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$。

1028. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n-4)\cdot 5^n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot(2x-3)^n$.

[解] (1) 令 $x-1=u$，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{(3n-4)5^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-4)\cdot 5^n}{(3n-1)\cdot 5^{n+1}}=\frac{1}{5}.$$

$\therefore$ 级数的收敛半径是 5.

当 $u=5$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-4}$ 发散.

当 $u=-5$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-4}$，根据莱布尼茨判别法知级数收敛.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{(3n-4)\cdot 5^n}$ 的收敛域为 $[-5, 5)$. 由 $-5\leqslant x-1<5$ 解得 $-4\leqslant x<6$.

于是，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n-4)5^n}$ 的收敛半径为 5，收敛域为 $[-4, 6)$.

(2) 令 $2x-3=u$，考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot u^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2,$$

$\therefore$ 级数的收敛半径为 $\frac{1}{e^2}$.

当 $u=\frac{1}{e^2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}e^{-2n}$，因为 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x\to+\infty$ 时单调增加趋于 e，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 当 $x\to+\infty$ 时单调减少趋于 e，

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}>e>\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(n=1, 2, \cdots).$$

得
$$\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{e^{2n}}=\left[\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{e^2}\right]^n>\left[\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+2}}\right]^n$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}>\frac{1}{e^4}\quad(n=1, 2, \cdots).$$

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-2n}$ 发散.

同理可得 $u=-\frac{1}{e^2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\cdot u^n$ 发散.

级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right)$.

解　$-\frac{1}{e^2}<2x-3<\frac{1}{e^2}$，　得　$-\frac{1}{2e^2}+\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2e^2}+\frac{3}{2}$.

于是，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}(2x-3)^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e^2}$，收敛域为 $\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2e^2}+\frac{3}{2}\right)$.

1029. 求函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\cdot\left(\frac{3+2x}{3-x}\right)^n$ 的收敛域.

［解］ 令 $y=\frac{3+2x}{3-x}$，考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$. $a_n=\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^{\sqrt{n}}}{(n+1)2^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1.$$

级数收敛半径为1.

当 $y=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

当 $y=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^{\sqrt{n}}}$ 也收敛. 级数的收敛域为[−1, 1]

解不等式
$$-1\leqslant\frac{3+2x}{3-x}\leqslant 1,$$

$$\begin{cases}\frac{3x}{3-x}\leqslant 0,\\ \frac{6+x}{3-x}\geqslant 0.\end{cases}$$

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\left(\frac{3+2x}{3-x}\right)^n$ 的收敛域为 [−6, 0].

1030. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{3^{\frac{n}{2}}(n^2+1)}$ 的收敛域.

［解］ 令 $t=\sin x$，考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^n}{3^{\frac{n}{2}}(n^2+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 3^{\frac{n}{2}}(n^2+1)}{2^n\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}\cdot[(n+1)^2+1]}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

∴ 级数的收敛半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{3^{\frac{n}{2}}\cdot(n^2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛。

当$t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{3^{\frac{n}{2}}\cdot(n^2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$收敛。

故级数的收敛域为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

由$t=\sin x$，得

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2},\quad k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\sin^n x}{3^{\frac{n}{2}}\cdot(n^2+1)}$的收敛域为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$).

1031. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(\ln x)^{2n+1}}{2n+1}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-3x-3)^n}{n(n+1)}$.

［解］ (1) 令$\ln^2 x=u$，考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u^n}{2n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1,\quad \therefore\ 收敛半径为1.$$

当$u=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$收敛，当$u=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散。得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u^n}{2n+1}$的收敛域为$(-1,1]$. 由$-1<\ln^2 x\leqslant1$得

$$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e.$$

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln x)^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域为$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$.

(2) 令$x^2-3x-3=u$，考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n(n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

∴收敛半径为1.

当 $u=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛；当 $u=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 收敛。

得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$. 由 $-1\leqslant x^2-3x-3\leqslant 1$，解不等式得 $\frac{3+\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. ∴

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-3x-3)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为

$$\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2},\quad 4\right] \text{ 或 } \left[-1,\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right].$$

1032. 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是偶函数，求证 $a_{2k+1}=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$.

[证] $f(x)$ 是偶函数，故

$$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x)^n=f(x).$$

$$(-1)^na_n=a_n\quad(n=0, 1, 2, \cdots)$$

即 $$(-1)^{2k+1}a_{2k+1}=a_{2k+1},$$

$$\therefore\quad a_{2k+1}=0\quad(k=0, 1, 2, \cdots).$$

[说明] 显然当 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是奇函数时，$a_{2n}=0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

1033. 求证：$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\quad(|x|<1)$.

[证] ∵ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1)$.

在收敛域内逐项求导得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\quad(|x|<1).$$

1034. 若 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$，求证 $x\cdot\frac{df}{dx}=f(x)\cdot(x+1)$.

［证］ $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!}=0$，$\therefore$ 所给幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$，在收敛域内逐项求导得

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{(n-1)!}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\therefore \quad xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

$$(x+1)=f(x)\cdot x+f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!}.$$

$$\therefore \quad x\cdot\frac{df}{dx}=f(x)\cdot(x+1).$$

1035. 函数 $f(x)$ 由下列等式定义：

$$f(x)=1+2\cdot 7x+\cdots+n\cdot 7^{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots$$

求证函数在 $\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ 内连续，并计算 $\displaystyle\int_0^{0.125} f(x)dx$.

［证］ $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n7^{n-1}x^{n-1}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n7^{n-1}}=7$ 得这一幂级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{7}$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ 内连续，并且幂级数在 $\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$ 内可以逐项积分，得

$$\int_0^{0.125} f(x)\,dx=\int_0^{0.125}\sum_{n=1}^{\infty} n7^{n-1}x^{n-1}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 7^{n-1}\int_0^{0.125} x^{n-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} 7^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}=1.$$

1036. 已知函数级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$. (1) 求收敛域；(2) 讨论它在 $[\delta, M]$ $(\delta, M>0)$ 上的一致收敛性；(3) 证明在 $(0, +\infty)$ 内的连续性 (4) 证明在 $(0, +\infty)$ 内的可微性.

[解] (1) 设$u=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot u^{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{u}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}u^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}=1.$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}u^n$的收敛半径为1. 解$0\leqslant\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2<1$,

$$-1<\frac{x-1}{x+1}<1,$$

得$x>0$.

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$的收敛域为$(0, +\infty)$.

(2) 设$y=\frac{x-1}{x+1}$，有$y'=\frac{2}{(x+1)^2}>0$.

(i) 当$1\leqslant x\leqslant M$时，由$y=\frac{x-1}{x+1}$的单调性，得

$$0<\frac{x-1}{x+1}<\frac{M-1}{M+1}<1,$$

并且在$[1, M]$上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{M-1}{M+1}\right)^{2n+1}$收敛，由优级数判别法$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$在$[1, M]$上一致收敛.

(ii) 当$0<\delta\leqslant x\leqslant 1$时，由$y=\frac{x-1}{x+1}$的单调性，有

$$\frac{\delta-1}{\delta+1}\leqslant\frac{x-1}{x+1}<0,\quad\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\leqslant-\frac{\delta-1}{\delta+1},$$

并且在$[\delta, 1]$上$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^{2n+1}$收敛，由优级数判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

在$[\delta, 1]$上一致收敛.

∴ 上述级数在$[\delta, M]$一致收敛，或者说上述级数在$(0, +\infty)$内闭一致收敛.

(3) 函数级数在$[\delta, M]$上一致收敛，且函数$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$在$(0, +\infty)$连续，故级数在$[\delta, M]$上连续.

由δ和M都是任意的正数，故函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$在$(0, +\infty)$连续.

(4) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$在$(0, +\infty)$收敛.

形式上逐项求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}v'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}.$$

可以证得$\sum_{n=1}^{\infty}v'(x)$在$(0, +\infty)$内闭一致收敛，

又$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$在$(0, +\infty)$上连续，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$在$(0, +\infty)$上可以逐项求导.

(3) 求幂级数的和

1037. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$的和，并求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)2^n}$.

［解］ 由
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

得级数的收敛半径为1. $x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n}{n+1}$发散；

$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1}{n+1}$收敛.

$\therefore$ 级数的收敛域为$(-1, 1]$.

设　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$，$g(x)=xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$，

在收敛域内逐项求导得

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=-\frac{x}{1+x}\quad(-1<x\leqslant 1).$$

两边再求积分

$$\int_0^x g'(t)\,dt=\int_0^x -\frac{t}{1+t}\,dt,\ g(x)-g(0)=\ln|1+x|-x.$$

又 $g(0)=0$，得级数的和是

$$f(x)=\frac{1}{x}[\ln|1+x|-x]\quad(-1<x\leqslant 1).$$

特别令 $x=\frac{1}{2}$，得 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)2^n}=2\ln\frac{3}{2}-1.$

1038. 求级数 $\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{3n-1}$ 的和。

［解］ 由 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{3n-1}=1,$

得级数的收敛半径为 1.

$x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ 发散；$x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{3n-1}$ 收敛.

∴ 级数收敛域为 $[-1,1)$.

设 $\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1},\quad f(0)=0.$

则 $\quad f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{3n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n-2}=\frac{x}{1-x^3}\quad(-1\leqslant x<1).$

两边求积分 $\quad\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,dt,$

得 $\quad f(x)-f(0)=\frac{1}{3}\left[\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

$$+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

于是级数的和

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}\qquad(-1\leqslant x<1).$$

1039. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和。

［解］ 由 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n(n+1)}=1.$

得幂级数收敛半径为1.

$x=1$, -1时,幂级数分别为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$,都收敛.

则幂级数收敛域为$[-1,1]$. 又

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots\quad(-1\leqslant x<1).$$

两边分别积分得

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

两边再积分得

$$\begin{aligned}&-x\ln(1-x)+\ln(1-x)+x\\&=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1\quad(x\neq0,\ -1\leqslant x<1).$$

当$x=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^n}{n(n+1)}=0$. 当$x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n(n+1)}=1$.

综上所述

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1, & -1\leqslant x<1,\ x\neq0,\\0, & x=0,\\1, & x=1.\end{cases}$$

[说明] 对$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$,其部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1},\quad\lim_{n\to\infty}S_n=1,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

1040. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$的和.

[解] 由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n}{n(n+1)}=1.$$

得级数的收敛半径为 1，且易知收敛域为 $[-1, 1]$.

设
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}.$$
$$g(x)=xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(n+1)},$$
$$g'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n},$$
$$g''(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{n-1}=-\frac{1}{1+x}.$$

两边求积分 $\int_0^x g''(x)\,dx=\int_0^x-\frac{1}{1+x}\,dx$, $g'(x)-g'(0)=-\ln|1+x|$.

根据 $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ 得 $g'(0)=0$. 于是 $g'(x)=-\ln|1+x|$.

两边继续求积分 $\int_0^x g'(x)\,dx=\int_0^x-\ln|1+x|\,dx$, 得
$$g(x)-g(0)=x-x\ln|1+x|-\ln|1+x|.$$
由 $g(x)=xf(x)$, 得 $g(0)=0$.
$$\therefore\quad g(x)=x-x\ln|1+x|-\ln|1+x|.$$
$$f(x)=1-\ln|1+x|-\frac{1}{x}\ln|1+x|\quad(|x|\leqslant 1,\ x\neq 0).$$

1041. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+1)^n$ 的和.

［解］ 令 $x+1=u$, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}u^n$.

由
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{n-1}{2^{n-1}}=2.$$
得级数的收敛半径为 $\frac{1}{2}$.

$u=\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 发散; $u=-\frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛.

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}u^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

又令 $f(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}u^n$, 得
$$f'(u)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}u^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}2^n u^{n-1}=\frac{2}{1-2u}.$$

两边求积分

$$\int_0^u f'(t)\,dt=\int_0^u \frac{2}{1-2t}dt,\ f(u)-f(0)=-\ln|1-2u|.$$

由 $f(0)=0$，得 $\quad f(u)=-\ln|1-2u|$. ∵ $x+1=u$,

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x+1)^n=-\ln|2x+1| \quad \left(-\frac{3}{2}\leqslant x<-\frac{1}{2}\right).$$

1042. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 的和.

[解一] 令 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)2^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}.$$

∴ 级数的收敛半径为 2.

$x=2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; $x=-2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

∴ 级数的收敛域为 $[-2, 2)$.

在收敛域内逐项求导，得

$$f'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2-x}.$$

两边积分，得

$$\int_0^x f'(x)\,dx=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx,\ f(x)-f(0)=-\ln|2-x|+\ln 2,$$

$$f(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\cdot 0^n=0.$$

$$\therefore\quad f(x)=\ln 2-\ln(2-x) \quad (-2\leqslant x<2).$$

当 $x=1$ 时，$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2.$$

[解二] 根据关系

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\frac{1}{n2^n},\quad 有\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}.$$

函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}$ 在 $[2, +\infty)$ 上有 $\left|\frac{1}{x^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\int_2^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(x-1)}dx=\ln 2.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2.$$

1043. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$的和，并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$的值.

[解] $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n-1)^2}=1$. 故收敛半径为1.

显然$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot 1^n$与$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(-1)^n$均发散，故幂级数的收敛域为$(-1, 1)$.

令 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}, \quad 有 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n=xf(x).$$

逐项积分，得

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\int_0^x x^{n-1}\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\ x\in(-1, 1).$$

令 $$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\int_0^x f(x)\,dx=x\cdot g(x).$$

逐项积分得

$$\int_0^x g(x)\,dx=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x x^{n-1}\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},\ x\in(-1, 1).$$

$$g(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\int_0^x f(x)\,dx=xg(x)=\frac{x}{(1-x)^2},$$

$$f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1<x<1).$$

并且当$x=\frac{1}{2}$时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=6.$$

1044. 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}$的和.

［解］ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$.

∴ 幂级数的收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot 1^{n-1}$ 发散；当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(-1)^{n-1}$ 发散.

得幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 令 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$，逐项积分，得

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}\,dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\,dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^n$$

$$=\frac{x^2}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

两边求导，得 $$f(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

于是 $$\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

1045．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和.

［解］ 令 $u=x^2$. 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}u^{n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{2n-3}=\frac{1}{2}.$$

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}u^{n-1}$ 收敛半径为 2. 于是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}(\sqrt{2})^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}}$ 发散.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}(-\sqrt{2})^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{2}}\cdot(-1)^{2n-1}$ 发散.

∴ 幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$. 逐项积分，得

$$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{x}{2-x^2}\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ x\neq 0).$$

两边求导，得 $$f'(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}.$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ x\neq 0).$$

1046. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ 的和，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的值.

［解］ $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot(n-1)!}{n!\cdot(n-1)^2}=0.$$

∴ 幂级数的收敛半径为 $+\infty$. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1},$$

逐项积分，得

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=xe^x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}=[xe^x]'=e^x(x+1).$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=e^x\cdot(x^2+x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

令 $x=1$，有 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2e.$$

(4) 函数的幂级数展开

1047. 将 $f(x)=\frac{1}{3-x}$ 在 $x=0$ 点处展开成幂级数.

［解］ 由 $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1).$$

得 $$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{3}\right)^n+\cdots\right].$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}\quad(-3<x<3).$$

1048. 将 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=a$ 点处展开成幂级数.

［解］ $\frac{1}{x}=\frac{1}{a+(x-a)}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{a}\right)}\right]$

$$=\frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{x-a}{a}\right)+\left(\frac{x-a}{a}\right)^2-\left(\frac{x-a}{a}\right)^3+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\left(\frac{x-a}{a}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-a}{a}\right)^n \quad (a-|a|<x<a+|a|).$$

1049．将 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $x=0$ 点处展开成幂级数．

［解］ $\because \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$．利用

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\sin 3x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

$$\therefore\quad \sin^3 x=\frac{1}{4}\left[3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3-3^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1},\quad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

1050．将 $f(x)=\ln x$ 在 $x=a$ $(a>0)$ 点附近展开成幂级数，并求出幂级数的收敛半径和收敛域．

［解］ $\ln x=\ln[a+(x-a)]=\ln a\left[1+\left(\frac{x-a}{a}\right)\right]=\ln a+\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)$

$$=\ln a+\frac{x-a}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x-a}{a}\right)^n+\cdots\quad (0<x\leqslant 2a).$$

故收敛半径为 a，收敛域为 $(0,\ 2a]$．

1051．求函数 $\ln(1+x+x^2)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式．

［解］ $\ln(1+x+x^2)=\begin{cases}\ln(1-x^3)-\ln(1-x), & x\neq 1,\\ \ln 3, & x=1.\end{cases}$

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)\ (-1\leqslant x<1),$$

$$\ln(1-x^3)=-\left(x^3+\frac{x^6}{2}+\cdots+\frac{x^{3n}}{n}+\cdots\right)\quad(-1\leqslant x<1).$$

于是
$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
$$=x+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)x^3+x^4+\cdots+\frac{1}{3k-2}x^{3k-2}$$
$$+\frac{1}{3k-1}x^{3k-1}+\left(-\frac{2}{3k}\right)x^{3k}+\cdots\quad(-1\leqslant x<1).$$

1052. 求函数 $(x+1)[\ln(x+1)-1]$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式.

[解] 令 $f(x)=(x+1)[\ln(x+1)-1]$, 则 $f'(x)=\ln(1+x)$.
根据 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1).$$

逐项积分,有

$$\int_0^x\ln(1+x)\,dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\,dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

并且
$$\int_0^x\ln(1+x)\,dx=(x+1)[\ln(x+1)-1]\Big|_0^x$$
$$=(x+1)[\ln(x+1)-1]+1.$$

故有

$$(x+1)[\ln(x+1)-1]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}-1\quad(-1<x\leqslant 1).$$

1053. 求下列函数在 $x=x_0$ 处的幂级数展开式:

(1) $\dfrac{1}{x^2}$ $(x_0\neq 0)$;　　(2) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $(x_0\neq 2,\ 1)$.

[解] (1) 根据 $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^nt^n+\cdots\quad(|t|<1)$.

令 $t=\dfrac{x-x_0}{x_0}$, 得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0^3}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n+\cdots\quad\left(\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|<1\right).$$

逐项求导，得

$$-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x_0^2}+\frac{2}{x_0^3}(x-x_0)+\cdots+\frac{(-1)^n n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^{n-1}+\cdots,$$

于是

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^{n-1}$$
$$\left(\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|<1\text{ 即 }x_0-|x_0|<x<x_0+|x_0|\right).$$

(2) $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+\cdots.$$

令 $t=\frac{x-x_0}{x_0-2}$，得

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-x_0+(x_0-2)}=\frac{1}{1+\frac{x-x_0}{x_0-2}}\cdot\frac{1}{x_0-2}$$
$$=\frac{1}{x_0-2}-\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{1}{(x_0-2)^3}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^n}{(x_0-2)^{n+1}}(x-x_0)^n+\cdots\quad\left(\left|\frac{x-x_0}{x_0-2}\right|<1\right).$$

同理 令 $t=\frac{x-x_0}{x_0-1}$，得

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+\frac{x-x_0}{x_0-1}}\cdot\frac{1}{x_0-1}$$
$$=\frac{1}{x_0-1}-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{1}{(x_0-1)^3}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^n}{(x_0-1)^{n+1}}(x-x_0)^n+\cdots\quad\left(\left|\frac{x-x_0}{x_0-1}\right|<1\right).$$

于是

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x_0-2)^{n+1}}(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x_0-1)^{n+1}}(x-x_0)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(x_0-2)^{n+1}}+\frac{1}{(x_0-1)^{n+1}}\right](x-x_0)^n.$$

(其中 $|x-x_0|<c$, $c=\min\{|x_0-1|, |x_0-2|\}$).

1054. 写出下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式:

(1) $\sin(x+\alpha)$; (2) $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.

[解] (1) $\sin(x+\alpha)=\sin x\cdot\cos\alpha+\cos x\cdot\sin\alpha$.

$$\because\quad \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\therefore\quad \sin(x+\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}\cdot\cos\alpha}{(2n-1)!}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2(n-1)}\sin\alpha}{[2(n-1)]!}$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha\cdot x-\frac{\sin\alpha}{2!}x^2-\frac{\cos\alpha}{3!}x^3+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\sin\alpha}{(2n-2)!}x^{2n-2}$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\cos\alpha}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+\cdots\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\because$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots,\ |x|<1,$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}\right]=\frac{x}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right],$$

于是
$$\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^{n+\frac{1}{2}}\cdot(2n)!!}x^{n+1}\quad(|x|<2).$$

1055. 求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式:

(1) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$; (2) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

[解] (1) $\sin t=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad t\in(-\infty,+\infty)$,

逐项积分得

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

(2) $e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n},\ t\in(-\infty,\ +\infty).$

逐项积分得

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}\cdot x^{2n+1},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

1056. 求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式:

(1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$;　　　　(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$.

[解] (1) $\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)\quad(x\neq0).$

逐项求导得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right)'$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n\cdot(n-2)!}\quad(x\neq0).$$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots\quad(|x|<1).$$

逐项求导得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\frac{d}{dx}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n-1}\quad(|x|<1).$$

(5) 傅立叶级数

1057. 证明: (1) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \cdots$; (2) $\sin x$,

$\sin 2x$, $\cdots$, $\sin nx$, $\cdots$ 皆是 $[0, \pi]$ 上的正交系; 但 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\cdots$ 不是 $[0, \pi]$ 上的正交系.

[证] (1) 考虑函数系 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots\}$, 任取两项函数: $\cos Kx$, $\cos Lx$, 考虑其乘积的积分, 当 $K \neq L$ 时:

$$\int_0^\pi \cos Kx \cos Lx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(K+L)x + \cos(K-L)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K+L}\sin(K+L)x + \frac{1}{K-L}\sin(K-L)x\right]\bigg|_0^\pi = 0,$$

又 $\int_0^\pi 1\cdot\cos Kx\,dx = 0$, 当 $K = L$ 时:

$$\int_0^\pi \cos^2 Kx\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2Kx}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0, \quad \int_0^\pi 1^2\,dx = \pi \neq 0.$$

$\therefore$ 函数系 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots\}$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系.

(2) 对于函数系 $\{\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots\}$, 任取两项函数: $\sin Kx$, $\sin Lx$, 考虑其乘积的积分, 当 $K \neq L$ 时:

$$\int_0^\pi \sin Kx \sin Lx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(K-L)x - \cos(K+L)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K-L}\sin(K-L)x - \frac{1}{K+L}\sin(K+L)x\right]\bigg|_0^\pi = 0,$$

当 $K = L$ 时: $\int_0^\pi \sin^2 Kx\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2Kx}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0.$

$\therefore$ 函数系 $\{\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots\}$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系. 然而在函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 中, 任取两项函数 $\sin Kx$, $\cos Lx$, 且 $K \neq L$ 时:

$$\int_0^\pi \sin Kx \cos Lx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\sin(K+L)x + \sin(K-L)x]dx$$

$$= \frac{1}{K+L} + \frac{1}{K-L} = \frac{2K}{K^2 - L^2} \neq 0.$$

$\therefore$ $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 不符合正交系的定义, 故函数系在 $[0, \pi]$ 上不是正交系.

1058. 证明 $\sin x$, $\sin 3x$, $\cdots$, $\sin(2n+1)x$, $\cdots$ 是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上

的正交系，写出它的标准正交系，并导出 $\sin\frac{\pi x}{2l}$, $\sin\frac{3\pi x}{2l}$, …, $\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, … 是 $[0, l]$ 上的正交系.

［证］ 对于函数系 $\{\sin x, \sin 3x, \cdots, \sin(2n+1)x, \cdots\}$，任取两项函数 $\sin(2K+1)x$, $\sin(2L+1)x$，当 $K\neq L$ 时：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2K+1)x\sin(2L+1)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2K-2L)x-\cos(2K+2L+2)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2K-2L)x}{2K-2L}-\frac{\sin(2K+2L+2)x}{2K+2L+2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0;$$

当 $K=L$ 时：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2K+1)x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2(2K+1)x}{2}dx=\frac{\pi}{4}\neq 0.$$

∴ 函数系是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的正交系.

又 ∵ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(2K+1)x\right]^2dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2K+1)x\,dx=1.$

∴ 函数系 $\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin 3x, \cdots, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)x, \cdots\right\}$ 是在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的标准正交系.

令 $y=\frac{\pi x}{2l}$，则当 $x=0$ 时，$y=0$，当 $x=l$ 时，$y=\frac{\pi}{2}(l\neq 0)$. 将 $y=\frac{\pi x}{2l}$ 代入上述函数系，则得函数系

$$\left\{\sin\frac{\pi x}{2l}, \sin\frac{3\pi x}{2l}, \cdots, \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \cdots\right\}$$

是在 $[0, l]$ 上的正交系.

1059. 证明函数系 $\frac{1}{\sqrt{2l}}$, $\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}$, $\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}$, …, $\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}$, $\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}$, … 是在 $[0, 2l]$ 上的标准正交系.

[证]

$$\int_0^{2l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{K\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{L\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{\pi}\cdot\frac{1}{l}\int_0^{2\pi}\cos Kt\cdot\sin Lt\,dt=0,$$

$$\int_0^{2l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{K\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{L\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{\pi}\cdot\frac{1}{l}\int_0^{2\pi}\cos Kt\cdot\cos Lt\,dt$$

$$=\begin{cases}0 & K\neq L,\\ 1 & K=L.\end{cases}$$

$$\int_0^{2l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{K\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{L\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{\pi}\cdot\frac{1}{l}\int_0^{2\pi}\sin Kt\cdot\sin Lt\,dt$$

$$=\begin{cases}0 & K\neq L,\\ 1 & K=L.\end{cases}$$

$$\int_0^{2l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{K\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot l}\cdot\frac{l}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin Kt\,dt=0,$$

$$\int_0^{2l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{K\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}\,l}\cdot\frac{l}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos Kt\,dt=0.$$

$$\int_0^{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\right)^2 dx=1.$$

∴ 函数系在 $[0,\ 2l]$ 上是标准正交系.

1060. 方程 $\operatorname{tg} x=x$ 有无穷多个根，记方程的正根为 ξ_1，ξ_2，…，求证函数系 $\dfrac{\sin\xi_1 x}{l}$，$\dfrac{\sin\xi_2 x}{l}$，…，$\dfrac{\sin\xi_n x}{l}$，…是 $[0,\ l]$ 上的正交系.

[证] 当 $\xi_K\neq\xi_L$ 时，

$$\int_0^l\sin\frac{\xi_k x}{l}\sin\frac{\xi_L x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\left(\frac{\xi_K}{l}-\frac{\xi_L}{l}\right)x-\cos\left(\frac{\xi_K}{l}+\frac{\xi_L}{l}\right)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\xi_K}{l}-\frac{\xi_L}{l}\right)x}{\frac{\xi_K}{l}-\frac{\xi_L}{l}}-\frac{\sin\left(\frac{\xi_K}{l}+\frac{\xi_L}{l}\right)x}{\frac{\xi_K}{l}+\frac{\xi_L}{l}}\right]\Bigg|_0^l$$

$$=\frac{l}{2}\cdot\frac{2\xi_L\sin\xi_K\cos\xi_L-2\xi_K\cos\xi_K\sin\xi_L}{\xi_K^2-\xi_L^2}$$

$$=l\cdot\frac{\cos\xi_K\cos\xi_L[\xi_L\operatorname{tg}\xi_K-\xi_K\operatorname{tg}\xi_L]}{\xi_K^2-\xi_L^2}=0.$$

当 $K=L$ 时，而

$$\int_0^l \sin^2\frac{\xi_K x}{l}\,dx=\int_0^l\frac{1-\cos\frac{2\xi_K x}{l}}{2}\,dx=\int_0^1\frac{1-\cos 2\xi_K t}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\xi_K}\sin 2\xi_K.$$

∴ 函数系是 $[0,\ l]$ 上的正交系.

1061. **将函数 $f(x)=\cos^4 x$ 展开成傅立叶级数.**

[解] 根据三角公式，有

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

函数 $f(x)=\cos^4 x$ 的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=\frac{3}{4},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\cos nx\,dx,$$

有 $n=2$ 时， $a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos^2 2x\,dx=\frac{1}{2},$

$n=4$ 时， $a_4=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{8}\cos^2 4x\,dx=\frac{1}{8},$

$n\neq 2,\ 4$ 时， $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\cos nx\,dx=0.$

又有 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\sin nx\,dx=0.$

此外，函数 $f(x)$ 处处可导，故

$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

1062. 求三角多项式 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的傅立叶级数.

[解] $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\,dx=2\alpha_0;$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{K}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\cos nx\,dx,$$

当 $n\leqslant K$ 时， $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha_n\cos nx\cos nx\,dx=\alpha_n,$

当 $n>K$ 时， $a_n=0$；

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\sin nx\,dx,$$

当 $n\leqslant K$ 时， $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\beta_n\sin nx\sin nx\,dx=\beta_n.$

当 $n>K$ 时， $b_n=0$；

于是，三角多项式的傅立叶级数为

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

［说明］ 本题说明三角多项式的傅立叶展开式即是它的本身，上题的结论即是特殊情况。

1063. 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内展开成傅立叶级数.

［解］ 函数的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\ x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\ x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

再由 $f(x)$ 连续和逐段可微，得

$$\therefore\quad f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

1064. 将$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅立叶级数.

[解] 对于函数$f(x)$若不考虑$x=0$的情况,则是奇函数. 因此,傅立叶系数为$a_0=a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

$$\therefore\quad b_{2k-1}=\frac{4}{(2k-1)\pi};\ b_{2k}=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<|x|<\pi).$$

而在$x=0$, $\pm\pi$时,由$\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=0$和

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$$

得函数的傅立叶级数收敛于0.

1065. 求下列函数在$(-\pi,\pi)$内的傅立叶展开式:

$$f(x)=\begin{cases}a, & -\pi<x<0,\\ b, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

[分析] 除了用求傅立叶系数直接展开之外,还可用$f(x)$与函数

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

的关系间接地求$f(x)$的傅立叶展开式. 令$f(x)=kg(x)+t$, 其中k和t是待定系数. 取$x=-1, 1$.

解$a=-k+t$, $b=k+t$得

$$k=\frac{1}{2}(b-a),\quad t=\frac{1}{2}(a+b),$$

于是
$$f(x)=\frac{1}{2}[(a+b)+(b-a)g(x)].$$

[解] 由上题结论,函数

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

的傅立叶级数为

$$g(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<|x|<\pi).$$

得

$$f(x)=\frac{1}{2}[(a+b)+(b-a)g(x)]$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<|x|<\pi).$$

在 $x=0$，$\pm\pi$ 时，函数的傅立叶级数收敛于 $\frac{a+b}{2}$.

1066. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$ 展开成傅立叶级数.

[解] 函数的傅立叶级数的系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0;$$

当 $n\neq1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)-\left[\frac{(-1)^{1+n}}{1+n}+\frac{(-1)^{1-n}}{1-n}\right]\right\}.$$

当 $n=2k$ 时，　　$a_{2k}=\frac{2}{\pi(1-4k^2)}$；

$n=2k+1$ 时，　　$a_{2k+1}=0$.

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx=\frac{1}{2},$$

$n\neq1$ 时，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx=0.$$

再由 $f(x)$ 连续和逐段可微，得函数的傅立叶展开式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

1067. 将下列函数在 $(-\pi, \pi)$ 内展开为傅立叶级数(其中 a 不是整数)：(1) $f(x)=\cos ax$; (2) $f(x)=\sin ax$.

［解］ (1) 考虑到函数 $f(x)=\cos ax$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=\frac{2}{a\pi}\sin a\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]dx$$

$$=(-1)^n\frac{2a}{(a^2-n^2)\pi}\sin a\pi.$$

$$\therefore\quad \cos ax=\frac{1}{a\pi}\sin a\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{(a^2-n^2)\pi}\sin a\pi\cos nx$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right]\quad(-\pi<x<\pi).$$

(2) $\sin ax=-\frac{1}{a}[\cos ax]'$.

将(1)中的级数形式上逐项求导得

$$\frac{-2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2},$$

它在 $(-\pi, \pi)$ 内闭一致收敛,故

$$\sin ax=-\frac{1}{a}\left\{\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right]\right\}'$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}\quad(-\pi<x<\pi).$$

1068. 将函数 $f(x)=x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内展开成傅立叶级数. 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}$.

［解］ $\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 傅立叶系数为 $a_n=0\quad(n=0, 1, 2, \cdots)$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}[x\cos nx]\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

$$\therefore\quad x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi).$$

特别令 $x=1$, 得

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}.$$

1069. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 展开成傅立叶级数.

[解] ∵ $f(x)$ 是偶函数, ∴ 傅立叶系数为 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

此外, $f(x)$ 连续、可微, $f(-\pi)=f(\pi)$,

$$\therefore\quad x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

1070. 将函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内展开成傅立叶级数.

[解] 函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Ax^2+Bx+C)dx=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx+\frac{2C}{\pi}\int_0^{\pi}dx$$

$$=\frac{2A\pi^2}{3}+2C,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Ax^2+Bx+C)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}Ax^2\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}C\cos nx\,dx\right]=(-1)^n\frac{4A}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Ax^2+Bx+C)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}Bx\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2B}{n}.$$

$$\therefore\quad Ax^2+Bx+C=\frac{A\pi^2}{3}+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$+2B\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi).$$

1071. 将函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 在 $(0,\ 2\pi)$ 内展开成傅立叶级数.

［解］　函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 的傅立叶系数为：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Ax^2+Bx+C)\,dx=\frac{8}{3}A\pi^2+2B\pi+2C,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Ax^2+Bx+C)\cos nx\,dx=\frac{4A}{n^2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(Ax^2+Bx+C)\sin nx\,dx=-\frac{4A\pi+2B}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$\therefore\quad Ax^2+Bx+C=\frac{4}{3}A\pi^2+B\pi+C+4A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$-(4A\pi+2B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad(0<x<2\pi).$$

1072．将函数 $f(x)=e^{ax}$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内展开成傅立叶级数，其中 a 为非零常数．

［解］　函数 $f(x)=e^{ax}$ 的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\,dx=\frac{1}{a\pi}e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{a\pi}(e^{a\pi}-e^{-a\pi}),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n a}{\pi(a^2+n^2)}[e^{a\pi}-e^{-a\pi}]\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{(-1)^n n}{\pi(a^2+n^2)}[e^{-a\pi}-e^{a\pi}]\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$\therefore\quad e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

1073．将双曲函数 $f(x)=\operatorname{ch}ax$、$g(x)=\operatorname{sh}ax$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 内展开为傅立叶级数．

［解］　$\operatorname{ch}ax=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$，

由上题

$$e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right],$$

$$(-\pi<x<\pi),$$

显然

$$e^{-ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx+n\sin nx)\right],$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

于是

$$\operatorname{ch} ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=\frac{(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx\right]\quad(-\pi<x<\pi).$$

同理

$$\operatorname{sh} ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

1074. 将函数 $f(x)=|\sin x|$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上展开成傅立叶级数.

[解] $\because f(x)$ 是偶函数，故函数的傅立叶系数为 $b_n=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$n\neq1$ 时,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{1-n^2}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{1+n}+\frac{(-1)^{1-n}}{1-n}\right].$$

得 $a_1=0,\ \cdots,\ a_{2k}=\dfrac{4}{\pi(1-4k^2)},\ a_{2k+1}=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$.

此外，$f(x)$ 连续，逐段可微，并且 $f(-\pi)=f(\pi)$,

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

1075. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{2x}{\pi}, & -\pi\leqslant x<0\\[2ex] 1-\dfrac{2x}{\pi}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

展开成傅立叶级数.

[解] ∵ $f(x)$ 是偶函数，故函数的傅立叶系数为 $b_n=0$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi\cos nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1, 2, 3, \cdots).$$

$$a_{2k}=0,\ a_{2k-1}=\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\quad(k=1, 2, \cdots).$$

再由 $f(x)$ 连续，逐段可微并且 $f(-\pi)=f(\pi)$，

$$\therefore\quad f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

1076. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ bx, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

展开成傅立叶级数.

[解] 函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\,dx=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\cos nx\,dx$$

$$=\frac{(a-b)}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\qquad(n=1, 2, 3, \cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\sin nx\,dx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\qquad(n=1, 2, 3, \cdots).$$

再由函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续，逐段可微，则

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\quad(-\pi<x<\pi).$$

当 $x=-\pi$ 或 π 时，上式右端的傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=\frac{\pi(a-b)}{2}.$$

1077. 求下列级数的和：

(1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots$,

$$a_n=\begin{cases}\frac{(-1)^{k+1}}{6k-1}, & n=2k,\\ \frac{(-1)^{k+1}}{6k-5}, & n=2k-1;\end{cases}$$

(3) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots$,

$$a_n=\begin{cases}-\frac{1}{6k-1}, & n=2k,\\ \frac{1}{6k-5}, & n=2k-1.\end{cases}$$

[解] (1) 由第1064题可知

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

的傅立叶级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<|x|<\pi).$$

取
$$x=\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

于是

$$1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}+\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}+\cdots\right]$$
$$=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots\right],$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 由(1)得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}\quad\cdots①$$

将它的左右两端乘 $\frac{1}{3}$，得

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3(2n-1)}+\cdots=\frac{\pi}{12},$$

再将上面两式相加，相加后的级数等于去掉了 ① 式左边的第 $3k-1$ 项($k=1, 2, \cdots$)，

即
$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=\frac{\pi}{3}.$$

(3) 已知
$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

的傅立叶级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(0<|x|<\pi)$$

取 $x=\frac{\pi}{3}$，则

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{3}=\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & n=3k+1,\\ 0, & n=3k+2.\end{cases}$$

于是

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{11}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{13}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{17}+\cdots\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots\right),$$

$$\therefore\ 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

1078. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$，

［解］ (1) 由第1069题可知

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

取 $x=\pi$ 得
$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi,$$

由 $\cos n\pi=(-1)^n$，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 对 $f(x)=x^2$ 的傅立叶级数，取 $x=0$，得

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

1079 将函数

$$f(x)=\begin{cases}A\sin\omega x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ 0, & -\dfrac{l}{2}\leqslant x<0\end{cases}$$

展开为傅立叶级数$\left(A\text{ 为非零常数，}\omega=\dfrac{2\pi}{l}\right)$.

［解］ 函数的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}A\sin\omega x\,dx=\frac{2A}{\omega l}\left(1-\cos\frac{\omega l}{2}\right)$$
$$=\frac{A}{\pi}[1-(-1)]=\frac{2A}{\pi}.$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}A\sin\omega x\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$
$$=\frac{A}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\sin\left(\omega+\frac{2n\pi}{l}\right)x+\sin\left(\omega-\frac{2n\pi}{l}\right)x\right]dx$$
$$=\frac{A}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}[\sin(n+1)\omega x+\sin(1-n)\omega x]dx$$
$$=\frac{A}{l}\left[\frac{(-1)^n+1}{(n+1)\omega}+\frac{(-1)^n+1}{(1-n)\omega}\right]=\frac{A[1+(-1)^n]}{(1-n^2)\pi},$$

$$\therefore\quad a_{2k-1}=0,\quad a_{2k}=\frac{2A}{(1-4k^2)\pi}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}A\sin\omega x\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=-\frac{A}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\cos\left(\omega+\frac{2n\pi}{l}\right)x-\cos\left(\omega-\frac{2n\pi}{l}\right)x\right]dx$$

$$=-\frac{A}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}[\cos(n+1)\omega x-\cos(1-n)\omega x]dx=0.$$

$f(x)$连续，逐段可微并且

$$f\left(\frac{l}{2}\right)=f\left(-\frac{l}{2}\right).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{A}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A}{\pi(1-n^2)}[1+(-1)^n]\cos n\omega x\right\}$$

$$=\frac{A}{\pi}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\omega x\quad\left(-\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right).$$

1080. 将函数$f(x)=(\pi^2-x^2)^2$在$[-\pi,\ \pi]$展开成傅立叶级数，并计算$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}+\cdots$.

［解］ 考虑到$f(x)$是偶函数，故函数的傅立叶系数为$b_n=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi^4x-\frac{2\pi^2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{16}{15}\pi^4,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)^2\cos nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}48}{n^4}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$\therefore\quad(\pi^2-x^2)^2=\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

取$x=0$，则有

$$\pi^4=\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4},$$

得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7}{720}\pi^4.$$

1081. 将函数$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$展开成傅立叶级数.

［解］ 函数的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\,dx+\int_{0}^{3}1dx\right]=-1,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi}{3}x dx\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx\right]$$

$$=-\frac{6}{n^2\pi^2}\cos n\pi=\frac{6}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1}+1],$$

$$a_{2k}=0,\ a_{2k-1}=\frac{12}{(2k-1)^2\pi^2}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx\right]$$

$$=-\frac{6}{n\pi}\cos n\pi=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\quad(-3<x<3).$$

在 $x=\pm3$ 处 $\frac{f(-3+0)+f(3-0)}{2}=-2$，故上述傅立叶级数收敛于 -2.

1082. 将函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间 $[-2,\ 2]$ 上展开成傅立叶级数.

［解］ 函数的傅立叶系数为

$$\because\quad a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2-x)\,dx=\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_{0}^{2}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$=(-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\int_{0}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n\pi}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$(-2<x<2).$$

在 $x=\pm 2$ 处函数的傅立叶展开式收敛于 $\frac{f(-2+0)+f(2-0)}{2}=4$.

1083. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -l\leqslant x<0\\ 2+x, & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}$ 展开为傅立叶级数.

[解] 函数的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l}(2+x)\,dx=3+\frac{l}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{l}(2+x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{l}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$a_{2k-1}=-\frac{2l}{(2k-1)^2\pi^2},\quad a_{2k}=0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{l}(2+x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n-l(-1)^n],$$

$$b_{2k}=-\frac{l}{2k\pi},\quad b_{2k-1}=\frac{2+l}{(2k-1)\pi}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

$$f(x)=\frac{6+l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}+\frac{2+l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{2n-1}$$

$$-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi x}{l}}{2n}\quad(-l<x<0,\ 0<x<l).$$

当 $x=0$ 时，函数的傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=-\frac{3}{2};$$

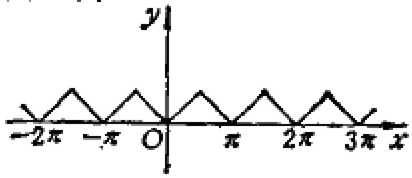
当 $x=\pm l$ 时，函数的傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}=\frac{3+l}{2}.$$

1084. 将函数 $f(x)=\frac{2A}{\pi}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 展开成以 π 为周期的傅立叶级数 $(A>0)$.

［解］ 首先将 $f(x)$ 延拓为 $[0,\pi]$ 上的函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2A}{\pi}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\frac{2A}{\pi}(x-\pi), & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$



再将 $f(x)$ 作周期为 π 的延拓（如图）. ∵ $f(x)$ 是偶函数，其傅立叶系数为

$$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2A}{\pi}x\,dx=A,$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2A}{\pi}x\cos 2nx\,dx=\frac{2A}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1].$$

得 $$a_{2k}=0,\ a_{2k-1}=-\frac{4A}{(2k-1)^2\pi^2}(k=1,2,\cdots).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{A}{2}-\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

1085. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

［解］ 将 $f(x)$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，延拓后函数的傅立叶系数为：$b_n=0,\ (n=1,2,3,\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1](n=1,2,3,\cdots).$$

得 $$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

1086. 将函数 $f(x)=1-\frac{\pi}{2}\sin x(0<x<\pi)$ 展开成余弦级数.

［解］ 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数，延拓后函数的傅立叶系数是 $b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{\pi}{2}\sin x\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{\pi}{2}\sin x\right)\cos nx\,dx$$

$$=-\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right],$$

$$a_{2k}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)},\ a_{2k-1}=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

得 $$1-\frac{\pi}{2}\sin x=\sum_{n=1}^\infty\frac{2\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}\quad(0<x<\pi).$$

1087． 将函数 $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ 在 $(0,\pi)$ 内展开成正弦级数．

［解］ 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 内的奇函数，$f(0)=0$，延拓后函数的傅立叶系数是 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-x)\sin nx\,dx$$

$$=\int_0^\pi\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{2}(\pi-x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin nx}{n}\quad(0<x<\pi).$$

1088． 将函数 $f(x)=x(\pi-x)\ (0<x<\pi)$ 展开为正弦级数，并由此计算 $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}+\cdots$.

［解］ 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\pi)$ 内的奇函数，延拓后函数的傅立叶系数是 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n].$$

$$b_{2k}=0,\quad b_{2k-1}=\frac{8}{(2k-1)^3\pi}\quad(k=1,2,\cdots).$$

得 $$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\quad(0<x<\pi).$$

取 $x=\frac{\pi}{2}$， $$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3},$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

1089. 将函数 $f(x)=x^3$ 在 $[0,\ \pi]$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

［解］ 将 $f(x)$ 延拓为 $[-\pi,\ \pi]$ 上的偶函数，延拓后函数的傅立叶系数是 $b_n=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3dx=\frac{\pi^3}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{6\pi}{n^2}-(-1)^n\frac{12}{n^4\pi}+\frac{12}{n^4\pi}.$$

$$\therefore\quad x^3=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{6\pi}{n^2}+\frac{12}{n^4\pi}[1-(-1)^n]\right\}\cos nx$$

$$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

取 $x=0$， $$0=\frac{\pi^3}{4}+6\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$（参见第1078(2)题）.

故 $$0=\frac{\pi^3}{4}+6\pi\cdot\left(-\frac{\pi^2}{12}\right)+\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi}{24}\left[-\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi^3}{2}\right]=\frac{\pi^4}{96},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{(2k)^4}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{2^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{16}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

1090. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$$

展开为正弦级数.

[解] 将 $f(x)$ 延拓为 $[-l, l]$ 上的奇函数，则其傅立叶系数为：

$$a_n=0 \quad (n=0, 1, 2\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_{2k}=0,\quad b_{2k-1}=\frac{4l\cdot(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2} \quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant l).$$

1091. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\\ 0, & \dfrac{l}{2}<x\leqslant l\end{cases}$$

展开为余弦级数.

[解] 将 $f(x)$ 延拓为 $[-l, l]$ 上的偶函数，其傅立叶系数是：

$$b_n=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\cos(n+1)\cdot\frac{\pi x}{l}+\cos(n-1)\frac{\pi x}{l}\right]dx,$$

$$a_1=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\cos\frac{2\pi x}{l}+1\right]dx=\frac{1}{2},$$

$n\neq 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{(n+1)\pi}\sin(n+1)\frac{\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{(n-1)\pi}\sin(n-1)\frac{\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \dfrac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\end{cases} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l).$$

1092. 已知可积和绝对可积的函数$f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上满足

$$f(x+\pi)=-f(x),$$

求证函数$f(x)$的傅立叶系数满足

$$a_{2k}=0,\ b_{2k+2}=0\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

[证] $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,$

令 $x+\pi=t$, 则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t-\pi)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0.$$

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\,dx$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2kx\,dx.$$

令 $x+\pi=t$, 则

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t-\pi)\cos 2k(t-\pi)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2kx\,dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos 2kt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2kx\,dx=0.$$

即有 $a_{2k}=0\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$.

同理 $b_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin 2kx\,dx$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2kx\,dx,$$

令 $x+\pi=t$, 则

$$b_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t-\pi)\sin 2k(t-\pi)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2kx\,dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin 2kt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2kx\,dx=0.$$

即有 $b_{2k+2}=0\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. ∴结论成立.

1093. 已知可积和绝对可积的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足

$$f(x+\pi)=f(x),$$

求证函数 $f(x)$ 的傅立叶系数满足

$$a_{2k+1}=b_{2k+1}=0 \quad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

[证] $a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2k+1)x\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k+1)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k+1)x\,dx,$$

令 $x+\pi=t$,

$$\cos(2k+1)(t-\pi)=\cos[(2k+1)t-(2k+1)\pi]$$
$$=-\cos(2k+1)t.$$

则 $a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t-\pi)\cos[(2k+1)(t-\pi)]dt$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k+1)x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(2k+1)t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k+1)x\,dx=0.$$

同理可证 $b_{2k+1}=0(k=0, 1, 2, \cdots)$。∴ 结论成立.

1094. 已知可积和绝对可积的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(-x)=f(x)$, $f(x+\pi)=-f(x)$, 求证 $f(x)$ 的傅立叶系数满足 $b_{2k-1}=0$, $a_{2k-2}=0(k=1, 2, \cdots)$.

[证] 当函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+\pi)=-f(x)$ 时，由第 1092 题结论，即有 $a_{2k-2}=0(k=1, 2, \cdots)$。而

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k-1)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,dx.$$

令 $x=-t$, 于是

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-t)\sin(2k-1)(-t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(2k-1)t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,dx=0$$

即有 $b_{2k-1}=0 \quad (k=1, 2, \cdots)$.

［说明］ 同理若可积和绝对可积函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), \; f(x+\pi)=-f(x),$$

则可推得 $a_{2k-2}=0, \; b_{2k}=0 \quad (k=1, 2, \cdots)$.

1095. 如果函数 $f(-x)=\varphi(x)$，问 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数 a_n, b_n 和 a'_n, $b'_n(n=0, 1, 2, \cdots)$之间有什么关系？

［解］ 函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ 的傅立叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx;$$

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, \quad b'_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right],$$

作代换 $x=-t$，并注意用 $f(-x)=\varphi(x)$ 代入，得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos nt\,dt-\int_{0}^{-\pi} f(-t)\cos nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt+\int_{-\pi}^{0} \varphi(t)\cos nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt=a'_n.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin nt\,dt+\int_{0}^{-\pi} f(-t)\sin nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt-\int_{-\pi}^{0} \varphi(t)\sin nt\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt=-b'_n$$

$\therefore f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数 a_n, b_n 和 a'_n, b'_n 之间满足：

$$a_n=a'_n, \; b_n=-b'_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

1096. 如果函数 $f(-x)=-\varphi(x)$，问 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数 a_n, b_n 和 a'_n, $b'_n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 之间有什么关系？

［解］ 函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ 的傅立叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx;$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right],$$

作代换 $x=-t$，并注意用 $f(-x)=-\varphi(x)$ 代入，得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0}f(-t)\cos nt\,dt-\int_{0}^{-\pi}f(-t)\cos nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt-\int_{-\pi}^{0}\varphi(t)\cos nt\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt=-a_n'$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}f(-t)\sin nt\,dt+\int_{0}^{-\pi}f(-t)\sin nt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt+\int_{-\pi}^{0}\varphi(t)\sin nt\,dt\right]=b_n'$$

$\therefore f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数 a_n, b_n 和 a_n', b_n' 之间满足：

$$a_n=-a_n',\ b_n=b_n'\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

1097. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为 a_n, $b_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，试计算“平移”后的函数 $f(x+h)$（h 为常数）的傅立叶系数 a_n', $b_n'(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$.

［解］ 在 $f(x+h)$ 的傅立叶系数 a_n' 的表达式中，作代换 $x+h=t$，并应用 $f(x)$ 是以 2π 为周期的条件，有

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)\cos n(t-h)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)[\cos nt\cos nh+\sin nt\sin nh]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\cos nh\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\sin nh\,dt\right]$$

$$=\cos nh\cdot a_n+\sin nh\cdot b_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

同样方法可推得 $b_n'=\cos nh\cdot b_n-\sin nh a_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$.

第七章　多元函数微分学及其应用

1．二元函数的极限

(1) 定义　设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域有定义，若对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$(x, y)\neq(x_0, y_0)$ 有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$．则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的二重极限，或称极限．记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$.

(2) 累次极限　固定 y，当 $x\to x_0$ 时，若函数 $f(x, y)$ 极限存在，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)=\varphi(y)$．再当 $y\to y_0$ 时，$\varphi(y)$ 的极限也存在

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)=A,$$

则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的先 x 后 y 的累次极限(同理可定义先 y 后 x 的累次极限)．

(3) 四则运算法则　若函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 极限存在，则

a．$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x, y)\pm g(x, y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)$.

b．$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x, y)\cdot g(x, y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)$.

c．$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)}\quad(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)\neq 0)$.

2．二元函数的连续

(1) 定义　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$，则称函数在点 (x_0, y_0)

连续．又如果 $f(x, y)$ 在区域 D 上任意一点都连续，称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续．

(2) **复合函数的连续**　设 $f(u, v)$ 在区域 D 内有定义，又设 $u=\varphi(x, y)$ 和 $v=\psi(x, y)$ 在 E 内有定义，并且当 $(x, y)\in E$ 时，相应的 $(u, v)=(\varphi(x, y), \psi(x, y))\in D$．再设 (x_0, y_0) 是 E 内一点，$u_0=\varphi(x_0, y_0)$，$v_0=\psi(x_0, y_0)$．如果 $f(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 连续，φ 和 ψ 都在 (x_0, y_0) 连续，则复合函数 $f[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$ 在 (x_0, y_0) 连续．

(3) **一致连续**　设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 有定义，若对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于 D 内任何点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，当 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon$．则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上一致连续．

若 $f(x, y)$ 在有界闭集 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续．

3．偏导数

(1) 定义　二元函数 $f(x, y)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}\left(\text{或}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}\right)$$

存在，则称 $f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 点存在关于 x 的偏导数(或关于 y 的偏导数)．记作 $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$，$f'_x(x, y)$ $\left(\text{或}\frac{\partial}{\partial y}f(x, y),\ f'_y(x, y)\right)$．

一般地，n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1, \cdots, x_k+\Delta x_k, \cdots, x_n)-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_k}$$

存在，则称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 存在关于 x_k 的偏导数，记作 $\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

(2) 高阶偏导数　函数$f(x, y)$的偏导数的偏导数称为它的二阶偏导数. 记号

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$或$f''_{xx}$, 表示对$x$连续求二阶偏导数;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$或$f''_{xy}$, 表示先$x$后$y$的二阶偏导数;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$或$f''_{yx}$, 表示先$y$后$x$的二阶偏导数;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$或$f''_{yy}$, 表示对$y$连续求二阶偏导数.

当$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$连续时,则有$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

一般地, $n-1$阶偏导数的偏导数称为函数的n阶偏导数.

(3) 复合函数偏导数链式法则　设$z=f(u, v)$, $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$, 并且可以构成复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, 若$f$可微, u和v都存在偏导数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

4. 隐函数

(1) 隐函数存在定理　设$F(x, y)$, F'_x, F'_y在(x_0, y_0)某一邻域内连续, $F(x_0, y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$, 则方程$F(x, y)=0$在(x_0, y_0)的某个邻域内存在唯一的隐函数$y=f(x)$, 使得$y_0=f(x_0)$, $F(x, f(x))=0$, $y=f(x)$在x_0的某邻域内有连续导数.

(2) 隐函数求导法　对方程$F(x, y)=0$定义的隐函数, 只要方程两边对x求导, 并注意$y=f(x)$. 则可从$F'_x+F'_y\cdot y'_x=0$中解得$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

(3) 由方程组定义的隐函数存在定理　设$F(x, y, u, v)$, $G(x, y, u, v)$所有的偏导数在(x_0, y_0, u_0, v_0)的某个邻域内连

续；函数行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在(x_0, y_0, u_0, v_0)不为零；且满足

$$\begin{cases}F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0,\\ G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0.\end{cases}$$

则在(x_0, y_0, u_0, v_0)的某个邻域存在唯一的有连续偏导数的隐函数组$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$．使

$$\begin{cases}F(x, y, u(x, y), v(x, y))=0,\\ G(x, y, u(x, y), v(x, y))=0.\end{cases}$$

且有$u_0=u(x_0, y_0)$和$v_0=v(x_0, y_0)$.

(4) 由方程组定义的隐函数求导法 对于由方程组

$$\begin{cases}F(x, y, u, v)=0\\ G(x, y, u, v)=0\end{cases}$$

定义的隐函数组，只要对方程组两边分别对x求偏导数，并注意$u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$．则可以从方程组

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot v'_x=0\\ G'_x+G'_u\cdot u'_x+G'_v\cdot v'_x=0\end{cases}$$

中解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_x\\ G'_u & G'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}}.$$

同理对方程组两边分别对 y 求偏导数，即可求得 $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

5. 全微分

如果函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}$, A, B 是与 Δx, Δy 无关的常数，则称函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微. $A\Delta x+B\Delta y$ 称函数的全微分，记作 dz.

若 $z=f(x, y)$ 有连续的偏导数，则 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$.

6. 方向导数和梯度

(1) 方向导数　函数 $f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的某邻域内有定义，过 P_0 的一条射线 L 上任取 $P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)$ 其中 $l=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是射线 L 上的单位向量，若 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{f(P)-f(P_0)}{t}$ 存在，则称它是函数 $f(x, y, z)$ 在 P_0 点沿方向 l 的方向导数，记作 $\frac{\partial}{\partial l}f(P_0)$.

若 f 在 P_0 可微，则

$$\frac{\partial}{\partial l}f(P_0)=\frac{\partial}{\partial x}f(P_0)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}f(P_0)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}f(P_0)\cos\gamma.$$

(2) 梯度　设函数 $f(P)$ 可微，称 $\left(\frac{\partial}{\partial x}f(P), \frac{\partial}{\partial y}f(P), \frac{\partial}{\partial z}f(P)\right)$ 是 $f(P)$ 在 P 点的梯度. 记作 $\operatorname{grad} f(P)$，它是向量. 其意义为：(i) $f(P)$ 在 P 点沿 $\operatorname{grad} f(P)$ 的方向其方向导数最大；(ii) 其最大的方向导数是 $|\operatorname{grad} f(P)|$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}f(P)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}f(P)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}f(P)\right)^2}.$$

7. 多元函数的极值

(1) 定义　如果二元函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)的邻域D内有定义，若对任意$(x, y)\in D$，有$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$（或$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)$），则称$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$点取极大值（或极小值）.

(2) 必要条件　若$f(x, y)$在(x_0, y_0)点取极值，并且$f(x, y)$在(x_0, y_0)可微，则$f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$.

(3) 充分条件　若$f(x, y)$在(x_0, y_0)有$f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0$. 令$A=f''_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0, y_0)$，$\Delta=AC-B^2$.

(i) 若$A>0$，$\Delta>0$，则函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)点取极小值.

(ii) 若$A<0$，$\Delta>0$，则函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)点取极大值.

(iii) 若$\Delta<0$，则函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)不取极值.

(iv) 若$\Delta=0$，则函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)点是否有极值须进一步判定.

(4) 拉格朗日乘数法　在$\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$　$(k=1, 2, \cdots, m, m<n)$限制条件下函数$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的极值求法为$\left(\text{其中}\ \varphi_k\ \text{有连续偏导数，且函数行列式}\ \dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)}\neq 0,\ f\ \text{可微}\right)$:

设

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

若f在上述限制条件下在$P_0(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$有极值，则点$P_0$必须满足下列方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=0 & (i=1, 2, \cdots, n),\\ \varphi_k=0 & (k=1, 2, \cdots, m).\end{cases}$$

8. 泰勒公式

如果二元函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)点某邻域有直到$n+1$阶连续偏导数,则

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0, y_0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}$$
$$\times f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))\quad(0<\theta<1).$$

9. 几何应用

(1) 曲面的切平面和法线

a. 若曲面由方程$F(x, y, z)=0$给出，则在曲面上点$P(x_0, y_0, z_0)$的法向量为$\pm\left(\frac{\partial}{\partial x}F(P), \frac{\partial}{\partial y}F(P), \frac{\partial}{\partial z}F(P)\right)$.

切平面方程为

$$\frac{\partial F(P)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(P)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(P)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(P)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F(P)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F(P)}{\partial z}}.$$

b. 若曲面由$z=f(x, y)$给出,则在曲面上点$P(x_0, y_0, z_0)$的法方向为$\pm(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$.

切平面方程为

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0).$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2) 空间曲线的切线和法平面

若曲线由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

给出，则 $(x_0, y_0, z_0)=(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

§1. 多元函数的极限和连续

(1) 多元函数的极限

1098. 按定义证明 $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+3y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的极限为 0.

[证]　$$|f(x, y)|=\frac{x^2y^2}{x^2+3y^2}=\frac{\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot 3y^2}{x^2+3y^2}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{x^2+3y^2}{2}\right)^2}{x^2+3y^2}$$

$$=\frac{1}{12}(x^2+3y^2)\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=4\varepsilon$，当 $0<x^2+y^2<\delta$ 时，有 $|f(x, y)|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+3y^2}=0.$$

1099. 按定义证明 $f(x, y)=2x^2+3y$ 在 $(2, 1)$ 点的极限是 11.

[证]　$$|f(x, y)-11|=|2x^2+3y-11|=|2x^2-8+3y-3|$$

$$=|2(x-2)(x+2)+3(y-1)|$$

$$\leqslant 2|x+2|\cdot|x-2|+3|y-1|.$$

令 $|x-2|<1$，则 $|x+2|=|x-2+4|\leqslant|x-2|+4<5$，于是 $|f(x,y)-11|<10|x-2|+3|y-1|<10(|x-2|+|y-1|)$。对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{20},1\right\}$，当 $|x-2|<\delta$，$|y-1|<\delta$，$(x,y)\neq(2,1)$ 时，有 $|f(x,y)-11|<\varepsilon$。即

$$\lim_{\substack{x\to2\\y\to1}}2x^2+3y=11.$$

1100. 按定义证明 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ 在 $(1,2)$ 点的极限是 17.

［证］
$$\begin{aligned}|f(x,y)-17|&=|x^2+2xy+3y^2-17|\\&=|x(x+2y)-(x+2y)+x+2y+3y^2-17|\\&=|(x-1)(x+2y)+(x-1)+2(y-2)+3(y-2)(y+2)|\\&\leqslant|x+2y||x-1|+|x-1|+|3y+8||y-2|.\end{aligned}$$

令 $|x-1|<1$ 与 $|y-2|<1$，有 $|x|=|x-1+1|\leqslant|x-1|+1<2$，$|y|=|y-2+2|\leqslant|y-2|+2<3$。则 $|x+2y|\leqslant|x|+|2y|\leqslant2+6=8$，$|3y+8|=|3y-6+14|\leqslant3|y-2|+14<17$。

于是，$|f(x,y)-17|<9|x-1|+17|y-2|<17(|x-1|+|y-2|)$。

对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{34},1\right\}$，当 $|x-1|<\delta$，$|y-2|<\delta$，$(x,y)\neq(1,2)$ 时，有 $|f(x,y)-17|<\varepsilon$。

即
$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}}x^2+2xy+3y^2=17.$$

1101. 按定义证明 $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的极限为 0。并计算 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

［解］
$$\begin{aligned}|f(x,y)|&=\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x+y|\cdot|x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2}\\&\leqslant\frac{|x+y|\cdot(|x^2+y^2|+|xy|)}{x^2+y^2}\\&\leqslant\frac{|x+y|\cdot\left(|x^2+y^2|+\left|\frac{x^2+y^2}{2}\right|\right)}{x^2+y^2}\\&=\frac{3}{2}|x+y|\leqslant\frac{3}{2}(|x|+|y|).\end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{1}{3}\varepsilon$. 当 $0<|x|<\delta$, $0<|y|<\delta$ 时, 有 $|f(x, y)|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

此外,
$$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}=1,\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0.$$

1102. 按定义证明 $f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 在 $(0, 0)$ 点的极限为 2.

[证]
$$|f(x, y)-2|=\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|$$
$$=\left|\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}-2\right|=|\sqrt{xy+1}-1|$$
$$=\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}+1}\right|<|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}<\varepsilon.$$

对任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon$, 当 $0<x^2+y^2<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|<\varepsilon.\quad 即\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=2.$$

1103. 求: (1) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}}\frac{2x+4y}{x^2+xy-2y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to-1}}\frac{2x+4y}{x^2+xy-2y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

[解] (1) 由极限的四则运算性质:

$$\lim_{\substack{x\to2\\y\to1}}\frac{2x+4y}{x^2+xy-2y^2}=\frac{4+4}{4+2-2}=2.$$

(2) $$\lim_{\substack{x\to2\\y\to-1}}\frac{2x+4y}{x^2+xy-2y^2}=\lim_{\substack{x\to2\\y\to-1}}\frac{2(x+2y)}{(x+2y)(x-y)}=\lim_{\substack{x\to2\\y\to-1}}\frac{2}{x-y}=\frac{2}{3}.$$

(3) $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)=2.$$

1104. 求：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

［解］ (1) $x>0$, $y>0$, 于是

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(x+y)\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{(x-y)^2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}(x+y)(x^2+y^2).$$

得
$$0<\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\leqslant\frac{x^2+y^2}{\frac{1}{2}(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{2}{x+y}.$$

$\because$ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{2}{x+y}=0$,　$\therefore$　由迫敛性　$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}=0$.

(2) $0<\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)$.

$\because$ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$,　由迫敛性　$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

1105. 求：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+3y^2}\right)^x$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

［解］ (1) $\because$　$0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2$.

$0\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leqslant\dfrac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|$.　又　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(|x|+|y|)=0$.

$\therefore$　由迫敛性得　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$.

(2) 由不等式 $x^2+y^2\geqslant2|xy|$ 得

$$|x^2-xy+y^2|\geqslant|x^2+y^2|-|xy|\geqslant2|xy|-|xy|=|xy|.$$

当 $|x|>0$, $|y|>0$ 时,

$$\therefore\quad 0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=\frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}$$
$$\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}.$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$. 由迫敛性得 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

(3) 当 $x>0$, $y>0$ 时，有 $0<\left(\frac{xy}{x^2+3y^2}\right)^x<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^x$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$。∴ 由迫敛性得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+3y^2}\right)^x=0$。

(4) $x>0$, $y>0$，于是 $0<x^2+y^2<(x+y)^2$，

$$0<(x^2+y^2)e^{-(x+y)}<(x+y)^2e^{-(x+y)}.$$

∵ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{(x+y)^2}{e^{(x+y)}}=0$。∴ 由迫敛性得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$。

1106. 求：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2y^2)^{x^4+y^4}$。

[解]　(1) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$，又

$$0\leqslant|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\ln(x^2+y^2)}{\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2+y^2}{4}=0.$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=1.$$

(2) $(x^2y^2)^{x^4+y^4}=e^{(x^4+y^4)\ln x^2y^2}$，又

$$0\leqslant|(x^4+y^4)\ln x^2y^2|\leqslant(x^4+y^4)\left|\ln\frac{x^4+y^4}{2}\right|.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^4+y^4)\ln\frac{x^4+y^4}{2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\ln\frac{x^4+y^4}{2}}{\frac{1}{\frac{x^4+y^4}{2}}}\cdot2=0.$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2y^2)^{x^4+y^4}=1.$$

1107. 当 $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ 时，试讨论下列函数的极限：

(1) $f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $f(x,\ y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$。

(1) [解一]　令 $y=mx$ (m 是一常数)，当 $p(x,\ y)$ 沿直线 $y=mx$ 趋于 $(0,\ 0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2},$$

随m的不同将取不同的值，故函数在$(0, 0)$点的极限不存在.

[解二] 令$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则$(x, y)\to(0, 0)$ 即$\rho\to 0$.

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\cos\theta,$$

随θ的不同将取不同的值，故函数在$(0, 0)$点的极限不存在.

(2) [解] 令$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则$(x, y)\to(0, 0)$即$\rho\to 0$,

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\theta\sin\theta=0.$$

1108. 设$f(x, y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$. 试讨论$(x, y)\to(0, 0)$时, $f(x, y)$的极限.

[解] 令$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则

$$f(x, y)=f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=\frac{\rho^2}{\rho\cos\theta+\rho}=\frac{\rho}{1+\cos\theta}.$$

选取$\rho=k(1+\cos\theta)$, (ρ, θ)沿曲线$\rho=k(1+\cos\theta)$趋于极点时，有

$$\lim_{\substack{\rho=k(1+\cos\theta)\to+0\\ \theta\to\pi-0}}f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=\lim_{\substack{\rho=k(1+\cos\theta)\to+0\\ \theta\to\pi-0}}\frac{k(1+\cos\theta)}{1+\cos\theta}=k.$$

由k取不同的值，沿相异曲线趋于$(0, 0)$时，极限值也不同，得函数极限不存在.

1109. 设$f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^2-y^2)^2}$, 试讨论$(x, y)\to(0, 0)$时, $f(x, y)$的极限.

[解] 令$y=kx$ (k为常数). 当$P(x, y)$沿$y=kx$趋于$P_0(0, 0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^2-y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^4(1-k^2)^2}=\frac{k^2}{k^2+(1-k^2)^2}.$$

由k取不同值, $P(x, y)$沿相异的直线$y=kx$趋于$P_0(0, 0)$时，极限取不同的值. 得函数极限不存在.

1110. 设$f(x, y)=\dfrac{xy}{x+y}$, 试讨论$(x, y)\to(0, 0)$时, $f(x,y)$的极限.

[解] 令$y=ax^2-x$ (a为常数). 当$P(x, y)$沿$y=ax^2-x$趋于$P_0(0, 0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax^2-x\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3-x^2}{ax^2}=-\frac{1}{a}.$$

由 a 取不同值，$P(x, y)$ 沿相异的抛物线趋于 $P_0(0, 0)$ 时，极限将取不同的值，得函数在 $(0, 0)$ 点的极限不存在.

1111. 设 $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$，试讨论 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，$f(x, y)$ 的极限.

[分析] $$\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}.$$

由上题讨论可知，当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时 $\dfrac{xy}{x+y}$ 发散，而 $\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}\to\dfrac{1}{2}$，因此，当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 发散.

[解] 令 $y=ax^2-x$（a 为常数）. 当 $P(x, y)$ 沿 $y=ax^2-x$ 趋于 $P_0(0, 0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax^2-x\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax^2-x\to 0}}\frac{\sqrt{ax^3-x^2+1}-1}{ax^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3-x^2}{ax^2(\sqrt{ax^3-x^2+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-1}{a(\sqrt{ax^3-x^2+1}+1)}=-\frac{1}{2a}.$$

由 a 取不同数值，$P(x, y)$ 沿相异的抛物线趋于 $P_0(0, 0)$ 时，极限将取不同数值，得函数极限不存在.

1112. 设 $f(x, y)=(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$，试讨论 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，$f(x, y)$ 的极限.

[解] $f(x, y)=[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}]^{\frac{xy}{x+y}}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ln f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}\cdot\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}.$$

由第 1110 题结论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 发散；而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1$.

∴ $(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时发散.

1113. 试讨论$(x, y)\to(0, 0)$时，下列函数$f(x, y)$的极限：

(1) $f(x, y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；　　(2) $f(x, y)=\dfrac{x^3y^5}{(x^3+y^5)^2}$.

［解］ (1) 令$y=kx^2$ (k为常数)．当$P(x, y)$沿$y=kx^2$趋于$P_0(0, 0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\to 0}}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

由k取不同值，$P(x, y)$沿相异的抛物线$y=kx^2$趋于$P_0(0, 0)$时，极限取不同的值．得函数极限不存在．

(2) 令$y=k\sqrt[5]{x^3}$ (k为常数)．当$P(x, y)$沿曲线$y=k\sqrt[5]{x^3}$趋于$P_0(0, 0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=k\cdot\sqrt[5]{x^3}\to 0}}\frac{x^3y^5}{(x^3+y^5)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=k\cdot\sqrt[5]{x^3}\to 0}}\frac{k^5x^6}{(x^3+k^5x^3)^2}=\frac{k^5}{(1+k^5)^2}.$$

由k取不同值，$P(x, y)$沿相异的曲线$y=k\cdot\sqrt[5]{x^3}$趋于$P_0(0, 0)$时，极限取不同的值，得函数极限不存在．

1114. 设$f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. 试求$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x, y)$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x, y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)$.

［解］ $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x, y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x, y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{(-y)^2}=-1.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x, y)$与$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x, y)$存在，但是不相等，则可断定$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)$不存在(参见下面的说明)．

此外，也可以直接求解．令$y=kx$，$P(x, y)$沿$y=kx$趋于$P_0(0, 0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-k^2)x^2}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\frac{1+k}{1-k}.$$

由k取不同值，$P(x, y)$沿相异直线$y=kx$趋于$P_0(0, 0)$时，极限值不相同，所以函数二重极限不存在．

［说明］ 若函数$f(x, y)$在$P(x_0, y_0)$的二重极限与先$y\to y_0$，后$x\to x_0$的累次极限都存在，则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y).$$

先 $x\to x_0$，后 $y\to y_0$ 的累次极限与二重极限之间也有同样关系.

据此，即可推出两个二次极限存在，而不相等，则二重极限不存在，这是二次极限与二重极限之间的一个重要关系.

1115. 设 $f(x,y)=\dfrac{4x^2+y^2}{x^2y^2+\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)^2}$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$.

［解］ $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+0}{x^2\cdot 0+(x-0)^2}=4.$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y)=\lim_{y\to 0}\frac{0+y^2}{0\cdot y^2+\left(0-\frac{1}{2}y\right)^2}=4.$$

设 $y=kx$，$P(x,\ y)$ 沿 $y=kx$ 趋于 $P_0(0,\ 0)$．则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{(4+k^2)x^2}{k^2x^4+\left(1-\frac{k}{2}\right)^2x^2}=\frac{4(4+k^2)}{(2-k)^2}.$$

由于 k 取不同值，$P(x,\ y)$ 沿相异直线 $y=kx$ 趋于 $P_0(0,\ 0)$，极限值不同，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$ 不存在.

［说明］ 本题说明即使两个二次极限存在，且相同，二重极限仍不一定存在.

1116. 设 $f(x,\ y)=\dfrac{xy^2}{x+y^2}$．试求

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\ y)\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y),\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y).$$

［解］ $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy^2}{x+y^2}=0.$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x+y^2}=0.$$

不妨考虑 $x=ky^t-y^2$（k 是非零常数），则

$$\frac{xy^2}{x+y^2}=\frac{(ky^t-y^2)y^2}{ky^t}=\frac{ky^{t+2}-y^4}{ky^t}=y^2-\frac{1}{k}\cdot y^{4-t}.$$

当 $t=4$ 时，
$$y^2-\frac{1}{k}y^{4-t}=y^2-\frac{1}{k}.$$

∴ 令 $x=ky^4-y^2$，于是

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^4-y^2\to 0}}\frac{xy^2}{x+y^2}=\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^4-y^2\to 0}}\frac{(ky^4-y^2)y^2}{ky^4}=-\frac{1}{k}.$$

由于 k 取不同值，$P(x,y)$ 沿相异曲线 $x=ky^4-y^2$ 趋于 $P_0(0,0)$ 时，极限值不相同，所以函数二重极限不存在.

1117. 设 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$. 试求

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y),\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y) \text{和} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y).$$

[解] $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}$，因为对固定 x，$x\sin\dfrac{1}{y}$ 当 $y\to 0$ 时极限不存在，所以先 y 后 x 的二次极限不存在. 此外，由

$$|f(x,y)|=\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\frac{1}{y}=0.$$

[说明] 本题说明，只要累次极限中有一存在，且二重极限亦存在，则两者必相等.

1118. 设 $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{x+y}$. 试求

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}f(x,y),\ \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}f(x,y),\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x,y).$$

[解] $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{x+y}=0.$

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}f(x,y)=\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{1+\frac{y}{x}}=\lim_{y\to\infty}\sin\pi=0.$$

令 $y=kx$，当 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋于无穷时，

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y=kx\to\infty}}f(x,y)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{(1+k)x}=\sin\frac{\pi}{1+k}.$$

当 $P(x, y)$ 沿相异的直线 $y=kx$ 趋于无穷时，得不同的极限，因此 $f(x, y)$ 不存在二重极限.

［说明］ 本题说明当 (x, y) 趋无穷时，即使两个累次极限存在且相等，二重极限也有可能不存在.

1119. 设 $f(x, y)=\frac{1}{y}\sin x+\frac{1}{x}\sin y$. 试求

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}f(x, y),\ \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}f(x, y),\ \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x, y).$$

［解］ $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}f(x, y)$ 与 $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}f(x, y)$ 都不存在，又

由 $$\left|\frac{1}{y}\sin x+\frac{1}{x}\sin y\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right|$$

得 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x, y)=0.$$

［说明］ 本题表明，当 $x\to\infty$, $y\to\infty$ 时，$f(x, y)$ 累次极限虽然都不存在，但二重极限却存在.

(2) 多元函数的连续性

1120. 已知 $f(x, y)$ 在区域 D 内对自变量 x 连续，并且对自变量 y 满足李普希茨条件，即

$$|f(x, y')-f(x, y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

(x, y'), $(x, y'')\in D$, L 为常数. 求证 $f(x, y)$ 在 D 内连续.

［证］ 因为 $f(x, y)$ 对自变量 y 满足李普希茨条件，故对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{2L}>0$，当 $|y'-y''|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x, y')-f(x, y'')|\leqslant L|y'-y''|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $f(x, y)$ 在区域 D 内对自变量 x 连续，故对 D 内任一确定的点 (x_0, y_0)，对于上述 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta_2>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续，由(x_0,y_0)的任意性得$f(x,y)$在D内连续.

1121. 设二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，求证$f(x_0,y)$作为y的函数在y_0连续；同样$f(x,y_0)$作为x的函数在x_0连续. 反过来，若$f(x_0,y)$在y_0连续，$f(x,y_0)$在x_0连续，问$f(x,y)$是否在(x_0,y_0)连续.

[证] 由$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续得，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，有$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 现在固定$x=x_0$，显然有$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$(当$|y-y_0|<\delta$时). 这样便证明了$f(x_0,y)$作为$y$的函数在$y_0$连续. 同样可证明$f(x,y_0)$作为$x$的函数在$x_0$连续. 又设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

很明显，$f(0,y)=0$，$f(x,0)=0$，所以$f(0,y)$作为y的函数在$y=0$连续；$f(x,0)$作为x的函数在$x=0$连续. 但是当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)$无极限(参见第1107(1)题). 所以$f(x,y)$在$(0,0)$点不连续.

1122. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}\\y\to0}}\ln\operatorname{arc\,tg}(3x^2+y^2)$.

[解] (1) 由二元初等函数的连续性，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\arcsin\sqrt{0+1}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由二元初等函数的连续性，有

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}\\y\to0}}\ln\operatorname{arc\,tg}(3x^2+y^2)=\ln\operatorname{arc\,tg}\left(3\cdot\frac{1}{3}+0\right)=\ln\frac{\pi}{4}.$$

1123. 讨论$f(x,y)=\dfrac{1}{\sin\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}$在$xOy$平面的连续性.

［解］ $\because f(x, y)=\frac{1}{\sin \pi x}+\frac{1}{\sin \pi y}$，$\therefore f(x, y)$的间断点$(x, y)$是满足$\sin \pi x=0$的点，以及满足$\sin \pi y=0$的点，即$f(x, y)$在$xOy$平面上除两族直线$x=m$，$y=n$（$m$，$n$是整数）外连续.

1124．讨论$f(x, y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}$在$xOy$平面上的连续性.

［解］ (1) $f(x,y)$的定义域是$x+y\neq 0$. 当$x+y\neq 0$时，$f(x,y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}$是二元初等函数，因此在$x+y\neq 0$处连续.

(2) 当$x+y=0$时，如果$(x_0, y_0)\neq(0, 0)$而$x_0+y_0=0$，则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x+y\neq 0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ x+y\neq 0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

故在$x+y=0$，$(x, y)\neq(0, 0)$处函数间断，但极限存在. 如果$(x_0, y_0)=(0, 0)$，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x+y\neq 0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x+y\neq 0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=+\infty.$$

故$(0, 0)$点是$f(x, y)$趋于无穷大的间断点.

1125．讨论$f(x, y)=x^2y^2\ln(x^2+y^2)$在$xOy$平面的连续性.

［解］ $f(x, y)$是初等函数，其定义域是除$(0, 0)$外的整个平面，因此除$(0, 0)$外$f(x, y)$处处连续. 再研究$f(x, y)$在$(0, 0)$点附近的性态，

$$\because\quad x^2y^2\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4},$$

$$\therefore\quad 0\leqslant|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2\cdot|\ln(x^2+y^2)|.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)=0.$$

由迫敛性$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$. 得$(0, 0)$点是$f(x, y)$的可去间断点，若设

$$F(x, y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2), & (x, y)\neq(0, 0),\\ 0, & (x, y)=(0, 0).\end{cases}$$

则$F(x, y)$是整个平面上的连续函数.

1126. 已知

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0,\\ x, & y=0.\end{cases}$$

求证 $f(x,\ y)$ 在 xOy 平面上处处连续.

［证］ 当 $y\neq 0$ 时，$f(x,\ y)=\dfrac{\sin xy}{y}$ 是二元初等函数，所以 $f(x,\ y)$ 在 $y\neq 0$ 时处处连续. 下面证明 $f(x,\ y)$ 当 $y=0$ 时也连续.

(1) 若 $(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$，则当 $y=0$ 时有 $|f(x,\ 0)|=|x|$；当 $y\neq 0$ 时有

$$|f(x,\ y)|=\left|\frac{\sin xy}{y}\right|\leqslant\frac{|xy|}{|y|}=|x|.$$

$$\therefore\quad |f(x,\ y)-f(0,\ 0)|=|f(x,\ y)|\leqslant|x|.$$

于是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)$，即 $f(x,\ y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处连续.

(2) 若 $(x_0,\ y_0)=(x_0,\ 0)$ $(x_0\neq 0)$，则

$$|f(x,\ y)-f(x_0,\ 0)|=|f(x,\ y)-x_0|=\begin{cases}|x-x_0|, & \text{当 } y=0 \text{ 时},\\ \left|\dfrac{\sin xy}{y}-x_0\right|, & \text{当 } y\neq 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

而

$$\left|\frac{\sin xy}{y}-x_0\right|=\left|\frac{\sin xy}{xy}\cdot x-x+x-x_0\right|$$

$$\leqslant|x|\cdot\left|\frac{\sin xy}{xy}-1\right|+|x-x_0|,$$

又已知 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}=1$，于是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}|f(x,\ y)-f(x_0,\ 0)|=0$，即 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ 0)$ 连续.

综上所述，$f(x,\ y)$ 在整个平面上连续.

1127. 已知

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}, & xy\neq 0,\ xy\geqslant -1,\\ 2, & xy=0.\end{cases}$$

求证 $f(x,\ y)$ 在其定义域内处处连续.

［证］ $f(x,\ y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 是二元初等函数，因此它在任何满足下

列条件的(x, y)点连续：$xy\neq 0$, $xy\geqslant -1$. 下面证明$f(x, y)$当$xy=0$时也连续.

(1) 当$(x_0, y_0)=(0, 0)$处时有$f(x_0, y_0)=f(0, 0)=2$, $f(x, 0)=f(0, y)=2$, 此外当$xy\neq 0$, $xy\geqslant -1$时，有

$$|f(x, y)-2|=\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|\leqslant|\sqrt{xy+1}+1-2|$$
$$=\frac{|xy|}{\sqrt{xy+1}+1}\leqslant|xy|\leqslant\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2.$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2=0$, 得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=2=f(0, 0)$ （其中$xy\neq 0$, $xy\geqslant -1$), 即$f(x, y)$在$(0, 0)$点连续.

(2) 当$(x_0, y_0)=(x_0, 0)$或$(x_0, y_0)=(0, y_0)$时(其中x_0, y_0为任意非零常数). 不失一般性，仅证$(x, y)=(x_0, 0)$时的连续性. ∵ $f(x_0, 0)=2$.

$$\therefore\quad |f(x, y)-f(x_0, 0)|=|f(x, y)-2|\leqslant|\sqrt{xy+1}+1-2|$$
$$=\frac{|xy|}{\sqrt{xy+1}+1}\leqslant|xy|=|xy-x_0y+x_0y|$$
$$\leqslant|x-x_0|\cdot|y|+|x_0|\cdot|y|.$$

而
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}(|x-x_0||y|+|x_0||y|)=0,$$

$$\therefore\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}f(x, y)=f(x_0, 0),$$ 即$f(x, y)$在$(x_0, 0)$处连续.

同理可证$f(x, y)$在$(0, y_0)$, $(y_0\neq 0)$处连续. 综上所述$f(x, y)$在其定义域内连续.

1128. 设$P(x, y)$是二元齐次n次多项式，在不包含$(0, 0)$点的闭区域D上，$P(x, y)$处处不为零. 求证：总存在$c>0$, 对一切属于D的(x, y)点，有$|P(x, y)|>c(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$.

［证］ 由已知$P(x, y)$在闭区域D上处处不为零，于是可推得$P(x,y)$在闭区域D上恒大于零（或恒小于零）. 否则，若在D存在(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，使$P(x_1, y_1)\cdot P(x_2, y_2)<0$, 则由二元连续函数的零点定理，在$D$内必存在$(x_0, y_0)$，使$P(x_0, y_0)=0$, 与已知矛盾. 不妨考虑$P(x, y)>0$的情况. 设

$$f(x, y)=\frac{P(x, y)}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\quad (x^2+y^2\neq 0).$$

由 $P(x, y)>0$, 得 $f(x, y)>0$, 并且 $f(x, y)$ 在闭区域 D 连续. 由闭区域连续函数的性质,必存在最小值 $m>0$, 即

$$\frac{P(x, y)}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\geqslant m\quad (对一切 (x, y)\in D 成立).$$

取 $c=\frac{m}{2}$, 则有 $P(x, y)>c(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$. 对于 $P(x, y)<0$ 的情况, 亦可作相应讨论.

$$\therefore\quad |P(x, y)|>c(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}.$$

1129. 已知 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, $(x_i, y_i)\in D(i=1,2, \cdots, n)$. 求证在 D 内至少存在一点 (ξ, η), 满足

$$f(\xi, \eta)=\frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)+\cdots+f(x_n, y_n)}{n}.$$

[证] 设 M 和 m 分别是连续函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最它们必存在. 于是有

$$m\leqslant\frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)+\cdots+f(x_n, y_n)}{n}\leqslant M,$$

再由连续函数的介质定理,得知存在 $(\xi, \eta)\in D$ 使

$$f(\xi, \eta)=\frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)+\cdots+f(x_n, y_n)}{n}.$$

§2. 多元函数的偏导数和全微分

(1) 偏　导　数

1130. 设 $f(x, y)=e^{-x}\sin(x+3y)$. 求 $f'_x\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $f'_y\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

[解一] $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x}[\cos(x+3y)-\sin(x+3y)]$,

$$\therefore\quad f'_x\left(0, \frac{\pi}{6}\right)=e^0\left[\cos\left(0+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\right]=-1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3e^{-x}\cos(x+3y),$$

$$\therefore\quad f'_y\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)=3\cdot e^0\cdot\cos\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

［解二］ $f\left(x,\ \frac{\pi}{6}\right)=e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=e^{-x}\cdot\cos x.$

$$f'_x\left(x,\ \frac{\pi}{6}\right)=-e^{-x}(\sin x+\cos x),$$

$$\therefore\quad f'_x\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)=-e^0(\sin 0+\cos 0)=-1.$$

$$f(0,\ y)=\sin 3y,\quad f'_y(0,\ y)=3\cos 3y.$$

$$\therefore\quad f'_y\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)=3\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

1131．设 $z=\sqrt{ax^3-by^3}$．求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在$(a,\ b)$处的值．

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3ax^2}{2\sqrt{ax^3-by^3}}$，$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}=\frac{3a^3}{2\sqrt{a^4-b^4}}.$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3by^2}{2\sqrt{ax^3-by^3}}$，$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}=\frac{-3b^3}{2\sqrt{a^4-b^4}}.$

1132．设 $u=x^2+2y^3+3z^4-3xy^2$，求点 $(1,\ 0,\ 2)$ 处偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$．

［解一］ $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3y^2$，$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,2)}=2;$

$\frac{\partial u}{\partial y}=6y^2-6xy$，$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,2)}=0;$

$\frac{\partial u}{\partial z}=12z^3$，$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,2)}=96.$

［解二］ $u(x,\ 0,\ 2)=x^2+48$，$u'_x(x,\ 0,\ 2)=2x$，

$\therefore\quad u'_x(1,\ 0,\ 2)=2.$

$u(1,\ y,\ 2)=2y^3-3y^2+49$，$u'_y(1,\ y,\ 2)=6y^2-6y$，

$\therefore\quad u'_y(1,\ 0,\ 2)=0.$ $u(1,\ 0,\ z)=3z^4+1$，$u'_z(1,\ 0,\ z)=12z^3$，

$$\therefore\quad u'_z(1,\ 0,\ 2)=96.$$

1133．设 $f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,\ 0),\\ 0, & (x,\ y)=(0,\ 0).\end{cases}$ 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$．

［解］ 当$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当$(x, y)=(0, 0)$时，由偏导数的定义，

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0;$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, \Delta y)-f(0, 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{0+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

综上所述得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y)\neq(0, 0),\\ 0, & (x, y)=(0, 0);\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y)\neq(0, 0),\\ 0, & (x, y)=(0, 0).\end{cases}$$

设$f(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^3+z^4}$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

［解］ 当$(x, y, z)\neq(0, 0, 0)$时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}};\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}};\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z^3}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}.$$

当$(x, y, z)=(0, 0, 0)$时，

$$\frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0, 0)-f(0, 0, 0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

所以在$(0, 0, 0)$点$f(x, y, z)$关于x的偏导数不存在.

$$\frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0, \Delta y, 0)-f(0, 0, 0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta y)^3}-0}{\Delta y}=0.$$

所以

$$\frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial y}=0.$$

$$\frac{\partial f(0, 0, 0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0, 0, \Delta z)-f(0, 0, 0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta z)^4}-0}{\Delta z}=0.$$

所以
$$\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z}=0.$$

1135. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

［解］ 当 $x\neq 0$ 时，
$$\frac{\partial f}{\partial x}=(\sqrt{|xy|})'_x=\sqrt{y}\cdot(\sqrt{|x|})'_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{|x|}}\operatorname{sgn}x.$$
当 $x=0$ 时，若 $y\neq 0$，则
$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot y|}-0}{\Delta x}$$
极限不存在．若 $y=0$，则
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0.$$
综上所述，有
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}x, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0,\ y=0.\end{cases}$$
由对称性，同理可推得
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{|y|}}\operatorname{sgn}y, & y\neq 0,\\ \text{不存在}, & y=0,\ x\neq 0,\\ 0, & y=0,\ x=0.\end{cases}$$

1136. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$.

［解］ 由偏导数的定义，
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0.$$
$$\therefore\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0.$$

［说明］ 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续，但是偏导数存在．说明二元函数连续不是可导的必要条件．这与一元函数的连续和可导之间的关系

完全不一样.

1137. 求下列函数对每一个自变量的偏导数(其中 x、y、t 是自变量):

(1) $z=\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$;　　(2) $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$;

(3) $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

(4) $z=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\left(\frac{x+y}{xy}\right)$.

〔解〕 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}}\cdot\left(-\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}\right)=\frac{\sqrt[3]{t}}{3x(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{t})}$,

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}}\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{t^4}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3t(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{x})}.$$

(2) $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=\ln(\sqrt{x^2+y^2}-x)-\ln(\sqrt{x^2+y^2}+x)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}-x}-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}-x}-\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\right)\cdot\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2}\,x|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\right)\cdot\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\operatorname{sgn} y.$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{x+y}{xy}\cdot\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}}+\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}}$

$=\dfrac{(x+y-xy)\sqrt{(xy)^2}}{x^2y\cdot\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{x+y}{xy}\cdot\dfrac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}}+\dfrac{-\dfrac{1}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}}$

$=\dfrac{(x+y-xy)\sqrt{(xy)^2}}{xy^3\cdot\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}$.

1138. 求下列函数对每一自变量的偏导数:

(1) $z=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$;　　　(2) $u=a^{\frac{y}{x}}$ (a 为正实数);

(3) $u=(\sin x)^{yz}$;

(4) $z=\ln[xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}]$.

[解] (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{y}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2\csc\dfrac{2x}{y}}{y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{y}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2x\csc^2\dfrac{2x}{y}}{y^2}$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a^{\frac{y}{x}}\cdot\ln a\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2}a^{\frac{y}{x}}\cdot\ln a$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=a^{\frac{y}{x}}\cdot\ln a\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}a^{\frac{y}{x}}\cdot\ln a$.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\cdot(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=y\cdot(\sin x)^{yz}\cdot\ln\sin x$.

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2+2xy+\dfrac{(xy^2+yx^2)\cdot(y^2+2xy)}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}}{xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}=\frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy+x^2+\dfrac{(xy^2+yx^2)(2xy+x^2)}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}}{xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}=\frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}.$$

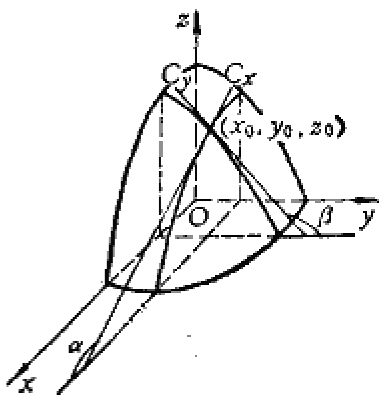
1139. 设 $z=x^{xy}$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

［解］ $z=x^{xy}=e^{xy\ln x}$.

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy\ln x}\cdot[yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}]=x^{xy+y-1}(y\ln x+1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy\ln x}\cdot(x^y\cdot\ln x)\cdot\ln x=x^{xy+y}\cdot(\ln x)^2.$$

1140. 求曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{4x^2+y^2}{2} \\ y=2 \end{cases}$ 在点 $P(1,\ 2,\ 4)$处的切线与 x 轴正向的夹角.



［分析］ 空间曲面 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 的几何意义是空间曲面 $z=f(x,\ y)$与平面 $y=y_0$ 的交线 C_x, 在$(x_0,\ y_0)$点处的切线与 x 轴正向交角 α 的正切 $\operatorname{tg}\alpha$. 同样, $(x_0,\ y_0)$ 处的 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 可看作曲面与平面 $x=x_0$ 的交线 C_y, 在$(x_0,\ y_0)$点处的切线与 y 轴正向交角 β 的正切 $\operatorname{tg}\beta$(如图).

［解］ 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{4x^2+y^2}{2} \\ y=2 \end{cases}$ 可看作空间曲面 $z=\dfrac{4x^2+y^2}{2}$ 与平面 $y=2$ 的交线, 故 $P(1,\ 2,\ 4)$处的切线与 x 轴正向的夹角的正切值为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=4x\Big|_{(1,2)}=4.$$

$\therefore$ 夹角 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}4$.

1141. 已知曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ 和 $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ 与平面 $y=2$ 相交

分别得两条曲线，求两条曲线的夹角.

【解】 解方程组 $\begin{cases} z=x^2+\dfrac{y^2}{6}, \\ z=\dfrac{x^2+y^2}{3}, \\ y=2. \end{cases}$ 得 $x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=\dfrac{5}{3}$，和 $x_2=-1,\ y_2=2,\ z_2=\dfrac{5}{3}$.

在交点 $\left(1,\ 2,\ \dfrac{5}{3}\right)$ 处，

曲线 $\begin{cases} z=x^2+\dfrac{y^2}{6}, \\ y=2. \end{cases}$ 与 x 轴正向夹角的正切值为 $\left.\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(1,2,\frac{5}{3})}=2$.

曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{3}, \\ y=2 \end{cases}$ 与 x 轴正向夹角的正切值为 $\left.\dfrac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(1,2,\frac{5}{3})}=\dfrac{2}{3}$.

两曲线夹角是它们切线的夹角，∴ 两条曲线夹角的正切

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2-\dfrac{2}{3}}{1+2\cdot\dfrac{2}{3}}=\frac{4}{7}.$$

两条曲线在交点 $\left(1,\ 2,\ \dfrac{5}{3}\right)$ 处夹角为 $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{7}$ 与 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{7}$.

在交点 $\left(-1,\ 2,\ \dfrac{5}{3}\right)$ 处，

曲线 $\begin{cases} z=x^2+\dfrac{y^2}{6}, \\ y=2. \end{cases}$ 与 x 轴正向夹角的正切值为 $\left.\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(-1,2,\frac{5}{3})}=-2$.

曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{3}, \\ y=2. \end{cases}$ 与 x 轴正向夹角的正切值为 $\left.\dfrac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(-1,2\,\frac{5}{3})}=-\dfrac{2}{3}$.

同理得两条曲线夹角的正切 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-2+\dfrac{2}{3}}{1+2\cdot\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{4}{7}$. 两条曲线在交点 $\left(-1,\ 2,\ \dfrac{5}{3}\right)$ 处夹角为 $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{7}$ 与 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{7}$.

1142. 已知 $z=x+2y+f(3x-4y)$，并且当 $y=0$ 时 $z=x^2$.

求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

［解］ 当 $y=0$ 时，$z=x+f(3x)$，$\therefore f(3x)=x^2-x$.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x,$$

得

$$f(3x-4y)=\frac{1}{9}(3x-4y)^2-\frac{1}{3}(3x-4y).$$

$$\therefore \quad z=x+2y+\frac{1}{9}(3x-4y)^2-\frac{1}{3}(3x-4y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}(3x-4y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3\frac{1}{3}-\frac{8}{9}(3x-4y).$$

1143. 若 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$，且 $z(x, 0)=e^x$，求 $z=z(x, y)$.

［解］ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\therefore \quad z=\int\frac{x}{x^2+y^2}dy+\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\varphi(x)$.

又 $z(x, 0)=e^x$，$\therefore \varphi(x)=e^x$. 于是

$$z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+e^x.$$

1144. 求证函数 $u=\ln(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z)$满足方程:

$$\sin 2x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\sin 2y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\sin 2z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=2.$$

［证］ $\because \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z},$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\sec^2 z}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}.$$

$$\therefore \quad \sin 2x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin 2x\cdot\sec^2 x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}=\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z},$$

$$\sin 2y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin 2y\cdot\sec^2 y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}=\frac{2\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z},$$

$$\sin 2z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\sin 2z\cdot\sec^2 z}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}=\frac{2\operatorname{tg}z}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}.$$

得

$$\sin 2x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\sin 2y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\sin 2z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z)}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}=2.$$

1145. 求证函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$满足方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=u^4.$$

［证］　$\because$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-1}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2y=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot 2z=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}=u^4.$$

1146. 求证 $z=f(x,\ y)$ 是齐次 m 次函数的充要条件是

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=mf(x,\ y).$$

［证］ 必要性:

若 $f(x,\ y)$ 是齐 m 次函数，则 $f(tx,\ ty)=t^mf(x,\ y)$. 设 $u=tx,\ v=ty$, 上式两边对 t 求导,得

$$x\cdot\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}=mt^{m-1}f(x,\ y).$$

令 $t=1$, 便有 $u=x,\ v=y$, 得

$$x\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=mf(x,\ y).$$

充分性:

若 $z=f(x,\ y)$ 满足 $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=mf(x,\ y)$.

令 $$F(t)=\frac{f(tx,\ ty)}{t^m},\quad u=tx,\ v=ty.$$

则 $$F'(t)=\frac{x\cdot\dfrac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}+y\cdot\dfrac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}}{t^m}-mt^{-(m+1)}f(tx,\ ty).$$

因为 $$x\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=mf(x,\ y),$$

即 $$u\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}+v\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}=mf(u,\ v),$$

$$\therefore\ xt\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}+yt\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}=mf(u,\ v),$$

$$x\cdot\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}=mt^{-1}f(u,\ v).$$

于是　$$F'(t)=\frac{\dfrac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}\cdot x+\dfrac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}\cdot y}{t^m}-mt^{-(m+1)}f(tx,\ ty)$$

$$=\frac{mt^{-1}f(u,\ v)}{t^m}-mt^{-(m+1)}f(tx,\ ty)=0.$$

由此得 $F(t)=c$. 取 $t=1$, $F(1)=f(x,\ y)=c$.

$\therefore$　$\dfrac{f(tx,\ ty)}{t^m}=F(t)=f(x,\ y)$, 因此 $f(tx,\ ty)=t^mf(x,\ y)$, $f(x,\ y)$ 是 m 次齐次函数.

[说明]　本题结论称为欧拉定理.

1147. 就下列函数验证欧拉定理:

(1) $z=x^3+2xy^2-3y^3$;　　(2) $z=\dfrac{1}{x^3-y^3}$;

(3) $z=e^{\frac{x}{y}}$;　　(4) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}$.

[解]　(1) $\because$　$f(tx,\ ty)=t^3x^3+t^32xy^2-3t^3y^3=t^3f(x,\ y)$.

$\therefore$　$z=x^3+2xy^2-3y^3$ 是三次齐次函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2y^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4xy-9y^2.$$

有　$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=3x^3+2xy^2+4xy^2-9y^3=3(x^3+2xy^2-3y^3)$$

$$=3f(x,\ y).$$

即函数 z 满足欧拉定理.

(2) $$f(tx,\ ty)=\frac{1}{t^3x^3-t^3y^3}=\frac{1}{t^3(x^3-y^3)}=\frac{1}{t^3}f(x,\ y).$$

即函数 z 是齐次函数,满足欧拉定理结论.

(3) $f(tx,\ ty)=e^{\frac{tx}{ty}}=t^0\cdot f(x,\ y)$.

$\therefore$ 函数 z 是零次齐次函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y}-e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y}=0.$$

即函数 z 满足欧拉定理.

(4) $f(tx,\ ty,\ tz)=\left(\frac{ty}{tx}\right)^{\frac{2tx}{tz}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}=t^0\cdot f(x,\ y,\ z)$.

∴ 函数 u 是零次齐次函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{2x}{z}\ln\frac{y}{x}}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}\cdot\left(\frac{2}{z}\ln\frac{y}{x}-\frac{2}{z}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{2x}{z}\ln\frac{y}{x}}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}\cdot\frac{2x}{yz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}\right]=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}\cdot\left(\ln\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{z^2}\right).$$

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2x}{z}}\left[\left(\frac{2x}{z}\ln\frac{y}{x}-\frac{2x}{z}\right)+\frac{2x}{z}-\frac{2x}{z}\ln\frac{y}{x}\right]$$

$$=0\cdot f(x,\ y,\ z).$$

即函数 u 满足欧拉定理.

(2) 多元函数的全微分

1148. 函数 $z=|x-a|+|y-b|$ 在 $(a,\ b)$ 点是否可微？为什么？

［解］ 先讨论函数在 $(a,\ b)$ 点的偏导数,

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(a+\Delta x,\ b)-z(a,\ b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}$$

不存在. 由全微分的概念,函数在 $(0,\ 0)$ 处不可微.

1149. 函数 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,\ 0)$ 点是否可微？为什么？

［解］ 先研究 z 在 $(0,\ 0)$ 点的偏导数

$$z'_x(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}}-0}{\Delta x}=0;$$

$$z'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0+(\Delta y)^2}}-0}{\Delta y}=0.$$

若函数在(0, 0)点处可微，则有 $dz=z'_x(0,0)\cdot\Delta x+z'_y(0,0)\cdot\Delta y=0$.

并且还有 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

但在这里 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

令 $\Delta y=k\cdot\Delta x$，则上式为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k\cdot(\Delta x)^2}{(1+k^2)\cdot\Delta x^2}=\frac{k}{1+k^2}$.

极限与 k 有关，故极限不存在．所以函数在(0, 0)点不可微．

1150．函数 $z=\begin{cases}0, & xy=0\\ 1, & \text{其它点}\end{cases}$ 在(0, 0)点是否可微？为什么？

［解］ 先研究函数在(0, 0)点的偏导数：

$$z'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0;$$

$$z'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(0,\Delta y)-z(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

若函数在(0, 0)处可微，则有 $dz=0$．以及

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

但这里 $$\Delta z=z(\Delta x,\Delta y)-z(0,0)=1,$$

$\therefore\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=+\infty$．∴ 函数在(0, 0)处不可微．

1151．函数

$$z=\begin{cases}0, & x^2+y^2=0\\ (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

在原点是否可微？为什么？

［解］ 先求函数在(0, 0)点的偏导数：

$$z'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(\Delta x)^2+0]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+0}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}=0.$$

$$z'_y(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(0,\ \Delta y)-z(0,\ 0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[0+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{\sqrt{0+(\Delta y)^2}}-0}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2}}=0.$$

$$\therefore\quad \Delta z=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

故函数在(0, 0)点可微.

1152. 求函数 $u=z\arcsin\dfrac{x}{y}$ 在(1, 2, 3)点的全微分.

［解］ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\dfrac{\dfrac{1}{y}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\dfrac{-\dfrac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

于是(1, 2, 3)点的偏导数分别是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\sqrt{3},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\frac{\pi}{6},$$

并且偏导数在(1, 2, 3)点连续, ∴ (1, 2, 3)处的微分为

$$du=\sqrt{3}\,dx-\frac{\sqrt{3}}{2}\,dy+\frac{\pi}{6}\,dz.$$

1153. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\dfrac{x^2-2y^2}{x+y}$;　　　　(2) $z=(x^2+y^2)\cdot\operatorname{arc\,tg}(xy)$;

(3) $z=(\ln x)^{\cos y}$.

［解］ (1) $$dz=d\left(\frac{x^2-2y^2}{x+y}\right)=\frac{(x+y)d(x^2-2y^2)-(x^2-2y^2)d(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{(x+y)[dx^2-2dy^2]-(x^2-2y^2)[dx+dy]}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{(x^2+2xy+2y^2)dx-(x^2+4xy+2y^2)dy}{(x+y)^2}.$$

(2) $$dz=d[(x^2+y^2)\text{arc tg}\, xy]$$

$$=\text{arc tg}\, xyd(x^2+y^2)+(x^2+y^2)d\,\text{arc tg}\, xy$$

$$=\text{arc tg}\, xy[2xdx+2ydy]+(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{1+x^2y^2}\cdot(xdy+ydx)$$

$$=\left[\frac{y(x^2+y^2)}{1+x^2y^2}+2x\,\text{arc tg}\, xy\right]dx$$

$$+\left[\frac{x(x^2+y^2)}{1+x^2y^2}+2y\,\text{arc tg}\, xy\right]dy.$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\cdot\cos y\cdot(\ln x)^{\cos y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y\cdot\ln(\ln x)\cdot(\ln x)^{\cos y}.$$

$$\therefore\quad dz=\frac{1}{x}\cos y(\ln x)^{\cos y-1}dx-\sin y\ln(\ln x)\cdot(\ln x)^{\cos y}dy.$$

1154. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\text{arc sin}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;　(2) $u=\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

［解］ (1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\text{sgn}\, y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\text{sgn}\, y.$$

$$\therefore\quad dz=\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\text{sgn}\, ydx-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\text{sgn}\, ydy.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z\cdot\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2z}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xyz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

$$\therefore\quad du=\frac{y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dx-\frac{xyz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dy+\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}dz.$$

1155. 若 x, y 的绝对值很小的时候，求证 $(1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny$.

［证］ 设 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$，问题化为求 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的近似值.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=m(1+x)^{m-1}(1+y)^n;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=n(1+x)^m\cdot(1+y)^{n-1}.$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=m;\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=n.$$

于是 $f(x,y)-f(0,0)\approx df=\left.\frac{df}{dx}\right|_{(0,0)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\cdot\Delta y=mx+ny.$

$$f(x,y)\approx f(0,0)+mx+ny=1+mx+ny.$$

1156. 求 $2.001\times3.002^2\times4.003^3$ 的近似值.

［解］ 利用上题结论，有

$$\begin{aligned}&2.001\times3.002^2\times4.003^3\\&=2(1+0.0005)\times9\left(1+\frac{0.002}{3}\right)^2\times64\left(1+\frac{0.003}{4}\right)^3\\&\approx1152\left(1+0.0005+2\times\frac{0.002}{3}+3\times\frac{0.003}{4}\right)\approx1156.704.\end{aligned}$$

1157. 利用全微分近似计算:

(1) $\frac{(1.01)^5\cdot(0.97)^3}{\sqrt[3]{(8.03)^2}}$;　　(2) $\sqrt{(4.02)^3+(1.94)^3}$.

［解］ (1) 利用第 1155 题结论，有

$$\begin{aligned}\frac{(1.01)^5\cdot(0.97)^3}{\sqrt[3]{(8.03)^2}}&=(1+0.01)^5\cdot(1-0.03)^3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{0.03}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\\&\approx\frac{1}{4}\left[1+5\times0.01-3\times0.03-\frac{2}{3}\times\frac{0.03}{8}\right]\\&=0.24.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{(4.02)^3+(1.94)^3}=(4.02)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.94}{4.02}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=8(1+0.005)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{1.94}{4.02}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 8\cdot\left[1+\frac{3}{2}\cdot 0.005+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1.94}{4.02}\right)^3\right]$$

其中

$$\left(\frac{1.94}{4.02}\right)^3=\left(\frac{2-0.06}{4+0.02}\right)^3=\frac{8(1-0.03)^3}{64(1+0.005)^3}$$

$$=\frac{1}{8}(1-0.03)^3(1+0.005)^{-3}$$

$$\approx\frac{1}{8}[1-3\times 0.03-3\times 0.005]=0.112.$$

$\therefore$ $\sqrt{(4.02)^3+(1.94)^3}\approx 8\cdot\left[1+\frac{3}{2}\times 0.005+\frac{1}{2}\times 0.112\right]$

$$=8.51.$$

1158. 利用全微分近似计算:

(1) $\ln(\sqrt[3]{1.04}+\sqrt[5]{0.97}-1)$; (2) $\sin 46°\cdot \operatorname{tg} 59°30'$.

[解] (1) 设 $f(x, y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}-1)$.

取 $x_0=1$, $\Delta x=0.04$, $y_0=1$, $\Delta y=-0.03$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}-1}\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}-1}\cdot\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{y^4}},$$

$\therefore$ (1, 1) 处的偏导数分别为 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{5}$.

$$\Delta f\approx df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

于是

$$f(1.04, 0.97)\approx f(1, 1)+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$$

$$=\frac{1}{3}\times 0.04+\frac{1}{5}\times(-0.03)\approx 0.007.$$

(2) 设 $f(x, y)=\sin x\cdot\operatorname{tg} y$.

取 $x_0=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$; $y_0=\frac{\pi}{3}$, $\Delta y=-\frac{\pi}{360}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\operatorname{tg} y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x\sec^2 y$. $\therefore\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 处的偏导数分别为:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2\sqrt{2}.$$

于是

$$f\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right),\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{360}\right)\right]\approx f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}+2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)\approx 1.2214.$$

1159．已知扇形的圆心角为 $\alpha=60°$，$R=20$ cm，若增加 $\Delta\alpha=1°$，半径减少 0.1 cm，问面积变化多少？

［解］ 扇形的面积 $S=\frac{1}{2}R^2\alpha$.

$$\Delta S\approx dS=\frac{\partial S}{\partial R}\cdot\Delta R+\frac{\partial S}{\partial\alpha}\cdot\Delta\alpha=R\alpha\cdot\Delta R+\frac{1}{2}R^2\cdot\Delta\alpha$$

$$=20\times\frac{\pi}{3}\times(-0.1)+\frac{1}{2}\times20^2\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{9}\pi\approx1.396(\text{cm}^2).$$

∴ 面积增加 1.396 cm^2.

1160．依公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ （l 为摆长，g 为重力加速度，T 为周期）若单摆的摆长 l 与周期 T 分别为 $l=100\pm0.005$ cm，$T=2\pm0.003$ s，求由于 l 与 T 的误差在计算重力加速度 g 时的绝对误差和相对误差．

［解］ $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$，　$\frac{\partial g}{\partial l}=\frac{4\pi^2}{T^2}$，　$\frac{\partial g}{\partial T}=-\frac{8\pi^2 l}{T^3}$.

$$|\Delta g|\approx|dg|=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\cdot\Delta l+\frac{\partial g}{\partial T}\cdot\Delta T\right|\leqslant\left|\frac{\partial g}{\partial l}\cdot\Delta l\right|+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\cdot\Delta T\right|$$

$$=\frac{4\pi^2}{T^2}|\Delta l|+\frac{8\pi^2 l}{T^3}\cdot|\Delta T|=\frac{4\pi^2}{4}\times0.005+\frac{8\pi^2\cdot100}{8}\times0.003$$

$$=0.305\pi^2\approx3.0102(\text{cm/s}^2).$$

∴ 绝对误差为 $3.0102(\text{cm/s}^2)$.

∴ 相对误差为 $\left|\frac{\Delta g}{g}\right|\approx\frac{0.305\pi^2}{\frac{4\pi^2\cdot100}{2^2}}=0.00305=0.305\%$.

(3) 复合函数的偏导数

1161. 已知 $z=x^2y-y^2x, x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial\rho}, \frac{\partial z}{\partial\theta}$.

[解] $\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=(2xy-y^2)\cdot\cos\theta+(x^2-2xy)\cdot\sin\theta$,

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$$
$$=(2xy-y^2)\cdot(-\rho\sin\theta)+(x^2-2xy)\cdot(\rho\cos\theta)$$
$$=\rho\cos\theta\cdot(x^2-2xy)-\rho\sin\theta\cdot(2xy-y^2).$$

1162. 已知 $u=(x-y)^z$, $z=x^2+2y^2$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

[解] 令 $u=f(x, y, z)=(x-y)^z$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=z(x-y)^{z-1}+(x-y)^z\ln(x-y)\cdot 2x$$
$$=(x-y)^{z-1}[z+2x(x-y)\ln(x-y)],$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$=-z(x-y)^{z-1}+(x-y)^z\ln(x-y)\cdot 4y$$
$$=(x-y)^{z-1}[4y(x-y)\ln(x-y)-z].$$

[说明] 在 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ 中左端的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和右端的 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 两者意义是不相同的. 左端 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示复合函数 $u=u(x, y)$ (它是 x, y 的二元函数)对 x 求偏导数, 而右端 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是表示 $u=f(x, y, z)$ (它是 x, y, z 的三元函数)对 x 求偏导数.

1163. 求下列函数关于 x 的导数:

(1) $z=x^n+\ln y$, $y=\sin x$;

(2) $z=uv^2+\operatorname{arc\,tg} x$, $u=e^x$, $v=\cos x$.

[分析] 本题的函数 z 是作为一个自变量 x 的函数, 因此不是求关于 x 的偏导数, 而是求关于 x 的导数.

［解］ (1) $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\cos x+nx^{n-1}=\operatorname{ctg}x+nx^{n-1}$.

(2) $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}$

$=v^2\cdot e^x+2uv\cdot(-\sin x)+\frac{1}{1+x^2}$

$=(\cos^2 x-\sin 2x)e^x+\frac{1}{1+x^2}$.

1164. 已知：(1) $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, $x=\sin t$, $y=\cos t$; (2) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

［解］ (1) $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$=(2Ax+2By)\cdot\cos t+(2Bx+2Cy)\cdot(-\sin t)$

$=(A-C)\sin 2t+2B\cos 2t$.

(2) $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot 2e^{2t}+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\cdot 2e^{2t}$

$=\frac{2e^{2t}}{1+e^{4t}}$.

1165. 已知 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{1+a^2}$, $y=a\sin x$, $z=a\cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

［解］ $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$

$=\frac{a\cdot e^{ax}(y-z)}{1+a^2}+\frac{e^{ax}}{1+a^2}\cdot a\cos x+\left(-\frac{e^{ax}}{1+a^2}\right)\cdot(-a\sin x)$

$=\frac{ae^{ax}}{1+a^2}\cdot(y-z+\cos x+\sin x)$.

1166. 已知：$u=x^{y^z}$，求：$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

［解］ (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z\cdot x^{y^z-1}$.

(2) 令 $u=x^t$, $t=y^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=(x^t\ln x)\cdot z\cdot y^{z-1}=x^{y^z}\cdot z\cdot y^{z-1}\cdot\ln x.$$

(3) 令 $u=x^t$, $t=y^z$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=x^t\ln x,\quad \frac{\partial t}{\partial z}=y^z\ln y.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=(x^t\ln x)y^z\ln y=x^{y^z}\cdot y^z\ln x\cdot\ln y.$$

1167. 已知 $z=f(x,\ y,\ u,\ v)$，并且 f 可微，又知 $u=\sin x+\cos y$，$v=\sin x-\cos y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

［解］ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(\cos x)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(\cos x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\cos x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-\sin y)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(\sin y)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)\sin y.$$

1168. 求下列函数的偏导数，其中 f 是可微函数：

(1) $u=f\left(\frac{x+y}{y^2}\right)$，$x=s+t$，$y=st$，求 $\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$；

(2) $u=f(x,\ y)$，$x=r+2s+3t$，$y=r^2+4s^2+9t^2$，求 $\frac{\partial u}{\partial r}$，$\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$；

(3) $u=f(x,\ y,\ z)$，$x=s+t$，$y=s\cdot t$，$z=s^2+t^2$，求 $\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$.

［解］ (1) 令 $\frac{x+y}{y^2}=v$.

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{df}{dv}\cdot\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]=f'_v\cdot\left[\frac{1}{y^2}+\left(-\frac{y+2x}{y^3}\right)\cdot t\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{df}{dv}\cdot\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right]=f'_v\cdot\left[\frac{1}{y^2}+\left(-\frac{y+2x}{y^3}\right)\cdot s\right].$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=f'_x+2r\cdot f'_y$,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=2\cdot f'_x+8s\cdot f'_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=3\cdot f'_x+18t\cdot f'_y.$$

(3) $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}=f'_x+t\cdot f'_y+2s\cdot f'_z$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=f'_x+s\cdot f'_y+2t\cdot f'_z.$$

1169. 求下列函数的偏导数,其中 f, g, φ, ψ 都是可微函数.

(1) $u=\ln[f(v)+g(v)]$, $v=\sin\frac{x}{y}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(2) $u=e^x\cdot f(x+y,\ xy)$, $x=\varphi(s,\ t)$, $y=\psi(s,\ t)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial s}$; $\frac{\partial u}{\partial t}$.

[解] (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'(v)+g'(v)}{f(v)+g(v)}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)$

$$=\frac{1}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{f'(v)+g'(v)}{f(v)+g(v)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f'(v)+g'(v)}{f(v)+g(v)}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{f'(v)+g'(v)}{f(v)+g(v)}.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial s}=e^xf(x+y,\ xy)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}+e^xf'_1\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)$

$$+e^xf'_2\cdot\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial s}+x\frac{\partial\psi}{\partial s}\right).$$

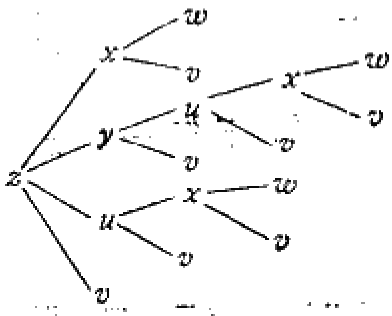
$$\frac{\partial u}{\partial t}=e^xf(x+y,\ xy)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+e^xf'_1\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

$$+e^xf'_2\cdot\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial t}+x\frac{\partial\psi}{\partial t}\right).$$

1170. 已知 $z=f(x,\ y,\ u,\ v)$, $x=\varphi(\omega,\ v)$, $y=\psi(u,\ v)$, $u=\chi(x,\ v)$, 并且 f, φ, ψ, χ 都可微. 求 $\frac{\partial z}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

[分析] 在中间变量较多的情况下,可以用树图来表示各中间变量与自变量的关系. 本题树图如下页所示:

［解］



$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial w}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)\right]+\frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]+\frac{\partial f}{\partial v}.$$

1171. 已知 $z=x^nf\left(\frac{y}{x^2}\right)$，$f$ 为可微函数，求证

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nx^nf.$$

［证］ $\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}\cdot f+x^n\cdot f'\cdot\left(-\frac{2y}{x^3}\right)$. $\frac{\partial z}{\partial y}=x^n\cdot f'\cdot\frac{1}{x^2}$.

$$\therefore\quad x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nx^nf-\frac{2y}{x^2}\cdot x^n\cdot f'+\frac{2y}{x^2}\cdot x^n\cdot f'$$

$$=nx^nf.$$

1172. 已知 $u=x^mf\left(\frac{y}{x^\alpha},\ \frac{z}{y^\beta}\right)$，$f$ 为可微函数，求证

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=mu.$$

［证］ $\frac{\partial u}{\partial x}=mx^{m-1}\cdot f+x^m\cdot\left[f'_1\cdot\left(-\frac{\alpha y}{x^{\alpha+1}}\right)+f'_2\cdot 0\right]$,

$\therefore\quad x\frac{\partial u}{\partial x}=mx^mf-\alpha x^{m-\alpha}yf'_1$; $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=x^m\left[f'_1\cdot\frac{1}{x^\alpha}+f'_2\cdot\left(-\frac{\beta z}{y^{\beta+1}}\right)\right]$,

$$\therefore\quad\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha y\cdot x^{m-\alpha}\cdot f'_1-\alpha\beta x^my^{-\beta}\cdot z\cdot f'_2;$$

$\frac{\partial u}{\partial z}=x^m\left[f'_1\cdot 0+f'_2\cdot\frac{1}{y^\beta}\right]$, $\quad\therefore\quad\alpha\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha\beta zx^my^{-\beta}\cdot f'_2$;

得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\beta z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=mx^mf-\alpha x^{m-\alpha}yf'_1+\alpha yx^{m-\alpha}\cdot f'_1-\alpha\beta x^my^{-\beta}z\cdot f'_2+\alpha\beta x^my^{-\beta}z\cdot f'_2$$

$$=mx^mf.$$

即
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=mu.$$

1173. 已知 $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$，其中 f 为可微函数，求证
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$$

［证］　将已知等式两边对 x 求偏导，得
$$-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}+f'\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).\quad\therefore\quad x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=z^2(1+f').$$
两边对 y 求偏导，得
$$-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{1}{y^2}.\quad\therefore\quad y^2\frac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot z^2.$$
于是
$$x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$$

1174. 设 $u=e^yf(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$，$f$ 为可微函数，求证
$$(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+xy\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=xyu.$$

［证］
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^yf'\cdot y\cdot\frac{2x}{2y^2}\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}},$$
$$\therefore\quad(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x(x^2-y^2)}{y}\cdot e^{\frac{x^2+2y^3}{2y^2}}\cdot f';$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^y\cdot f+e^yf'\cdot\left[e^{\frac{x^2}{2y^2}}+y\cdot\left(-\frac{x^2}{y^3}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right],$$
$$\therefore\quad xy\frac{\partial u}{\partial y}=xye^yf+xye^{\frac{x^2+2y^3}{2y^2}}\cdot f'-\frac{x^3}{y}e^{\frac{x^2+2y^3}{2y^2}}\cdot f'.$$
于是
$$(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=xye^y\cdot f=xyu.$$

1175. 设 $u(x,y)=y^2F(mx+ny)$，m、n 为常数，F 为可微函数，(1) 证明 $ny\frac{\partial u}{\partial x}-my\frac{\partial u}{\partial y}=-2mu$；(2) 若 $u\left(x,\frac{1}{3}\right)=x^2$，求 $u(x,y)$.

［解］　(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=my^2F'$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=2yF+ny^2F'$.

$$\therefore \quad ny\frac{\partial u}{\partial x}-my\frac{\partial u}{\partial y}=mny^3F'-2my^2F-mny^3F'=-2mu.$$

(2) $u\left(x, \frac{1}{s}\right)=x^2$, 则 $\frac{1}{s^2}F\left(mx+\frac{n}{s}\right)=x^2$.

$$F\left(mx+\frac{n}{s}\right)=s^2x^2=\frac{s^2}{m^2}\left(mx+\frac{n}{s}\right)^2-\frac{2ns}{m^2}\left(mx+\frac{n}{s}\right)+\frac{n^2}{m^2},$$

于是
$$F(t)=\frac{s^2}{m^2}t^2-\frac{2ns}{m^2}t+\frac{n^2}{m^2},$$

得
$$F(mx+ny)=\frac{s^2}{m^2}(mx+ny)^2-\frac{2ns}{m^2}(mx+ny)+\frac{n^2}{m^2}.$$

因此，$u(x, y)=y^2\left[\frac{s^2}{m^2}(mx+ny)^2-\frac{2ns}{m^2}(mx+ny)+\frac{n^2}{m^2}\right]$.

1176. 设 $f(x, y, z)$ 具有性质 $f(tx, t^my, t^nz)=t^kf(x, y, z)$, 求证:

(1) $f(x, y, z)=x^kf\left(1, \frac{y}{x^m}, \frac{z}{x^n}\right)$;

(2) $xf'_x(x, y, z)+myf'_y(x, y, z)+nzf'_z(x, y, z)$
$=kf(x, y, z)$.

[证] (1) 已知 $f(tx, t^my, t^nz)=t^kf(x, y, z)$.

令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $f\left(1, \frac{y}{x^m}, \frac{z}{x^n}\right)=\frac{1}{x^k}f(x, y, z)$.

$$\therefore \quad f(x, y, z)=x^kf\left(1, \frac{y}{x^m}, \frac{z}{x^n}\right).$$

(2) 令 $\xi=tx$, $\eta=t^my$, $\zeta=t^nz$. 则 $f(\xi, \eta, \zeta)=t^kf(x, y, z)$. 两边对 t 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot m\cdot t^{m-1}y+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot nt^{n-1}z=kt^{k-1}f(x, y, z).$$

令 $t=1$, 则 $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$. 于是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+my\frac{\partial f}{\partial y}+nz\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x, y, z).$$

1177. 研究函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$$

在(0, 0)点的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 及其连续性. 若令 $x=t$, $y=t$, 是否可以由复合函数求导法则求 $t=0$ 处的导数?

[解] 在(0, 0)点的偏导数是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^{\alpha}\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot \Delta y}{0+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

$(x, y)\neq(0, 0)$时,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}y(x^2+y^2)-2x\cdot x^{\alpha}\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^{\alpha-1}y[(\alpha-2)x^2+\alpha y^2]}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^{\alpha}(x^2+y^2)-2yx^{\alpha}y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^{\alpha}(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

再考虑 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0, 0)点的连续性.

(1) 当 $\alpha>2$ 时,令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^{\alpha-1}y[(\alpha-2)x^2+\alpha y^2]}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\alpha+2}\cdot\sin\theta\cdot\cos^{\alpha-1}\theta\cdot[(\alpha-2)\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta]}{\rho^4}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha-2}\cdot\sin\theta\cdot\cos^{\alpha-1}\theta\cdot[(\alpha-2)\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta]=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^{\alpha}(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\alpha+2}\cos^{\alpha}\theta\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\rho^4}$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha-2}\cdot\cos^{\alpha}\theta\cdot\cos 2\theta=0.$$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0, 0)点都连续.

此外当 $x=t$, $y=t$ 时, 满足复合函数求导的条件, 可按复合函数求导法求导,有

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(\alpha-1)t^{\alpha-2}.$$

当 $t=0$ 时亦成立, $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=0$.

(2) 当 $\alpha\leqslant 2$ 时:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha-2}\cdot\sin\theta\cdot\cos^{\alpha-1}\theta[(\alpha-2)\cos^2\theta+\alpha\sin^2\theta]\text{ 发散.}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha-2}\cdot\cos^{\alpha}\theta\cos 2\theta\text{ 发散.}$$

$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0, 0)点间断.

则当 $x=t$, $y=t$ 时,不满足复合函数求导法则的条件.

事实上这时 $f(t,\ t)=\frac{1}{2}t^{\alpha-1}(t\neq 0)$, $f(0,\ 0)=0$. 当 $\alpha=2$ 时, 在 $t=0$ 处 $\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}$, 当 $\alpha<2$ 时,在 $t=0$ 处 $\frac{du}{dt}$ 不存在;而在(0, 0)处

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0\times 1+0\times 1=0.$$

$\therefore$ 在 $t=0$ 时, $\frac{du}{dt}\neq\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

(4) 高阶偏导数、高阶全微分

1178. 求函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}(x^3+y^2)^2\sin\dfrac{1}{x^3+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$$

在原点的二阶偏导数.

[解] 当 $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x^3+y^2)\cdot 3x^2\cdot\sin\frac{1}{x^3+y^2}+(x^3+y^2)^2\cdot\cos\frac{1}{x^3+y^2}\cdot\left[-\frac{3x^2}{(x^3+y^2)^2}\right]$$

$$=6x^2(x^3+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^3+y^2}-3x^2\cdot\cos\frac{1}{x^3+y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x^3+y^2)\cdot 2y\sin\frac{1}{x^3+y^2}+(x^3+y^2)^2\cdot\cos\frac{1}{x^3+y^2}\cdot\left[-\frac{2y}{(x^3+y^2)^2}\right]$$

$$=4y(x^3+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^3+y^2}-2y\cdot\cos\frac{1}{x^3+y^2}.$$

当 $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(\Delta x)^3+0]^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^3+0}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^5\sin\frac{1}{(\Delta x)^3}=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[0+(\Delta y)^2]^2\sin\dfrac{1}{0+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y)^3\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}=0.$$

当$(x,y)=(0,0)$时的二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}f(\Delta x,0)-\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{\left\{6(\Delta x)^2[(\Delta x)^3+0]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^3+0}-3(\Delta x)^2\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^3+0}\right\}-0\right\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[6(\Delta x)^4\sin\frac{1}{(\Delta x)^3}-3\Delta x\cdot\cos\frac{1}{(\Delta x)^3}\right]=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,\Delta y)-\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left\{\left\{6\cdot 0\cdot[0+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{0+(\Delta y)^2}-3\cdot 0\cdot\cos\dfrac{1}{0+(\Delta y)^2}\right\}-0\right\}}{\Delta y}=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}f(\Delta x,0)-\dfrac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{\left\{4\cdot 0\cdot[(\Delta x)^3+0]\sin\frac{1}{(\Delta x)^3+0}-2\cdot 0\cdot\cos\frac{1}{(\Delta x)^3+0}\right\}-0\right\}}{\Delta x}=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(0,\ \Delta y)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,\ 0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left\{\left\{4\cdot\Delta y\cdot[0+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{0+(\Delta y)^2}-2\cdot\Delta y\cdot\cos\frac{1}{0+(\Delta y)^2}\right\}-0\right\}}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left[4(\Delta y)^2\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}-2\cos\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]$$ 不存在.

1179. 求函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$$

在(0, 0)点的二阶偏导数.

[解] $\frac{\partial}{\partial x}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$

$\frac{\partial}{\partial y}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\ \Delta y)-f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,\ y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0).$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,\ y)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0).$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(\Delta x,\ 0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,\ 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{(\Delta x)^4}}{\Delta x}=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(0,\ \Delta y)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0}{(\Delta y)^4}}{\Delta y}=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0,\ \Delta y)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\Delta y\cdot(-\Delta y^4)}{(\Delta y)^4}}{\Delta y}$$

$$=-1.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(\Delta x,0)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot(\Delta x^4)}{(\Delta x)^4}}{\Delta x}=1.$$

［说明］ 本例说明即使两个混合偏导数都存在，但仍可能不相等.

1180. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=xy\ln\frac{x}{y}$;

(2) $u=\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x)$.

［解］ (1) $z=xy\ln x-xy\ln y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln x+y-y\ln y=y\ln\frac{x}{y}+y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\ln x-x\ln y-x=x\ln\frac{x}{y}-x.\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln x+1-\ln y-1=\ln\frac{x}{y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y}.$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(y+z)[\cos(x+y)\sin(z+x)+\sin(x+y)\cos(z+x)]$$

$$=\sin(y+z)\cdot\sin(x+y+z+x)=\sin(y+z)\sin(2x+y+z).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sin(y+z)\cos(2x+y+z).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(y+z)\sin(2x+y+z)+\sin(y+z)\cos(2x+y+z)$$

$$=\sin(2x+2y+2z)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

由对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\sin(z+x)\cos(x+2y+z).\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2\sin(x+y)\cos(x+y+2z).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\sin(2x+2y+2z)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\sin(2x+2y+2z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}.$$

1181. 设 $z=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，求证函数 z 满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

［证］ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\cdot\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{[(x-a)^2+(y-b)^2]-2(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}.$$

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}$. $\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

1182. 求证函数

$$u=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

满足热传导方程(其中 x_0, y_0, z_0, a 是常数):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

[证] $$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{3}{2(2a\sqrt{\pi})^3t^{\frac{5}{2}}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

$$+\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3\cdot t^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

$$\cdot\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t^2}$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

$$\times\left[-\frac{3}{2t}+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t^2}\right]$$

$$=u\cdot\left[-\frac{3}{2t}+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t^2}\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3t^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}\cdot\left[-\frac{2(x-x_0)}{4a^2t}\right]$$

$$=-u\cdot\frac{x-x_0}{2a^2t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{x-x_0}{2a^2t}-\frac{u}{2a^2t}=u\left[\frac{(x-x_0)^2}{4a^4t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right],$$

由对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u\cdot\left[\frac{(y-y_0)^2}{4a^4t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right],\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u\cdot\left[\frac{(z-z_0)^2}{4a^4t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right].$$

$$\therefore\quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=u\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t^2}-\frac{3}{2t}\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

1183. 设 $z=\frac{x^2}{y}+\ln\frac{x}{y}$，求 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

［解］ $z=\frac{x^2}{y}+\ln x-\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y}+\frac{1}{x}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{y}-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}+\frac{1}{y^2}=\frac{2x^2+y}{y^3}.$$

$$\therefore\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y}-1-\frac{4x^2}{y}+\frac{2x^2+y}{y}=0.$$

1184. 设 $u=z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{yz}{x^2+y^2}$, $\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=-\frac{xz}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.\quad \therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1185. 设 $u=\sin ax\cdot\sin by\cdot\cos pz$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

试确定常数 a、b、p、h 之间的关系.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=a\cos ax\cdot\sin by\cdot\cos pz$, $\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a^2u$,

同理 $\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2u,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-p^2u.$

$$\because\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \therefore\quad -(a^2+b^2)u=-\frac{1}{h^2}p^2u.$$

常数 a、b、p、h 满足关系

$$a^2+b^2=\frac{p^2}{h^2}.$$

1186. 设 $z=u(x, y)e^{ax+by}$，其中 $u(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定 a、b，使函数 z 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+au\cdot e^{ax+by}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bu\cdot e^{ax+by}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot e^{ax+by}+b\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{ax+by}+a\cdot\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abu\cdot e^{ax+by}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}e^{ax+by}+b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abu\cdot e^{ax+by}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}-aue^{ax+by}-\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}-bue^{ax+by}+u\cdot e^{ax+by}$$

$$=0.$$

由 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$$

整理得

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+(abu-au-bu+u)e^{ax+by}=0,$$

得 $$\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(a-1)(b-1)u\right]\cdot e^{ax+by}=0.$$

故当 $a=b=1$ 时，$z=u(x, y)\cdot e^{x+y}$ 满足方程.

1187. 设 $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$，求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

［解］ ∵ 根据平面三角公式，

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y+\operatorname{arc\,tg}z+c$$

（其中 $c=-\pi, 0, \pi$）.

于是 $$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0.$$

1188. 设 $z=\ln\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$，求 $\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial u\partial v}$.

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\cdot\frac{x-u}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}$

$$=\frac{x-u}{(x-u)^2+(y-v)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2(x-u)(y-v)}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial u}=\frac{-8(x-u)^2(y-v)+2(y-v)[(x-u)^2+(y-v)^2]}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^3}$$

$$=\frac{2(y-v)^3-6(x-u)^2(y-v)}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^3},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial u\partial v}=\frac{\left\{\begin{matrix}6[(x-u)^2-(y-v)^2][(x-u)^2+(y-v)^2]\\+12(y-v)^2[(y-v)^2-3(x-u)^2]\end{matrix}\right\}}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^4}$$

$$=\frac{6[(x-u)^4-6(x-u)^2(y-v)^2+(y-v)^4]}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^4}.$$

1189. 设 $u=xyze^{x+y+z}$，求：$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{x+y+z}+xyze^{x+y+z}=yze^{x+y+z}+u,$

由数学归纳法，可得

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}=pyze^{x+y+z}+xyze^{x+y+z}=(x+p)yze^{x+y+z}.$$

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=(x+p)(y+q)ze^{x+y+z},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}.$$

1190. 设 $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

［解］ 由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+f''_{12}\cdot\frac{1}{y}+f''_{21}\cdot\frac{1}{y}+f''_{22}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}=f''_{11}+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{12}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f''_{22}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y}+f'_2\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=-\frac{x}{y^2}\cdot f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{y^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_2\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{22}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2+f'_2\cdot\frac{2x}{y^3}=\frac{x^2}{y^4}f''_{22}+\frac{2x}{y^3}f'_2.$$

1191. 设 $z=f(x, y)$，$y=g(x)$，f 具有二阶连续偏导数，g 二阶可导，求 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

［解］ 按复合函数求导法则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dg}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dg}{dx}\right)\frac{dg}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2g}{dx^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dg}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2g}{dx^2}.$$

1192. 设 $z=z\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\ xy\right)$，$z$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

［解］ $z=z\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\ xy\right)=z(\arccos x,\ xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-z'_1\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+z'_2\cdot y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{11}\cdot\frac{1}{1-x^2}-z''_{12}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}-z'_1\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$-z''_{21}\cdot\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}+z''_{22}\cdot y^2$$

$$=\frac{z''_{11}}{1-x^2}-\frac{2yz''_{12}}{\sqrt{1-x^2}}+y^2z''_{22}-\frac{xz'_1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

1193. 设 $u=f(r,\ r\cos\varphi)$，f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}$.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-f_2'\cdot r\sin\varphi$，　$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=-f_2'\cdot r\cos\varphi+f_{22}''\cdot r^2\sin^2\varphi$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi}=\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\partial r}=-f_{12}''r\sin\varphi-f_{22}''r\cos\varphi\sin\varphi-f_2'\sin\varphi.$$

1194．设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v=x^2-y^2$，且 $x^2+y^2\neq 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f_u'+2xf_v'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}f_u'-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\left[f_{uu}''\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+f_{uv}''(-2y)\right]$$

$$+2x\left[f_{vu}''\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+f_{vv}''\cdot(-2y)\right]$$

$$=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}f_u'+\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}f_{uu}''-4xyf_{vv}''.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f_u'-2yf_v';$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}f_u'-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\left[f_{uu}''\cdot\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+f_{uv}''\cdot(-2y)\right]$$

$$-2f_v'-2y\left[f_{vu}''\cdot\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+f_{vv}''(-2y)\right]$$

$$=\frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}f_u'-2f_v'+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}f_{uu}''+\frac{4y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}f_{uv}''+4y^2f_{vv}''.$$

1195．设 $u=e^{f(x,x+y,xy)}$，且 f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=e^f\cdot[f_1'+f_2'+yf_3']$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^f[f_1'+f_2'+yf_3']^2+e^f[f_{11}''+f_{12}''+yf_{13}''+f_{21}''+f_{22}''$$

$$+yf_{23}''+yf_{31}''+yf_{32}''+y^2f_{33}'']$$

$$=e^f[f_1'+f_2'+yf_3']^2+e^f[f_{11}''+2f_{12}''+2yf_{13}''+f_{22}''+2yf_{23}''+y^2f_{33}''],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^f[f_1'+f_2'+yf_3']\cdot[f_2'+xf_3']$$
$$+e^f[f_{12}''+xf_{13}''+f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+yf_{32}''+yxf_{33}'']$$
$$=e^f[f_1'+f_2'+yf_3']\cdot[f_2'+xf_3']$$
$$+e^f[f_{12}''+xf_{13}''+f_{22}''+(x+y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'].$$

1196. 设 $z=(x^2+y^2)f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$，$f$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

［解］ $$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot f+(x^2+y^2)\cdot\left[f_1'\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+f_2'\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$
$$=2xf+xf_1'+yf_2',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f+2x\cdot\left[f_1'\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+f_2'\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$
$$+f_1'+x\cdot\left[f_{11}''\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+f_{12}''\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$
$$+y\cdot\left[f_{21}''\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+f_{22}''\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$
$$=2f+\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}f_1'+\frac{2xy}{x^2+y^2}f_2'+\frac{x^2}{x^2+y^2}f_{11}''$$
$$+\frac{2xy}{x^2+y^2}f_{12}''+\frac{y^2}{x^2+y^2}f_{22}'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cdot\left[f_1'\cdot\frac{y}{x^2+y^2}-f_2'\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$
$$+x\cdot\left[f_{11}''\frac{y}{x^2+y^2}-f_{12}''\frac{x}{x^2+y^2}\right]+f_2'$$
$$+y\cdot\left[f_{21}''\cdot\frac{y}{x^2+y^2}-f_{22}''\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$
$$=\frac{2xy}{x^2+y^2}f_1'+\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}f_2'+\frac{xy}{x^2+y^2}f_{11}''$$
$$+\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}f_{12}''-\frac{xy}{x^2+y^2}f_{22}'',$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot f+(x^2+y^2)\left[f_1'\cdot\frac{y}{x^2+y^2}-f_2'\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$
$$=2yf+yf_1'-xf_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f+2y\cdot\left[f_1'\cdot\frac{y}{x^2+y^2}-f_2'\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right]+f_1'$$

$$+y\left[f_{11}''\frac{y}{x^2+y^2}-f_{12}''\frac{x}{x^2+y^2}\right]-x\left[f_{12}''\frac{y}{x^2+y^2}-f_{22}''\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$

$$=2f+\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}f_1'-\frac{2xy}{x^2+y^2}f_2'+\frac{y^2}{x^2+y^2}f_{11}''$$

$$-\frac{2xy}{x^2+y^2}f_{12}''+\frac{x^2}{x^2+y^2}f_{22}''.$$

1197. 设 $u=f(x^2+y^2,\ x^2-y^2,\ xyz)$，$f$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot f_1'+2x\cdot f_2'+yz\cdot f_3'$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x\cdot(f_{11}''\cdot 2y-f_{12}''\cdot 2y+f_{13}''xz+f_{21}''\cdot 2y-f_{22}''\cdot 2y+f_{23}''\cdot xz)$$

$$+zf_3'+yz(f_{31}''\cdot 2y-f_{32}''\cdot 2y+f_{33}''\cdot xz)$$

$$=4xyf_{11}''+2(x^2+y^2)zf_{13}''-4xyf_{22}''+2(x^2-y^2)zf_{23}''$$

$$+xyz^2\cdot f_{33}''+zf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f_{33}''.$$

1198. 设 $u=f(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，f 有二阶连续偏导数，求证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 是 r 的函数.

［证］ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{r}$,　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{r^2}+f'\cdot\frac{y^2+z^2}{r^3}$;

由对称性有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{r^2}+f'\cdot\frac{z^2+x^2}{r^3};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''\cdot\frac{z^2}{r^2}+f'\cdot\frac{x^2+y^2}{r^3}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}+f'\cdot\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{r^3}$$

$$=f''(r)+f'(r)\cdot\frac{2}{r}.$$

因为 $f'(r)$、$f''(r)$ 都是 r 的函数，故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 是 r 的函数.

1199. 设 $z=xf(x+y)+yg(x+y)$，其中 f 和 g 有二阶连续偏导数，求证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

［证］ $\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf'+yg'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'+f'+xf''+yg''=2f'+xf''+yg'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+xf''+g'+yg'',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'+g+yg',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf''+g'+g'+yg''=xf''+2g'+yg''.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+xf''+yg''-2f'-2xf''-2g'$$
$$-2yg''+xf''+2g'+yg''=0.$$

1200. 设 $f(x,y,z)$ 是可微函数，且 $x^2=vw$, $y^2=uw$, $z^2=uv$，求证 $xf'_x+yf'_y+zf'_z=uf'_u+vf'_v+wf'_w$.

［证］ $x^2=vw$, $\therefore\ 2x\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=w$, $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{w}{2x}$，同理 $\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{v}{2x}$.

$y^2=uw$, $\therefore\ 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=w$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{w}{2y}$，同理 $\frac{\partial y}{\partial w}=\frac{u}{2y}$.

$z^2=uv$, $\therefore\ 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=v$, $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{v}{2z}$，同理 $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u}{2z}$.

$$f'_u=f'_y\cdot y'_u+f'_z\cdot z'_u=f'_y\cdot\frac{w}{2y}+f'_z\cdot\frac{v}{2z}.$$

$$f'_v=f'_z\cdot z'_v+f'_x\cdot x'_v=f'_z\cdot\frac{u}{2z}+f'_x\cdot\frac{w}{2x}.$$

$$f'_w=f'_x\cdot x'_w+f'_y\cdot y'_w=f'_x\cdot\frac{v}{2x}+f'_y\cdot\frac{u}{2y}.$$

于是

$$uf'_u+vf'_v+wf'_w=f'_y\cdot\frac{wu}{2y}+f'_z\frac{vu}{2z}+f'_z\frac{uv}{2z}+f'_x\frac{wv}{2x}+f'_x\frac{vw}{2x}+f'_y\frac{uw}{2y}$$
$$=f'_y\frac{wu}{y}+f'_z\frac{vu}{z}+f'_x\frac{vw}{x}=xf'_x+yf'_y+zf'_z.$$

1201 设 $f(x,y)=F(u,v)$，f 和 F 都可微，且 $x=u\cos\theta-$

$v\sin\theta$, $y=u\sin\theta+v\cos\theta$（$\theta$ 为常数），求证

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

［证］
$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta,$$

于是

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

1202. 若函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$. 求证函数 $v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足拉普拉斯方程.

［证］ 设 $\xi=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\eta^2-\xi^2,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-2\xi\eta.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=(\eta^2-\xi^2)\frac{\partial u}{\partial\xi}-2\xi\eta\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\\&=\left[(-2\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(\eta^2-\xi^2)\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-2\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\xi}\right]\cdot(\eta^2-\xi^2)\\&\quad+\left[2\eta\frac{\partial u}{\partial\xi}+(\eta^2-\xi^2)\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\xi}-2\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}-2\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\right]\cdot(-2\xi\eta)\\&=(\eta^2-\xi^2)^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-4\xi\eta(\eta^2-\xi^2)\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+4\xi^2\eta^2\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\\&\quad+(2\xi^3-6\xi\eta^2)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(6\xi^2\eta-2\eta^3)\frac{\partial u}{\partial\eta}.\end{aligned}$$

由函数的对称性得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=(\xi^2-\eta^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-4\xi\eta(\xi^2-\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+4\xi^2\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$+(2\eta^3-6\eta\xi^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}+(6\eta^2\xi-2\xi^3)\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

于是 $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=(\xi^2+\eta^2)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

由函数 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,\quad \therefore\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

1203. 设 $z=f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，求证：

(1) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$；

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$.

[证] (1) $$\frac{\partial f}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta.$$

于是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\cos^2\theta+2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\cdot\sin\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cdot\sin^2\theta,$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\cdot\sin\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta,$$

$$\therefore\quad\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \rho^2}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \rho^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\cos^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cdot\cos\theta.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial^2\theta}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \rho^2\sin^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ \rho^2\cos^2\theta-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\rho^2\sin\theta\cos\theta$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\rho\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\rho\sin\theta.$$

于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rho^2\sin^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho^2\cos^2\theta\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho^2\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

1204. 求证函数 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，其中 φ，ψ 有二阶连续偏导数。

［证］ $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at);$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1205. 设 $z=z(x,y)$ 有连续的偏导数，求方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

经代换 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 后的形式.

［解］ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)\left[\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right]-(x-y)\left[\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right]=0,$$

化简得 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

1206. 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数，作代换 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, x, y 都有二阶连续偏导数，还满足 $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{\partial y}{\partial v}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{\partial y}{\partial u}$. 求微分表达式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ 经代换后的形式.

［证］ $$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\\&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

且有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=0,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

由 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$ 得 $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$ 及 $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$；

由 $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$ 得 $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}$ 及 $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$.

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=0.$$

将上述结论代入①+②式中，即得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

［说明］ 如果再加条件 $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$，那么微分方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$ 经上述代换后为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，形式不变。

1207. 设微分方程 $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 z 是 x、y 的具有二阶连续偏导数的函数，a，b，c 都是常数，$b^2-ac=0$，$c\neq0$．作代换 $u=x+\alpha y$，$v=x+\beta y$，（α，β 都是常数）．问怎样选择 α、β，可以使方程经代换后化简．

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入方程得

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

令 $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$，由 $b^2-ac=0$ 解得 $\alpha=-\frac{b}{c}$.

这时将 $\alpha=-\frac{b}{c}$ 代入

$$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=a+b\left(-\frac{b}{c}+\beta\right)+c\left(-\frac{b}{c}\right)\beta=a-\frac{b^2}{c}=0,$$

再取任一 $\beta\neq\alpha$，则 $a+2b\beta+c\beta^2\neq0$，所以，若取 $\alpha=-\frac{b}{c}$，$\beta\neq\alpha$，则方程可化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

1208. 求下列函数二阶全微分(x, y 为自变量)：

(1) $u=f(x^2+2y)$； (2) $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

[解] (1) 令 $t=x^2+2y$. 由微分运算法则

$$dt=2xdx+2dy;\quad d^2t=2dx^2.$$

$$du=f'\cdot dt$$

$$\therefore\quad d^2u=f''\cdot dt^2+f'd^2t=f''\cdot(2xdx+2dy)^2+f'\cdot 2dx^2$$

$$=(f''\cdot 4x^2+2f')dx^2+8x\cdot f''dx\,dy+4f''dy^2.$$

(2) 令 $t=\sqrt{x^2+y^2}$.

由微分运算法则

$$dt=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$d^2t=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,d(xdx+ydy)-(xdx+ydy)\cdot d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(dx^2+dy^2)-(xdx+ydy)\cdot\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$du=f'dt,$$

$$\therefore\quad d^2u=f''dt^2+f'd^2t=f''\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}(x^2\sqrt{x^2+y^2}f''+y^2f')dx^2+(2xy\sqrt{x^2+y^2}f''-2xy\cdot f')dxdy\\ +(y^2\sqrt{x^2+y^2}f''+x^2f')dy^2\end{array}\right\}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1209. 求下列函数的二阶全微分：(1) $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=xy$，$\eta=\dfrac{x}{y}$；(2) $u=f(x,y,z)$，其中 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$。(1)和(2)中的 f 有二阶连续偏导数.

[解] (1) $d\xi=ydx+xdy$，$d^2\xi=d(ydx)+d(xdy)=2dx\,dy$.

$$d\eta=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

$$d^2\eta=d\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)=\frac{y^2d(ydx-xdy)-d(y^2)(ydx-xdy)}{y^4}$$

$$=\frac{2x\,dy^2-2y\,dx\,dy}{y^3}.$$

$$\therefore\quad du=f'_\xi d\xi+f'_\eta d\eta.$$

$$d^2u=d(du)=d(f'_\xi d\xi)+d(f'_\eta d\eta)$$

$$=f''_{\xi\xi}d\xi^2+2f''_{\xi\eta}d\xi d\eta+f''_{\eta\eta}d\eta^2+f'_\xi d^2\xi+f'_\eta d^2\eta$$

$$=f''_{\xi\xi}(ydx+xdy)^2+2f''_{\xi\eta}\cdot(ydx+xdy)\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$+f''_{\eta\eta}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+f'_\xi\cdot 2\,dx\,dy+f'_\eta\cdot\frac{2x\,dy^2-2y\,dx\,dy}{y^3}.$$

(2) $dx=dt$，$d^2x=0$，$dy=2tdt$，$d^2y=2dt^2$，$dz=3t^2dt$，$d^2z=6tdt^2$，

$$\therefore\quad du=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz$$

$$d^2u=d(f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz)=(f''_{xx}dx^2+f''_{xy}\,dx\,dy+f''_{xz}\,dx\,dz)$$

$$+(f''_{yx}\,dy\,dx+f''_{yy}dy^2+f''_{yz}\,dy\,dz)+(f''_{zx}\,dz\,dx+f''_{zy}\,dz\,dy+f''_{zz}dz^2)$$

$$+f'_xd^2x+f'_yd^2y+f'_zd^2z$$

$$=f''_{xx}dt^2+2tf''_{xy}dt^2+3t^2f''_{xz}dt^2+2tf''_{xy}dt^2+4t^2f''_{yy}dt^2+6t^3f''_{yz}dt^2$$

$$+3t^2f''_{xz}dt^2+6t^3f''_{yz}dt^2+9t^4f''_{zz}dt^2+2f'_ydt^2+6tf'_zdt^2$$

$$=(f''_{xx}+4tf''_{xy}+6t^2f''_{xz}+4t^2f''_{yy}+12t^3f''_{yz}+9t^4f''_{zz}+2f'_y+6tf'_z)dt^2.$$

§3. 隐函数求导

1210. 设 $f(x, y, z)=xy^2z^3$，其中 x, y, z 满足方程 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0$. 求：(1) $f'_x(1, 1, 1)$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $g(x, y, z)$ 所定义；(2) $f'_x(1, 1, 1)$，其中 $y=y(x, z)$ 是由方程 $g(x, y, z)$ 所定义.

［解］ (1) 对方程 $g(x, y, z)=0$ 求关于 x 的导数，并视 z 是 x, y 的函数，得 $2x+2z\cdot z'_x-3yz-3xyz'_x=0$， $\therefore\quad z'_x=\dfrac{3yz-2x}{2z-3xy}$.

于是
$$f'_x=y^2z^3+xy^2\cdot 3z^2\cdot z'_x=y^2z^3+\frac{3xy^2z^2(3yz-2x)}{2z-3xy}.$$

$\therefore\quad f'_x(1, 1, 1)=-2.$

(2) 对方程 $g(x, y, z)=0$ 求关于 x 的导数，并视 y 为 x, z 的函数，得
$$2x+2y\cdot y'_x-3yz-3xz\cdot y'_x=0,\quad \therefore\quad y'_x=\frac{3yz-2x}{2y-3xz}.$$

于是
$$f'_x=y^2z^3+x\cdot 2y\cdot y'_x\cdot z^3=y^2z^3+\frac{2xyz^3(3yz-2x)}{2y-3xz}.$$

$\therefore\quad f'_x(1, 1, 1)=-1.$

1211. 设 $x^2+2y^3+3z^4+xy-z-19=0$，求在点 $P(1, 2, 0)$ 的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 值.

［解］ $x^2+2y^3+3z^4+xy-z-19=0$ 定义了函数 $z=z(x, y)$. 故对方程求关于 x 的偏导数，
$$2x+12z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y-\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad\cdots①$$
$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{1-12z^3},\qquad 故\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=4.$$

再对①式求关于 x 的偏导数，
$$2+36z^2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+12z^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

将点 $P(1, 2, 0)$ 代入上式，得
$$2-\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,2,0)}=0,\quad \therefore\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,2,0)}=2.$$

按同样方法对 ① 式再求关于 y 的偏导数,

$$36z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+12z^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+1-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

将点 $P(1, 2, 0)$ 代入上式,得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,2,0)}=1.$$

又对已知方程求关于 y 的偏导数,

$$6y^2+12z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+x-\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad \cdots②$$

得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+6y^2}{1-12z^3}.\quad 故\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=25.$$

再对 ② 求关于 y 的偏导数,

$$12y+36z^2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+12z^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

将点 $P(1, 2, 0)$ 代入上式,得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,2,0)}=24.$$

1212. 设函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 所定义,求 z 关于 x 的一阶、二阶偏导数.

[解一] $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

对方程求关于 x 的导数,

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sec^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\cdot\left(\frac{z'_x\cdot\sqrt{x^2-y^2}-\dfrac{xz}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2}\right).$$

注意到 $\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\sec^2\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=1+\dfrac{z^2}{x^2-y^2}$.

$$\therefore\quad z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\left(1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\right)\cdot z'_x$$

$$-\frac{xz}{x^2-y^2}\left(1+\frac{z^2}{x^2-y^2}\right),$$

$$\frac{z^2}{x^2-y^2}\cdot z'_x=\frac{xz(x^2-y^2+z^2)}{(x^2-y^2)^2}-\frac{xz(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2},$$

整理得 $\quad z'_x=\frac{xz}{x^2-y^2}.\quad z''_{xx}=\frac{(z+x\cdot z'_x)(x^2-y^2)-2x\cdot xz}{(x^2-y^2)^2},$

$$\therefore\quad z''_{xx}=-\frac{zy^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

[解二] $\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$, 令 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

则有 $u=\operatorname{tg}u$, 两边求关于 x 的偏导数,注意到 u 是 z、x、y 的函数,

$$(u'_x+u'_z\cdot z'_x)=\sec^2u\cdot(u'_x+u'_z\cdot z'_x).$$

推得
$$u'_x+u'_z\cdot z'_x=0,$$

$$z'_x=-\frac{u'_x}{u'_z}=-\frac{-\frac{zx}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}}=\frac{xz}{x^2-y^2}.$$

$$\therefore\quad z''_{xx}=-\frac{zy^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

1213. 设 $x+y+z=e^z$, 求 z 关于 x、y 的一阶、二阶偏导数.

[解] $x+y+z=e^z$, 对方程求关于 x 的偏导数,得

$$1+z'_x=e^z\cdot z'_x \qquad\cdots①$$

$\therefore\ z'_x=\frac{1}{e^z-1}$. 再对 ① 求关于 x 的偏导数得 $z''_{xx}=e^z(z'_x)^2+e^z\cdot z''_{xx}$.

于是
$$z''_{xx}=\frac{e^z\cdot(z'_x)^2}{1-e^z}=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}.$$

由对称性得

$$z'_y=\frac{1}{e^z-1},\quad z''_{yy}=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}.$$

对 ① 求关于 y 的偏导数得

$$z''_{xy}=e^z\cdot z'_x\cdot z'_y+e^z\cdot z''_{xy},\quad z''_{xy}=\frac{e^zz'_x\cdot z'_y}{1-e^z}.$$

于是
$$z''_{xy}=\frac{e^z}{(1-e^z)^3}.$$

1214. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+z,2y+3z)=0$ 所定义, F 有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$.

［解］ 对方程求关于 x 的偏导数，得

$$F'_1\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\left(3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad \cdots①$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1}{F'_1+3F'_2}.$$

对 ① 式再求关于 x 的偏导数，得

$$F''_{11}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F''_{12}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_1\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$+F''_{21}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{22}\cdot\left(3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F'_2\cdot 3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

整理得

$$(F'_1+3F'_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left[F''_{11}\cdot\frac{9F'^2_2}{(F'_1+3F'_2)^2}-F''_{12}\cdot\frac{18F'_1F'_2}{(F'_1+3F'_2)^2}+F''_{22}\cdot\frac{9F'^2_1}{(F'_1+3F'_2)^2}\right],$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{9}{(F'_1+3F'_2)^3}[F''_{11}\cdot F'^2_2-2F''_{12}\cdot F'_1\cdot F'_2+F''_{22}\cdot F'^2_1].$$

同样方法，对方程求关于 y 的偏导数，得

$$F'_1\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+F'_2\cdot\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad \cdots②$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2F'_2}{F'_1+3F'_2}.$$

对 ② 式再求关于 y 的偏导数，得

$$F''_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+F''_{12}\cdot\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+F'_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F''_{21}\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+F''_{22}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+F'_2\cdot\left(3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0,$$

整理

$$(F'_1+3F'_2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\left[F''_{11}\cdot\frac{4F'^2_2}{(F'_1+3F'_2)^2}-F''_{12}\cdot\frac{8F'_1F'_2}{(F'_1+3F'_2)^2}+F''_{22}\cdot\frac{4F'^2_1}{(F'_1+3F'_2)^2}\right],$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{(F'_1+3F'_2)^3}[F''_{11}\cdot F'^2_2-2F''_{12}\cdot F'_1\cdot F'_2+F''_{22}\cdot F'^2_1].$$

1215. 设函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $F(x, x+y, x+y+z)=0$ 定

义，其中 F 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

［解］ 对方程求关于 x 的偏导数，得

$$F'_1+F'_2+F'_3\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad \cdots①,$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+F'_2+F'_3}{F'_3}.$$

对 ① 式再求关于 x 的偏导数，得

$$F''_{11}+F''_{12}+F''_{13}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{21}+F''_{22}+F''_{23}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$+F''_{31}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{32}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F'_3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

整理得

$$F'_3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left[F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22}+2(F''_{13}+F''_{23})\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+F''_{33}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$=-\left[F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22}+2(F''_{13}+F''_{23})\left(-\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}\right)\right.$$
$$\left.+F''_{33}\cdot\frac{(F'_1+F_2)^2}{(F'_3)^2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(F'_3)^3}[(F'_3)^2(F''_{11}+2F''_{12}+F''_{22})$$
$$-2F'_3\cdot(F'_1+F'_2)(F''_{13}+F''_{23})+(F'_1+F'_2)^2F''_{33}].$$

1216. 设 $z=f(ax+by)$，且由 $\varphi(x, y)=0$ 确定 y 是 x 的函数，其中 f 和 φ 有二阶连续的偏导数，且 $\varphi'_y\neq 0$，求 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

［解］ 对 $\varphi(x, y)=0$ 求关于 x 的导数得 $\varphi'_x+\varphi'_y\cdot y'_x=0$，再求关于 x 的导数得 $\varphi''_{xx}+\varphi''_{xy}\cdot y'_x+\varphi''_{yx}\cdot y'_x+\varphi''_{yy}\cdot(y'_x)^2+\varphi'_y\cdot y''_{xx}=0$.

$$\therefore \quad y''_{xx}=-\frac{\varphi''_{xx}+2\varphi''_{xy}\cdot y'_x+\varphi''_{yy}\cdot(y'_x)^2}{\varphi'_y}$$
$$=-\frac{\varphi''_{xx}\cdot(\varphi'_y)^2-2\varphi''_{xy}\cdot\varphi'_x\cdot\varphi'_y+\varphi''_{yy}\cdot(\varphi'_x)^2}{(\varphi'_y)^3}.$$

由 $z=f(ax+by)$ 有 $\frac{dz}{dx}=f'\cdot(a+b\cdot y'_x)$,

$$\therefore\quad \frac{d^2z}{dx^2}=f''\cdot(a+by'_x)^2+f'\cdot by''_{xx}=f''\cdot\left(\frac{a\varphi'_y-b\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2$$

$$-bf'\cdot\frac{\varphi''_{xx}\cdot(\varphi'_y)^2-2\varphi''_{xy}\cdot\varphi'_1\cdot\varphi'_y+\varphi''_{yy}\cdot(\varphi'_x)^2}{(\varphi'_y)^3}.$$

1217. 设 $x^2=vw$, $y^2=wu$, $z^2=uv$, 且 $f(x, y, z)=F(u, v, w)$, 求证:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=u\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+v\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+w\cdot\frac{\partial F}{\partial w}.$$

[证] $\because\ \dfrac{uw\cdot uv}{vw}=\dfrac{y^2z^2}{x^2}$, 即

$$u^2=\frac{y^2z^2}{x^2} \qquad \cdots①.$$

对①式分别求关于 x、y、z 的偏导数, 得

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2y^2z^2}{x^3},\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2yz^2}{x^2},\quad 2u\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2y^2z}{x^2},$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y^2z^2}{ux^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{yz^2}{ux^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y^2z}{ux^2}.$$

同理
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xz^2}{vy^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x^2z^2}{vy^3},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{x^2z}{vy^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{xy^2}{wz^2},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{x^2y}{wz^2},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{x^2y^2}{wz^3}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\left(-\frac{y^2z^2}{ux^3}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{xz^2}{vy^2}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{xy^2}{wz^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{yz^2}{ux^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x^2z^2}{vy^3}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{x^2y}{wz^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{y^2z}{ux^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{x^2z}{vy^2}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\left(-\frac{x^2y^2}{wz^3}\right).$$

得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}\left(-\frac{y^2z^2}{ux^2}+\frac{y^2z^2}{ux^2}+\frac{y^2z^2}{ux^2}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{x^2z^2}{vy^2}-\frac{x^2z^2}{vy^2}+\frac{x^2z^2}{vy^2}\right)$$

$$+\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{x^2y^2}{wz^2}+\frac{x^2y^2}{wz^2}-\frac{x^2y^2}{wz^2}\right)$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{y^2z^2}{ux^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{z^2x^2}{vy^2}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{x^2y^2}{wz^2}$$

$$=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}.$$

1218. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定的隐函数，且 $\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\neq 0$，求证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=f(x,y)$.

［证］ 对方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 求关于 x 的偏导数，得

$$F_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\left(\frac{x\cdot z_x'-z}{x^2}\right)=0.$$

$$\because\quad F_2'\neq 0,\quad\therefore\quad z_x'=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}.$$

对方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$，求关于 y 的偏导数，得

$$F_1'\cdot\frac{1}{x}+F_2'\cdot\frac{1}{x}\cdot z_y'=0.$$

$$\because\quad F_2'\neq 0,\quad\therefore\quad z_y'=-\frac{F_1'}{F_2'}.$$

于是 $$x\cdot z_x'+y\cdot z_y'=x\cdot\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}-y\cdot\frac{F_1'}{F_2'}=f(x,y).$$

1219. 求证由方程 $\sqrt{R^2-z^2}=y+xf(z)$ 确定的函数 $z=\varphi(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}-f(z)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$.

［证］ 对所给方程两边分别求关于 x, y 的偏导数，

$$-\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(z)+xf'(z)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$-\frac{z}{\sqrt{R^2-z^2}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=1+xf'(z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

由此解得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{f(z)\sqrt{R^2-z^2}}{z+xf'(z)\sqrt{R^2-z^2}},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\sqrt{R^2-z^2}}{z+xf'(z)\sqrt{R^2-z^2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}-f(z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{f(z)\sqrt{R^2-z^2}}{z+xf'(z)\sqrt{R^2-z^2}}+\frac{f(z)\sqrt{R^2-z^2}}{z+xf'(z)\sqrt{R^2-z^2}}=0.$$

1220. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$所确定，且 F 可导，求证

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

［证］ 已知 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$，对方程两边分别求关于 x 和 y 的导数，得

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=F'\cdot\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=F'\cdot\left(2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xF'-a}{c-2zF'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yF'-b}{c-2zF'}.$$

于是

$$\begin{aligned}&(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{(cy-bz)(2xF'-a)+(az-cx)(2yF'-b)}{c-2zF'}\\&=\frac{-acy+bcx-2bxzF'+2ayzF'}{c-2zF'}=bx-ay.\end{aligned}$$

1221. 求证由 $z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ 定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

［证］　对方程 $z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ 两边分别求关于 x 和 y 的偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{x}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\quad\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\cdot\varphi\left(\frac{z}{y}\right)}{y-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2},\quad \therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{xy\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)-y^2}.$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy\varphi\left(\frac{z}{y}\right)}{y-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}-\frac{xz\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{y-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}$$

$$=\frac{xy\varphi\left(\frac{z}{y}\right)}{y-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}-\frac{x^2\cdot\varphi\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{y-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)=z.$$

1222. 设 $F(x, y, z, u)$ 可微，且 F'_x, F'_y, F'_z, F'_u 都不为零. 若 $F(x, y, z, u)=0$，求证：$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=1$.

［证］ 已知 $F(x, y, z, u)=0$. 方程定义隐函数 $u=u(x, y, z)$，将方程对 x 求偏导数 $F'_x+F'_u\cdot u'_x=0$, $u'_x=-\frac{F'_x}{F'_u}$.

同理将方程对 y 求偏导数，视 $x=x(y, z, u)$，得 $F'_y+F'_x\cdot x'_y=0$, $x'_y=-\frac{F'_y}{F'_x}$.

同样可得 $y'_z=-\frac{F'_z}{F'_y}$； $z'_u=-\frac{F'_u}{F'_z}$.

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=\left(-\frac{F'_x}{F'_u}\right)\cdot\left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\cdot\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)\cdot\left(-\frac{F'_u}{F'_z}\right)=1.$$

1223. 已知 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 具有连续的一阶偏导数，若 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$，求证：

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

成立的充要条件是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\end{cases}\quad(\rho\neq 0).$$

［证］　必要性:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y);\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

且
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

有
$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\rho\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\rho\cos\varphi.$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\sin\varphi\right)$$
$$=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\varphi\right)=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

同理
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\rho\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\rho\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\rho\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\rho\sin\varphi\right)$$
$$=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi\right)=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

充分性:

由前面结论

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi=\frac{\partial u}{\partial \rho},\quad -\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi=\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} & \sin\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\rho\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\cos\varphi & \frac{\partial u}{\partial\rho}\\ -\rho\sin\varphi & \frac{\partial u}{\partial\varphi}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\rho}\rho\sin\varphi}{\rho}.$$

同理解得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\frac{\partial v}{\partial\rho}\rho\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\sin\varphi}{\rho},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial\rho}\cdot\rho\sin\varphi}{\rho}.$$

$$\because \frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi};\quad \frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\rho\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\\&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\rho\cos\varphi-\left(-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)\cdot\sin\varphi\right]\\&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial\rho}\cdot\rho\sin\varphi\right]=\frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

显然有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\rho\sin\varphi\right)\\&=\frac{1}{\rho}\left[\left(-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)\cdot\cos\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\rho\sin\varphi\right]\\&=\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial v}{\partial\rho}\rho\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\sin\varphi\right]=-\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

［说明］ 称 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ 是柯西-黎曼方程.

1224. 已知 $u=f(z)$, 其中 $z=x+y\varphi(z)$. 且 f, φ 都是二阶可微函数, 求证 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{[\varphi(z)]^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$.

［证］ $z=x+y\varphi(z)$ 两边分别求关于 x、y 的偏导数,得

$$z'_x=1+y\varphi'(z)\cdot z'_x,$$

$$\therefore\quad z'_x=\frac{1}{1-y\varphi'(z)};\qquad z'_y=\varphi(z)+y\varphi'(z)\cdot z'_y,$$

$$\therefore\quad z'_y=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}.$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\cdot z'_x=f'(z)\cdot\frac{1}{1-y\varphi'(z)}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{[\varphi(z)]^2\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{f'(z)[\varphi(z)]^2}{1-y\varphi'(z)}\right\}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}[f''(z)\varphi^2(z)z'_x+2\varphi(z)\varphi'(z)f'(z)z'_x]\cdot[1-y\varphi'(z)]\\ +y\varphi''(z)z'_xf'(z)\varphi^2(z)\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^2}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}z'_x\varphi(z)\{[f''(z)\varphi(z)+2\varphi'(z)f'(z)]\cdot[1-y\varphi'(z)]\\ +y\varphi''(z)f'(z)\varphi(z)\}\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^2}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}\varphi(z)\{[f''(z)\varphi(z)+2\varphi'(z)f'(z)]\cdot[1-y\varphi'(z)]\\ +y\varphi''(z)f'(z)\varphi(z)\}\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^3}\quad\cdots①,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\cdot\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\left\{\begin{array}{c}[f''(z)\cdot z'_y\cdot\varphi(z)+f'(z)\varphi'(z)z'_y]\cdot[1-y\varphi'(z)]\\ +[\varphi'(z)+y\varphi''(z)z'_y]\cdot f'(z)\varphi(z)\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^2}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}[f''(z)\varphi^2(z)+f'(z)\varphi'(z)\varphi(z)][1-y\varphi'(z)]\\ +\{\varphi'(z)[1-y\varphi'(z)]+y\varphi''(z)\varphi(z)\}f'(z)\varphi(z)\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^3}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}\varphi(z)\{[f''(z)\varphi(z)+f'(z)\varphi'(z)][1-y\varphi'(z)]\\ +y\varphi''(z)\varphi(z)f'(z)+\varphi'(z)f'(z)[1-y\varphi'(z)]\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^3}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}\varphi(z)\{[f''(z)\varphi(z)+2f'(z)\varphi'(z)][1-y\varphi'(z)]\\ +y\varphi''(z)\varphi(z)f'(z)\}\end{array}\right\}}{[1-y\varphi'(z)]^3}\quad\cdots②'$$

由①、②得
$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{[\varphi(z)]^2\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

1225. 已知 $z=f(u)$，$u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)dt$，其中 f 可微，φ' 连续，且 $\varphi'(u)\neq1$，P 连续，求 $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

［解］ ∵ P 连续，故 $\int_y P(t)dt$ 作为二元函数（自变量是 x, y）可微。

$$\therefore \quad u'_x=\varphi'(u)\cdot u'_x+P(x), \quad 得 \quad u_x=\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)}.$$

同理有 $\quad u'_y=\varphi'(u)\cdot u'_y-P(y), \ \therefore \quad u'_y=-\frac{P(y)}{1-\varphi'(u)}.$

$$z'_x=f'(u)\cdot u'_x=f'(u)\cdot\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)}, \quad z'_y=f'(u)\cdot u'_y=-f'(u)\cdot\frac{P(y)}{1-\varphi'(u)}.$$

$$\therefore \quad P(y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

1226. 已知曲面方程为

$$\begin{cases} x=e^u\cos v, \\ y=e^u\sin v, \\ z=uv, \end{cases}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

［解］ 由隐函数组

$$\begin{cases} x-e^u\cos v=0, \\ y-e^u\sin v=0. \end{cases}$$

分别求关于 x, y 的导数，得

$$\begin{cases} 1-e^u\cdot\cos v\cdot u'_x+e^u\cdot\sin v\cdot v'_x=0, \\ 0-e^u\cdot\sin v\cdot u'_x-e^u\cdot\cos v\cdot v'_x=0, \end{cases}$$

和
$$\begin{cases} 0-e^u\cdot\cos v\cdot u'_y+e^u\cdot\sin v\cdot v'_y=0, \\ 1-e^u\cdot\sin v\cdot u'_y-e^u\cdot\cos v\cdot v'_y=0. \end{cases}$$

解得
$$u'_x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -e^u\sin v \\ 0 & e^u\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v \\ e^u\sin v & e^u\cos v \end{vmatrix}}=\frac{\cos v}{e^u},$$

$$u'_y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^u\sin v \\ 1 & e^u\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v \\ e^u\sin v & e^u\cos v \end{vmatrix}}=\frac{\sin v}{e^u},$$

$$v_x'=\frac{\begin{vmatrix} e^u\cos v & 1\\ e^u\sin v & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v\\ e^u\sin v & e^u\cos v\end{vmatrix}}=-\frac{\sin v}{e^u},$$

$$v_y'=\frac{\begin{vmatrix} e^u\cos v & 0\\ e^u\sin v & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v\\ e^u\sin v & e^u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{\cos v}{e^u}.$$

由 $z=uv$，　$\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot v+u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{v\cos v-u\sin v}{e^u}.$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v+u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v\sin v+u\cos v}{e^u}.$$

1227. 设 $z=f(x, y, u, v)$，且满足 $F(x, y, u, v)=0$，$G(x, y, u, v)=0$．若 f，F，G 有连续的偏导数．$F_u'G_v'-F_v'G_u'\neq 0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

［解］ 对函数方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0\\ G(x, y, u, v)=0\end{cases}\qquad\cdots①$$

求关于 x 的偏导数，得 $\begin{cases} F_x'+F_u'\cdot u_x'+F_v'\cdot v_x'=0\\ G_x'+G_u'\cdot u_x'+G_v'\cdot v_x'=0.\end{cases}$

解得
$$u_x'=-\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}=\frac{F_v'\cdot G_x'-F_x'G_v'}{F_u'\cdot G_v'-F_v'\cdot G_u'},$$

$$v_x'=-\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}=\frac{F_x'\cdot G_u'-F_u'\cdot G_x'}{F_u'\cdot G_v'-F_v'\cdot G_u'}.$$

同理对函数方程组 ① 求关于 y 的偏导数可得

$$u_y'=-\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}=\frac{F_v'\cdot G_y'-F_y'\cdot G_v'}{F_u'\cdot G_v'-F_v'\cdot G_u'};$$

$$v'_y=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=\frac{F'_y\cdot G'_u-F'_u\cdot G'_y}{F'_u\cdot G'_v-F'_v\cdot G'_u}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=f'_x+f'_u\cdot\frac{F'_v\cdot G'_x-F'_x\cdot G'_v}{F'_u\cdot G'_v-F'_v\cdot G'_u}+f'_v\cdot\frac{F'_x\cdot G'_u-F'_u\cdot G'_x}{F'_u\cdot G'_v-F'_v\cdot G'_u}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=f'_y+f'_u\cdot\frac{F'_v\cdot G'_y-F'_y\cdot G'_v}{F'_u\cdot G'_v-F'_v\cdot G'_u}+f'_v\cdot\frac{F'_y\cdot G'_u-F'_u\cdot G'_y}{F'_u\cdot G'_v-F'_v\cdot G'_u}.$$

1228. 已知 $y=f(x,t)$，$G(x,y,t)=0$，其中 f、G 都有连续偏导数，问在什么条件下可以确定 $y=y(x)$，$t=t(x)$，并求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dt}{dx}$。

[解] 考虑方程组 $\begin{cases}F(x,y,t)=y-f(x,t)=0\\ G(x,y,t)=0.\end{cases}$

若 $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,t)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial t}\neq 0,$$

则由方程组在满足方程的点 (x,y,t) 的某邻域内可确定 $y=y(x)$，$t=t(x)$。对方程组求关于 x 的导数

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\,\dfrac{dt}{dx}=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\,\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial t}\,\dfrac{dt}{dx}=0.\end{cases}$$

解方程组得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial t}\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial G}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial G}{\partial t}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial t}}.$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & -\frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -\frac{\partial f}{\partial t}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial t}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

1229. 已知 $G(x,y,z)=0, z=F(x,y,z)$，其中 F、G 都有连续偏导数，问在什么条件下可以确定 $y=y(x), z=z(x)$，并求 $\frac{dz}{dx}$.

［解］ 考虑方程组

$$\begin{cases}G(x,\ y,\ z)=0,\\ H(x,\ y,\ z)=z-F(x,\ y,\ z)=0.\end{cases}$$

若 $$\frac{\partial(G,\ H)}{\partial(y,\ z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\\ \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\\ -\frac{\partial F}{\partial y} & \left(1-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\end{vmatrix}\neq 0,$$

则由方程组在满足方程的点 $(x,\ y,\ z)$ 的某邻域内可确定 $y=y(x)$，$z=z(x)$.对方程组求关于 x 的导数：

$$\begin{cases}\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}=0\\ \frac{dz}{dx}-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}-\frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}=0,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\frac{\partial G}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}=-\frac{\partial G}{\partial x}\\ -\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

解方程组得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y} & -\frac{\partial G}{\partial x}\\ -\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\\ -\frac{\partial F}{\partial y} & \left(1-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial G}{\partial y}\ \frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial x}\ \frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial y}\ \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial z}\ \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

1230. 设函数 $u=u(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases} u=f(x,\ y) \\ \varphi(x,\ y,\ z)=0 \\ \psi(x,\ z)=0 \end{cases}$$

所确定,且 $\frac{\partial\psi}{\partial z}\neq0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

[解] 由条件 $\frac{\partial\psi}{\partial z}\neq0$, 则由方程 $\psi(x,\ z)=0$ 在满足方程的点 $(x,\ z)$ 的某邻域内可确定 z 是 x 的函数,相仿的由 $\varphi(x,\ y,\ z)=0$ 和 $\psi(x,\ z)=0$ 可确定 y 是 x 的函数. 对 $\psi(x,\ z)=0$ 求关于 x 的导数,得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

对 $\varphi(x,\ y,\ z)=0$ 求关于 x 的导数,得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \frac{dz}{dx}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}},$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

因此

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}}$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}}.$$

1231. 设 $z=\omega(u,\ v)$, $x=\varphi(u,\ v)$, $y=\psi(u,\ v)$, ω, φ, ψ 有连续偏导数. 问在什么条件下可以确定 $z=z(x,\ y)$, 并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}$.

[解] 当 $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\neq 0$ 时，可以由 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$ 在满足方程的点 (x,y,u,v) 的某邻域内确定 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$. 代入 $z=\omega(u,v)$ 可得 $z=z(x,y)$.

将 $\begin{cases}x-\varphi(u,v)=0\\ y-\psi(u,v)=0\end{cases}$ 对 x 求偏导数，

$$\begin{cases}1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\\ 0-\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ 0 & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & 1\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

对 y 求偏导数，

$$\begin{cases}0-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,\\ 1-\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ 1 & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

1232. 设 $\begin{cases}x=u\cdot\cos\dfrac{v}{u},\\ y=u\sin\dfrac{v}{u},\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

[解] 对所给的方程组两边分别求关于 x 的导数，得

$$\begin{cases}1=\left[u'_x\cdot\cos\dfrac{v}{u}-u\cdot\sin\dfrac{v}{u}\cdot\left(\dfrac{v'_xu-u'_xv}{u^2}\right)\right],\\ 0=\left[u'_x\cdot\sin\dfrac{v}{u}+u\cdot\cos\dfrac{v}{u}\cdot\left(\dfrac{v'_xu-u'_xv}{u^2}\right)\right],\end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\cdot u'_x-\sin\dfrac{v}{u}\cdot v'_x=1,\\ \left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\cdot u'_x+\cos\dfrac{v}{u}\cdot v'_x=0,\end{cases}$$

解得

$$u'_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\sin\frac{v}{u}\\ 0 & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u}\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}=\frac{\cos\frac{v}{u}}{1},$$

$$v'_x=\frac{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & 1\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u}\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}=-\frac{\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}}{1}.$$

同理,对方程组两边分别求关于 y 的导数,得

$$\begin{cases}0=\left[u'_y\cdot\cos\frac{v}{u}-u\cdot\sin\frac{v}{u}\cdot\left(\frac{v'_yu-u'_y\cdot v}{u^2}\right)\right]\\ 1=\left[u'_y\cdot\sin\frac{v}{u}+u\cdot\cos\frac{v}{u}\cdot\left(\frac{v'_yu-u'_yv}{u^2}\right)\right].\end{cases}$$

解得

$$u'_y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -\sin\frac{v}{u}\\ 1 & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u}\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}=\frac{\sin\frac{v}{u}}{1},$$

$$v'_y=\frac{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & 0\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u}\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}=\frac{\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}}{1}.$$

1233. 设 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[解] 对所给的方程组求关于 x 的导数

$$\begin{cases} 1=\frac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\cdot\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cdot\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\cos v & 1\\ \sin v & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=-\frac{\sin v}{u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -u\sin v\\ 0 & u\cos v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\cos v.$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\sin v}{u}.$$

再求关于 x 的导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin v}{u}\right)=\frac{\sin v\cdot u'_x-u\cos v\cdot v'_x}{u^2}.\quad\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

下面求 $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. 对方程组求 y 的偏导数,得

$$\begin{cases} 0=\frac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\cdot\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\ 1=\frac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cdot\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -u\sin v\\ 1 & u\cos v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\sin v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\cos v & 0\\ \sin v & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{\cos v}{u}.$$

于是
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\sin v\cdot u'_y-u\cdot\cos v\cdot v'_y}{u^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}.$$

§4. 方向导数和梯度

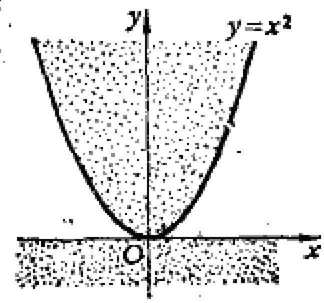
1234. 求 $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点沿方向 α 的导数.

［解］ $$\frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial \alpha}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,\ 0+\rho\sin\alpha)-f(0,\ 0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+(\rho\sin\alpha)^2}-0}{\rho}=1.$$

$\therefore$ $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点沿任何方向的方向导数均为 1.

［说明］ 函数 $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点的两个偏导数都不存在. 而函数沿任何方向,包括沿坐标轴的方向的导数却都存在.



1235. 求 $f(x,\ y)=\begin{cases}0, 若\ y\leqslant0\ 及\ y\geqslant x^2,\\ 1, 若\ 0<y<x^2.\end{cases}$

在原点沿方向 α 的导数.

［解］ 显然 $f(0,\ 0)=0$,并且过原点任一射线上的点 $(x,\ y)$,当它和原点的距离 ρ 充分小时,都落在 $D=\{(x,y)\,|\,y\leqslant0, y\geqslant x^2\}$ 的区域内即在任一射线上,当 ρ 充分小时有

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)=0,\ \ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

(其中 θ 是常数,表示射线与 x 轴正方向夹角).

$$\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to+0}\frac{f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)-f(0,\ 0)}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{0-0}{\rho}=0.$$

函数在原点沿任何方向的方向导数均为零.

1236. 求函数 $f(x,\ y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $M_0(2,\ 1)$ 沿从 M_0 到 $M_1(6,\ 4)$ 方向上的导数.

［解］ $M_0(2,\ 1)$ 到 $M_1(6,\ 4)$ 的射线斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3}{4}$, $\therefore$ 方向数为 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,\ \ \therefore\ \ \frac{\partial}{\partial x}f(2,\ 1)=3,\ \frac{\partial}{\partial y}f(2,\ 1)=0,$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial x}f(2,\ 1)\cdot\frac{4}{5}+\frac{\partial}{\partial y}f(2,\ 1)\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}+0\cdot\frac{3}{5}=2\frac{2}{5}.$$

1237. 求函数 $f(x,\ y)=e^{x\sin y}\cdot\text{arc tg }xy$ 在 $(x,\ y)$ 点分别沿方向 $l_1=(1,\ 0)$，$l_2=(0,\ 1)$ 及 $l_3=al_1+bl_2$ 的方向导数，其中 a、b 为正实数.

［解］ (1) $l_1=(1,\ 0)$ 的方向余弦是 $\cos\alpha=1$，$\cos\beta=0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l_1}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\\&=\sin y e^{x\sin y}\text{arc tg }xy+e^{x\sin y}\cdot\frac{y}{1+x^2y^2}\\&=e^{x\sin y}\left(\sin y\cdot\text{arc tg }xy+\frac{y}{1+x^2y^2}\right).\end{aligned}$$

(2) $l_2=(0,\ 1)$ 的方向余弦是 $\cos\alpha=0$，$\cos\beta=1$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l_2}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial y}\\&=x\cos y e^{x\sin y}\text{arc tg }xy+e^{x\sin y}\frac{x}{1+x^2y^2}\\&=xe^{x\sin y}\left(\cos y\,\text{arc tg }xy+\frac{1}{1+x^2y^2}\right).\end{aligned}$$

(3) $l_3=al_1+bl_2=(a,\ b)$ 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l_3}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot e^{x\sin y}\left[a\left(\sin y\,\text{arc tg }xy+\frac{y}{1+x^2y^2}\right)\right.\\&\quad\left.+bx\left(\cos y\,\text{arc tg }xy+\frac{1}{1+x^2y^2}\right)\right].\end{aligned}$$

1238. 已知函数 $f(x,\ y)=\ln(x+2y)$，过点(2, 3)作抛物线 $y^2=4x$ 的切线，求 f 在点(2, 3)沿该切线方向的导数.

［解］ 抛物线 $y^2=4x$. 过抛物线上 $P(x_0,\ y_0)$ 点作切线，其方程为 $yy_0=2(x+x_0)$.

而(2, 3)在抛物线外，若所作切线方程为 $yy_0=2(x+x_0)$，切点为$(x_0,$

$y_0)$，则有 $3y_0=2(2+x_0)$. 解方程组

$$\begin{cases}3y_0=2(2+x_0),\\ y_0^2=4x_0,\end{cases}$$

得切点为(1, 2)，(4, 4).

∴　切线方程为 l_1: $x-y+1=0$.　和　l_2: $x-2y+4=0$.

l_1 的切线斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=1$, 所以方向余弦为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

l_2 的切线斜率为 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$,所以方向余弦为 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 和 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

于是，函数在(2, 3)处沿 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}=\frac{\partial}{\partial x}f(2, 3)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\partial}{\partial y}f(2, 3)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{16}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}=\frac{\partial}{\partial x}f(2, 3)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}f(2, 3)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{16}.$$

函数在(2, 3)处沿 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 与 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l_2}=\frac{\partial}{\partial x}f(2, 3)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\partial}{\partial y}f(2, 3)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{20}+\frac{\sqrt{5}}{20}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_2}=\frac{\partial}{\partial x}f(2, 3)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\partial}{\partial y}f(2, 3)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

1239. 求 $f(x, y, z)=xyz$ 在(1, 1, 2)点沿分别与 x、y、z 轴正方向夹角相等的方向上的导数.

［解］ 设方向 l 与坐标轴正方向夹角分别为 α、β、γ. 由 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ 及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 解得方向余弦为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

又 $f'_x=yz$, $f'_y=xz$, $f'_z=xy$. $f'_x(1, 1, 2)=2$, $f'_y(1, 1, 2)=2$, $f'_z(1, 1, 2)=1$. 于是，f 在(1, 1, 2)点处沿 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 方向的导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}_{(1,1,2)}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

f 在(1, 1, 2)点处沿 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 方向的导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

1240. 求函数 $f(x, y)=x^3-xy+y^2$ 在点(2, 7)沿与 Ox 轴正向夹角为 α 的方向上的导数. 并问沿什么方向, 方向导数取: (1)最大值; (2) 最小值; (3) 零.

[解] $f'_x=3x^2-y$, $f'_y=2y-x$, 于是 $f'_x(2, 7)=5$, $f'_y(2, 7)=12$.

若射线 l 与 Ox 轴正向夹角为 α, 则方向余弦为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, 则在 (2, 7)点处函数沿 l 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial l}=5\cos\alpha+12\sin\alpha$.

即 $\frac{\partial f}{\partial l}=13\left[\frac{5}{13}\cos\alpha+\frac{12}{13}\sin\alpha\right]=13\sin(\alpha+\varphi)$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{12}$.

∴ (1) 当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 时, f 在(2, 7)点沿与 Ox 轴正向交角 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 的方向的导数为最大, 最大值为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{max}=13$.

(2) 当 $\alpha+\varphi=\frac{3\pi}{2}$, 即 $\alpha=\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 时, f 在(2, 7)点沿与 Ox 轴正向交角 $\alpha=\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 的方向导数为最小, 最小值为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{min}=-13$.

(3) 当 $\alpha+\varphi=\pi$, 2π 时, 即 $\alpha=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 或 $\alpha=2\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 时, f 在(2, 7)点沿与 Ox 轴正向交角 $\alpha=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 或 $\alpha=2\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{12}$ 的方向导数等于零.

1241. 求函数 $u=\cos^2(xy)+\frac{y}{z^2}$ 在 $P(0, 1, 2)$ 点沿射线 l 的方向导数, 其中 l 是直线

$$l_1:\ \begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z=1\\ y-2z+4=0.\end{cases}$$

在平面 $x+y-z=5$ 上的射影.

［分析］ 过直线 l_1 的平面束方程为 $2x-3z-6+\lambda(y-2z+4)=0$. 由空间解析几何知识可知射线 l 与 l 和直线 l_1 所确定的平面的法方向垂直，由此可确定 l 的方向数.

［解］ 过直线

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z=1\\ y-2z+4=0\end{cases}$$

的平面束为 $2x-3z-6+\lambda(y-2z+4)=0$, 即 $2x+\lambda y-(3+2\lambda)z-6+4\lambda=0$, 它的法方向是 $(2,\ \lambda,\ -(3+2\lambda))$. 于是，过 l_1 和 l_1 在 $x+y-z=5$ 内的射影 l 的平面，必与 $x+y-z=5$ 垂直，所以 $[2,\ \lambda,\ -(3+2\lambda)]\cdot(1,\ 1,\ -1)=0$. 即 $2+\lambda+3+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{5}{3}$.

即平面束中与 $x+y-z=5$ 垂直的平面为

$$2x-\frac{5}{3}y-\left(3-\frac{10}{3}\right)z-6-\frac{20}{3}=0,$$

即

$$6x-5y+z-38=0.$$

∴ 射影 l 的直线方程为

$$\begin{cases}6x-5y+z-38=0\\ x+y-z=5.\end{cases}$$

l 的方向数为

$$\left(\pm\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix},\ \pm\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ \pm\begin{vmatrix}6 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right),$$

即 $(\pm 4,\ \pm 7,\ \pm 11)$. 其方向余弦为

$$\left(\frac{4}{\sqrt{186}},\ \frac{7}{\sqrt{186}},\ \frac{11}{\sqrt{186}}\right)\text{和}\left(-\frac{4}{\sqrt{186}},\ -\frac{7}{\sqrt{186}},\ -\frac{11}{\sqrt{186}}\right).$$

$$u'_x=-y\sin 2xy,\quad u'_y=-x\sin 2xy+\frac{1}{z^2},\quad u'_z=-\frac{2y}{z^3}.$$

函数 u 在 $P(0,\ 1,\ 2)$ 沿方向 $(4,\ 7,\ 11)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=u'_x(0,1,2)\cdot\frac{4}{\sqrt{186}}+u'_y(0,1,2)\frac{7}{\sqrt{186}}+u'_z(0,1,2)\frac{11}{\sqrt{186}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{186}},$$

沿方向(-4, -7, -11)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=u'_x(0,1,2)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{186}}\right)+u'_y\cdot(0,1,2)\cdot\left(-\frac{7}{\sqrt{186}}\right)$$

$$+u'_z(0,1,2)\left(-\frac{11}{\sqrt{186}}\right)=\frac{1}{\sqrt{186}}.$$

1242. 求函数 $u=3x^2+2y^2+z^2+2xy-2x+3y+6z$ 在 $O(0, 0, 0)$、$A(1, 1, 1)$、$B(1, -2, -1)$ 点的梯度大小和方向.

[解] $\frac{\partial u}{\partial x}=6x+2y-2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y+2x+3$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z+6$.

(1) 在 O 点,有 $\mathrm{grad}\,u=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, $|\mathrm{grad}\,u|=7$.

梯度方向: $\cos\alpha=-\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

(2) 在 A 点,有 $\mathrm{grad}\,u=6\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $|\mathrm{grad}\,u|=\sqrt{181}$.

梯度方向: $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{181}}$, $\cos\beta=\frac{9}{\sqrt{181}}$, $\cos\gamma=\frac{8}{\sqrt{181}}$.

(3) 在 B 点,有 $\mathrm{grad}\,u=-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $|\mathrm{grad}\,u|=5$.

梯度方向: $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$.

1243. 求函数 $u=2x^2-y^2+3xz+6y-9z$ 梯度为零的点.

[解] $\frac{\partial u}{\partial x}=4x+3z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+6$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3x-9$.

$$|\mathrm{grad}\,u|=\sqrt{(4x+3z)^2+(-2y+6)^2+(3x-9)^2}=0,$$

只要
$$\begin{cases}4x+3z=0,\\-2y+6=0,\\3x-9=0.\end{cases}$$

解此方程组,得 $x=3$, $y=3$, $z=-4$. ∴ 函数在(3, 3, -4)点的梯度等于零.

1244. 求函数 $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1, 2, 2)$及 $B(-3, 1, 0)$的梯度之间的夹角.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

在 $A(1, 2, 2)$ 的梯度是

$$\operatorname{grad} u(A)=\frac{7}{81}\boldsymbol{i}-\frac{4}{81}\boldsymbol{j}-\frac{4}{81}\boldsymbol{k}.$$

在 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度是

$$\operatorname{grad} u(B)=-\frac{2}{25}\boldsymbol{i}+\frac{3}{50}\boldsymbol{j}.$$

$$|\operatorname{grad} u(A)|=\sqrt{\left(\frac{7}{81}\right)^2+\left(\frac{4}{81}\right)^2+\left(-\frac{4}{81}\right)^2}=\frac{1}{9},$$

$$|\operatorname{grad} u(B)|=\sqrt{\left(-\frac{2}{25}\right)^2+\left(\frac{3}{50}\right)^2}=\frac{1}{10}.$$

$$\operatorname{grad} u(A)\cdot\operatorname{grad} u(B)=\frac{7}{81}\cdot\left(-\frac{2}{25}\right)+\left(-\frac{4}{81}\right)\cdot\left(\frac{3}{50}\right)=-\frac{4}{405}.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\operatorname{grad} u(A)\cdot\operatorname{grad} u(B)}{|\operatorname{grad} u(A)|\cdot|\operatorname{grad} u(B)|}=-\frac{8}{9}.$$

得函数在 A、B 两点梯度的夹角为 $\pi-\arccos\frac{8}{9}$.

1245. 求函数 $z=\ln(x^2+2y^2)$ 在 $P(x, y)$

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+2y^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{x^2+2y^2}$.

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}=\frac{2x}{x^2+2y^2}\boldsymbol{i}+\frac{4y}{x^2+2y^2}\boldsymbol{j}.$$

1246. 求函数 $z=x^2+y^2\sin(xy)$ 在 $P(x, y)$ 点的梯度.

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y^3\cos(xy)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy)$.

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$$
$$=[2x+y^3\cos(xy)]\boldsymbol{i}+[2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy)]\boldsymbol{j}.$$

1247. 求函数 $u=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ 在 (a, b, c) 点的梯度.

［解］ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{b^2}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2z}{c^2}$.

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial x}u(a,\ b,\ c)=\frac{2}{a},\quad \frac{\partial}{\partial y}u(a,\ b,\ c)=-\frac{2}{b},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(a,\ b,\ c)=-\frac{2}{c}.$$

于是$(a,\ b,\ c)$点梯度为

$$\operatorname{grad}u=\frac{2}{a}\boldsymbol{i}-\frac{2}{b}\boldsymbol{j}-\frac{2}{c}\boldsymbol{k}.$$

1248. 设位于坐标原点有点电荷q，则在空间$P(x,y,z)$点处所产生的电势为$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$，其中$\varepsilon$为介电常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。求电势$V$在$P$的梯度.

［解］ $\dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon r^3}$， $\dfrac{\partial V}{\partial y}=-\dfrac{qy}{4\pi\varepsilon r^3}$， $\dfrac{\partial V}{\partial z}=-\dfrac{qz}{4\pi\varepsilon r^3}$.

$$\therefore\quad \operatorname{grad}V=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).$$

［说明］ 电场强度$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，即得$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}V$。由此说明了在同一点处电场强度与电势梯度之间的关系.

1249. 证明梯度$\operatorname{grad}u$为常向量的充分必要条件是函数$u(x,\ y,\ z)$为线性函数$u=ax+by+cz+d$($a,\ b,\ c,\ d$为常数)。

［证］ 必要性：若$\operatorname{grad}u$为常向量，$\operatorname{grad}u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$。即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=c$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a$， 得 $u=ax+\varphi(y,\ z)$；

又由$\dfrac{\partial u}{\partial y}=b$，得$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=b$，便可推得$\varphi(y,\ z)=by+\psi(z)$；

再由$\dfrac{\partial u}{\partial z}=c$，得$\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=c$，便可推得$\psi(z)=cz+d$。

$$\therefore\quad u=ax+by+cz+d.$$

充分性：若$u=ax+by+cz+d$($a,\ b,\ c,\ d$为常数)。

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=b$， $\dfrac{\partial u}{\partial z}=c$。

显然$\operatorname{grad}u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，即梯度为常向量。

1250. 证明梯度的性质:

(1) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$;

(2) $\operatorname{grad}(u\cdot v)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$;

(3) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v)$;

(4) $\operatorname{grad}F(u)=F'(u)\operatorname{grad}u$.

[证] (1) $$\operatorname{grad}(u+v)=\frac{\partial(u+v)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(u+v)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(u+v)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$
$$=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v.$$

(2) $$\operatorname{grad}(u\cdot v)=\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$
$$=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v.$$

(3) $$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=\left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\right)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{1}{v^2}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right.$$
$$\left.-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v).$$

(4) $\operatorname{grad} F(u)=\frac{\partial F(u)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F(u)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F(u)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=F'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+F'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=F'(u)\operatorname{grad} u.$$

§5. 几 何 应 用

1251. 求椭圆抛物面 $z=x^2+3y^2$ 在(2, 1, 7)点的切平面与法线方程.

[解] $z'_x(2,1)=2x|_{(2,1)}=4$;　$z'_y(2,1)=6y|_{(2,1)}=6$.

切平面方程为 $z-z_0=z'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$，即 $z-7=4(x-2)+6(y-1)$. 法线方程为

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.\quad 即\quad \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-7}{-1}.$$

1252. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ 在点(3, 4, −7)的切平面和法线方程.

[解] $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$,　$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y$,　$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x$.

∴ 在(3, 4, −7)处的偏导数为: $z'_x(3,4,-7)=-3\frac{2}{5}$, $z'_y=-2\frac{1}{5}$.

于是得切平面方程为

$$z-(-7)=z'_x(3,4,-7)\cdot(x-3)+z'_y(3,4,-7)\cdot(y-4).$$

整理,得 $17x+11y+5z=60$. 法线方程为

$$\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}.$$

1253. 求曲面 $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ 在点$(a,a,-a)$的切平面和法线方程.

[解] $z=\frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$. $z'_x=\frac{1}{a^2}(3x^2-3ay)$; $z'_y=\frac{1}{a^2}(-3ax+3y^2)$.

∴ 在$(a,a,-a)$处的偏导数为: $z'_x(a,a,-a)=0$, $z'_y(a,a,-a)=0$.

于是得切平面方程为 $z+a=0$. 法线方程为

$$\begin{cases} x=a, \\ y=a. \end{cases}$$

1254. 求曲面 $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ 在点(1, 1, 1)的切平面和法线方程.

［解］ 令 $F(x, y, z)=3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$. 曲面在(1, 1, 1)点处的法向量为

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=12,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-8,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=-8.$$

∴ 切平面方程为

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}(x-1)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}(y-1)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}(z-1)=0.$$

整理，得 $3x-2y-2z+1=0.$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}.$

1255. 已知两曲面 $x+2y-\ln z+4=0$, $x^2-xy-8x+z+5=0$, 求证两曲面在点(2, −3, 1)相切.

［分析］ 证明两曲面在(2, −3, 1)相切，实质上是证明两个曲面在交点处有公共的切平面，或者证明两个曲面在该点的法向量平行.

［证］ 显然(2, −3, 1)点的坐标分别满足两曲面方程，因此该点是两曲面的公共点. 曲面 $x+2y-\ln z+4=0$. 令 $F(x, y, z)=x+2y-\ln z+4=0$. 在(2, −3, 1)点有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(2,-3,1)}=1,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(2,-3,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(2,-3,1)}=-1.$$

故曲面 $F(x, y, z)=0$ 在(2, −3, 1)点的法向量为(1, 2, −1). 曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$, 令 $G(x, y, z)=x^2-xy-8x+z+5=0$, 在(2, −3, 1)点有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(2,-3,1)}=-1,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(2,-3,1)}=-2,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{(2,-3,1)}=1.$$

故曲面 $G(x, y, z)=0$ 在(2, −3, 1)点的法向量为(−1, −2, 1). 两曲面的法向量平行. 所以两曲面在(2, −3, 1)点相切.

1256. 确定 k 的值使旋转抛物面 $z-2=k(x^2+y^2)$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切.

［解］ 若两曲面在某一点处相切，则两曲面在该点处的法向量方向平行，设两曲面在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处相切．则旋转抛物面在 P 点处的法向量为 $(2kx_0, 2ky_0, -1)$。球面上点 P 处的法向量为 $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$．两法向量平行，故有

$$\frac{2x_0}{2kx_0}=\frac{2y_0}{2ky_0}=\frac{2z_0}{-1},\quad 亦即\quad \frac{1}{k}=-2z_0 \qquad \cdots①$$

由于点 P 在两曲面上，$\therefore\ x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ 以及 $z_0-2=k(x_0^2+y_0^2)$．将①式分别代入上面两曲面方程，得

$$x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4k^2}=1,\quad 于是\quad -\frac{1}{2k}-2=k\left(1-\frac{1}{4k^2}\right).$$

整理得
$$4k^2+8k+1=0.$$

解方程得
$$k=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}.$$

当 $k=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$ 时，$z_0=-\dfrac{1}{2k}=\sqrt{3}+2$，代入球面方程，得

$$x_0^2+y_0^2=1-z_0^2=1-(\sqrt{3}+2)^2<0,$$

$\therefore\ k=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$ 不合题意．当 $k=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ 时，$z_0=-\dfrac{1}{2k}=2-\sqrt{3}$，代入球面方程，得

$$x_0^2+y_0^2=1-z_0^2=1-(2-\sqrt{3})^2=4\sqrt{3}-6.$$

这说明 $k=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ 时，球面与旋转抛物面相切，而切点是圆

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=2-\sqrt{3}.\end{cases}$$

1257．求由参数方程给出的曲面 $\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\\ z=u^2+v^2\end{cases}$ 在点 (x_0, y_0, z_0) $(x_0=u_0+v_0,\ y_0=u_0-v_0,\ z_0=u_0^2+v_0^2)$ 处的切平面和法线方程．

［解］ $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=2(u+v),$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(u-v).$$

(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0.$$

即

$$2(u_0+v_0)(x-u_0-v_0)+2(u_0-v_0)(y-u_0+v_0)+(-2)(z-u_0^2-v_0^2)=0.$$

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

整理得 $$xx_0+yy_0-z=x_0^2+y_0^2-z_0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}},$$

整理，得 $$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

［说明］ 由参数方程前两个方程可得$u=\frac{1}{2}(x+y)$，$v=\frac{1}{2}(x-y)$. 代入第三个方程，得$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，它是旋转抛物面.

$z'_x=x$，$z'_y=y$. 在(x_0, y_0)的偏导数$z'_x(x_0, y_0)=x_0$，$z'_y(x_0, y_0)=y_0$. 于是，切平面方程为$z-z_0=x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)$.

法线方程为 $$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1258．求由参数方程给出的曲面 $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=\sqrt{a^2-u^2}\end{cases}$ **在点**$(x_0, y_0, z_0)$$(x_0=u_0\cos v_0,\ y_0=u_0\sin v_0,\ z_0=\sqrt{a^2-u_0^2})$**处的切平面和法线方程.**

［解］ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u.$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} & 0\end{vmatrix}=\frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix}=\frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}.$$

在(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)$$
$$+\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0.$$

即

$$\frac{u_0^2\cos v_0}{\sqrt{a^2-u_0^2}}(x-u_0\cos v_0)+\frac{u_0^2\sin v_0}{\sqrt{a^2-u_0^2}}(y-u_0\sin v_0)$$
$$+u_0(z-\sqrt{a^2-u_0^2})=0.$$
$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

整理得(x_0, y_0, z_0)处的切平面为 $xx_0+yy_0+zz_0=a^2$. 法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}.$$

1259. 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=498$平行于平面$x+3y+5z=7$的切平面.

[解] 令$F(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2-498=0$, $F'_x=2x$, $F'_y=4y$, $F'_z=6z$. 设$P(x_0, y_0, z_0)$为曲面上某一点,则过P的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0.$$

由于切平面与$x+3y+5z=7$平行,故

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{3}=\frac{6z_0}{5}=k,$$
$$\therefore\quad x_0=\frac{1}{2}k,\quad y_0=\frac{3}{4}k,\quad z_0=\frac{5}{6}k.$$

又 P在曲面上,所以$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=498$, 即

$$\left(\frac{1}{2}k\right)^2+2\left(\frac{3}{4}k\right)^2+3\left(\frac{5}{6}k\right)^2=498,\ k^2=144,\ k=\pm 12.$$
$$k=12,\ x_0=6,\ y_0=9,\ z_0=10.$$
$$k=-12,\ x_0=-6,\ y_0=-9,\ z_0=-10.$$

∴ 所求切平面方程为

$$2\times 6\times(x-6)+4\times 9\times(y-9)+6\times 10\times(z-10)=0;$$

$2\times(-6)\times(x+6)+4\times(-9)\times(y+9)+6\times(-10)\times(z+10)=0$.

即 $x+3y+5z-83=0$, $x+3y+5z+83=0$.

1260. 已知曲面 $x^2-y^2-3z=0$, 求经过 $A(0,\ 0,\ -1)$ 点且与直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ 平行的切平面方程.

［解］ 曲面 $z=\frac{1}{3}(x^2-y^2)$, 设切点是 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 则有

$$z'_x\big|_{(x_0,y_0)}=\frac{2}{3}x_0,\quad z'_y\big|_{(x_0,y_0)}=-\frac{2}{3}y_0.$$

切平面方程为

$$z-z_0=\frac{2}{3}x_0(x-x_0)-\frac{2}{3}y_0(y-y_0).$$

因 $A(0,\ 0,\ -1)$ 在切平面上, 故有

$$-1-z_0=-\frac{2}{3}x_0^2+\frac{2}{3}y_0^2 \qquad \cdots①,$$

切平面与 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ 平行, 故

$$\frac{2}{3}x_0\cdot 2+\left(-\frac{2}{3}y_0\right)\cdot 1-1\cdot 2=0,$$

得

$$y_0=2x_0-3 \qquad \cdots②,$$

且切点满足

$$z_0=\frac{1}{3}(x_0^2-y_0^2) \qquad \cdots③,$$

解①、②、③式, 得切点坐标为 $x_0=2$, $y_0=1$, $z_0=1$. 于是所求的切平面方程为

$$z-1=\frac{4}{3}(x-2)-\frac{2}{3}(y-1).$$

整理得 $$4x-2y-3z=3.$$

1261. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使该点的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$. 并求出该点处法线方程.

［解］ 平面 $x+3y+z+9=0$ 的法向量为 $(1,\ 3,\ 1)$, 令 $F(x,\ y,\ z)=xy-z$, 有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1.$$

∴ 曲面在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的法向量为 $(y_0, x_0, -1)$. 设它垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 则

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1},$$

得 $x_0=-3$, $y_0=-1$, $z_0=x_0y_0=3$. 即 P 点坐标为 $(-3, -1, 3)$.

所求法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

1262. 求证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何一点的切平面在坐标轴上截距之和为常数.

[证] 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 上任意一点,过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 曲面的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

整理得
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

∴ 切平面在坐标轴上截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}\,(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

1263. 设有曲面 S: $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$, 平面 π: $x+2y+3z+4=0$, (1) 试在曲面上求与平面 π 平行的切平面; (2) 试求曲面 S 和平面 π 之间的最短距离.

[解] (1) 令 $F(x, y, z)=x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}-1=0$, 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为切点,

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)=2x_0,\ F'_y(x_0, y_0, z_0)=y_0,\ F'_z(x_0, y_0, z_0)=\frac{2z_0}{3}.$$

由于切平面与平面 π 平行,所以有

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{2}=\frac{\frac{2z_0}{3}}{3}=\lambda.$$

得 $x_0=\frac{\lambda}{2}$，$y_0=2\lambda$，$z_0=\frac{9}{2}\lambda$，代入曲面方程

$$\frac{\lambda^2}{4}+2\lambda^2+\frac{27}{4}\lambda^2=1,\quad \therefore\quad \lambda^2=\frac{4}{36},\quad \lambda=\pm\frac{1}{3}.$$

于是点 P 为

$$P_1\left(\frac{1}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)、P_2\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right).$$

切平面方程为

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)+2\left(y-\frac{2}{3}\right)+3\left(z-\frac{3}{2}\right)=0$$

和
$$\left(x+\frac{1}{6}\right)+2\left(y+\frac{2}{3}\right)+3\left(z+\frac{3}{2}\right)=0.$$

整理得　　$x+2y+3z=6$　和　$x+2y+3z=-6.$

(2) 曲面 S 与平面 π 之间的最短距离，可以看作离平面 π 较近的切点到平面 π 的距离. P_1、P_2 到平面 π 的距离分别是

$$d_1=\frac{\left|1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{3}{2}+4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{14}},$$

$$d_2=\frac{\left|1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{3}{2}-4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

∴ 曲面 S 到平面 π 的最短距离为 $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

1264. 求证锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 上任意点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)\ (x_0\neq0)$ 处的切平面都通过原点.

[证] $$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

设 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为曲面上任意一点，过 P 点的切平面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)$$

由于

$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]\cdot(0-x_0)-f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(0-y_0)$$
$$=-x_0f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)=0-z_0.$$

∴ (0, 0, 0) 点满足切平面方程，即切平面过原点。

1265. 求证曲面 $f\left(\dfrac{y-b}{x-a}, \dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$ 上的切平面都过某一定点。

［证］ 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任一点。

$$\because\quad \frac{\partial f}{\partial x}=f_1'\cdot\left[-\frac{y-b}{(x-a)^2}\right]+f_2'\cdot\left[-\frac{z-c}{(x-a)^2}\right],$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x-a},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=f_2'\cdot\frac{1}{x-a}.$$

∴ 过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$\left[f_1'\cdot\frac{y_0-b}{(x_0-a)^2}+f_2'\cdot\frac{z_0-c}{(x_0-a)^2}\right](x-x_0)-f_1'\cdot\frac{1}{x_0-a}(y-y_0)$$
$$-f_2'\cdot\frac{1}{x_0-a}(z-z_0)=0.$$

又可化为

$$\left[\frac{y_0-b}{x_0-a}(x-x_0)-(y-y_0)\right]\frac{f_1'}{x_0-a}$$
$$+\left[\frac{z_0-c}{x_0-a}(x-x_0)-(z-z_0)\right]\frac{f_2'}{x_0-a}=0.$$

易见 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 满足上述方程，即切平面过定点 (a, b, c)。

1266. 求证曲面 $f(ax-bz, ay-cz)=0$ 上的切平面都与某一定直线平行(a, b, c 不同时为零)。

［证］ 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任意一点，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=af_1',\quad \frac{\partial f}{\partial y}=af_2',\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-bf_1'-cf_2'.$$

于是切平面的方程为

$$af_1'\cdot(x-x_0)+af_2'\cdot(y-y_0)-(bf_1'+cf_2')(z-z_0)=0.$$

设某直线的方向数为 (l, m, n)，若要它与平面平行，只须

$$af_1'\cdot l+af_2'\cdot m-(bf_1'+cf_2')\cdot n=0.$$

取 $l=b$, $m=c$, $n=a$, 必满足上式，即曲面 $f(ax-bz, ay-cz)=0$ 上任

一切平面都与定直线 $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}=\frac{z}{a}$ 平行.

1267．求证曲面 $xyz=a^3$ $(a>0)$的任一切平面与坐标平面围成的四面体体积为定值.

［证］ 设 $M(x_0, y_0, z_0)$为曲面上任意一点。

$$F(x, y, z)=xyz-a^3=0.$$

于是 $$F'_x(x_0, y_0, z_0)=y_0z_0,\quad F'_y(x_0, y_0, z_0)=x_0z_0,$$
$$F'_z(x_0, y_0, z_0)=x_0y_0.$$

过 M 点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+z_0x_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0.$$

得 $$y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0=3a^3.$$

令 $y=0$, $z=0$, 得切平面与 x 轴截距为 $x=\frac{3a^3}{y_0z_0}$，同理可得切平面与 y 轴，z 轴截距分别为 $y=\frac{3a^3}{z_0x_0}$，$z=\frac{3a^3}{x_0y_0}$.

因此，切平面与坐标平面所围的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{6}\times\frac{3a^3}{y_0z_0}\times\frac{3a^3}{z_0x_0}\times\frac{3a^3}{x_0y_0}=\frac{9}{2}a^3,$$

它是定值.

1268．求螺旋线

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=\frac{k}{2\pi}t \end{cases}$$

在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{k}{8}\right)$ 点的切线与法平面方程.

［解］ 螺旋线上任意一点的切线方向是

$$(x'_t, y'_t, z'_t)=\left(-a\sin t, a\cos t, \frac{k}{2\pi}\right).$$

于是在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{k}{8}\right)$ 点的切线方向为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{k}{2\pi}\right)$.

$\therefore$ 切线方程为 $$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{z-\frac{k}{8}}{\frac{k}{2\pi}}.$$

法平面方程为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}a\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)+\frac{k}{2\pi}\left(z-\frac{k}{8}\right)=0.$$

1269. 求曲线

$$\begin{cases}x=t\\y=-t^2\\z=t^3\end{cases}$$

上与平面 $x+2y+z=0$ 平行的切线方程.

[解] 平面 $x+2y+z=0$ 的法方向为 $(1, 2, 1)$. 曲线

$$\begin{cases}x=t\\y=-t^2\\z=t^3\end{cases}$$

的切线方向为 $(1, -2t, 3t^2)$, 切线与平面平行,故

$$(1, 2, 1)\cdot(1, -2t, 3t^2)=0.$$

即 $1-4t+3t^2=0$, 得 $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{3}$.

当 $t=1$ 时, 曲线上点为 $(1, -1, 1)$, 切线方向为 $(1, -2, 3)$. 切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

当 $t=\frac{1}{3}$ 时, 曲线上的点为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}\right)$, 切线方向为 $\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

1270. 已知球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与平面 $x+y+z=0$ 相交, 求交线上的点 $(2, -2, 0)$、$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 处的切

线方程.

[解]　令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-8=0$, $G(x, y, z)=x+y+z=0$.

在 $(2, -2, 0)$ 处:

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=-8,$$

$$\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=\begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=-4,$$

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(2,-2,0)}=8.$$

切线方程为　$$\frac{x-2}{-8}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{8},$$

在 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 处

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}=-4\sqrt{3},$$

$$\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}=0,$$

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}=4\sqrt{3}.$$

切线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{-4\sqrt{3}}=\dfrac{z-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4\sqrt{3}} \\ y=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}, \end{cases}　即　\begin{cases} x+z-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=0 \\ y=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

1271. 求证曲线

$$\begin{cases} x=ae^t\cos t \\ y=ae^t\sin t \\ z=ae^t \end{cases}$$

与锥面 $z^2=x^2+y^2$ 的各母线相交的角度为定值.

[分析]　锥面母线的方向为 $\boldsymbol{v}_1$, 曲线上任一点的方向为 $\boldsymbol{v}_2$, 关键是证

明 $\cos(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)=\dfrac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}$ 为定值.

［证］ 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线与锥面的交点. 故锥面上过 P_0 的母线的方向为 (x_0, y_0, z_0). 又 P_0 在曲线上，则点 P_0 的切向量为

$$(x_t', y_t', z_t')=[ae^{t_0}(\cos t_0-\sin t_0),\ ae^{t_0}(\sin t_0+\cos t_0),\ ae^{t_0}]$$
$$=[(x_0-y_0),\ (x_0+y_0),\ z_0].$$

于是，

$$\cos(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}$$
$$=\frac{(x_0-y_0)x_0+(x_0+y_0)y_0+z_0^2}{\sqrt{(x_0-y_0)^2+(x_0+y_0)^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$
$$=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{\sqrt{2x_0^2+2y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{2z_0^2}{\sqrt{3z_0^2}\cdot\sqrt{2z_0^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

∴ 交线的角度为定值.

1272. 求一平面，使平面与曲线

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t} \\ y=\dfrac{1+t}{t} \\ z=t^2 \end{cases}$$

在 $t=1$ 点处的切线互相平行，并且平面过直线

$$\begin{cases} x+8y+15=0 \\ 4y+z+8=0. \end{cases}$$

［解］ $x'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$， $y'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$， $z'(t)=2t$.

所以在 $t=1$ 点处曲线的切线方向为 $\left(\dfrac{1}{4}, -1, 2\right)$.

设所求的平面方程为

$$x+8y+15+\lambda(4y+z+8)=0,$$

即
$$x+(8+4\lambda)y+\lambda z+(8\lambda+15)=0.$$

平面的法方向为 $(1, 8+4\lambda, \lambda)$，由平面与切线平行，故

$$(1,\ 8+4\lambda,\ \lambda)\cdot\left(\frac{1}{4},\ -1,\ 2\right)=0.$$

即 $\frac{1}{4}-(8+4\lambda)+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{31}{8}$.

∴ 所求平面方程为　$x+8y+15-\frac{31}{8}(4y+z+8)=0$,

整理得　　$8x-60y-31z-128=0$.

§6. 多元函数的泰勒公式

1273. 设函数 $z=f(x,\ y)$ 在凸区域 D 内 $f'_x(x,\ y)=f'_y(x,\ y)=0$. 求证在 D 内 $f(x,\ y)$ 是常数.

［证］ 对 D 内某一定点 $(x_0,\ y_0)$ 以及任意一点 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$.

考虑函数的增量，由泰勒公式得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$
$$=f'_x(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta<1$.

$$\because\quad f'_x(x,\ y)=f'_y(x,\ y)=0,\quad\therefore\quad \Delta z=0.$$

即 $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,\ y_0)$. 由 D 内的点 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 的任意性，得 $f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0)$. 即在 D 内 $f(x,\ y)$ 是常数.

1274. 已知函数 $f(x,\ y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+4$，当自变量的值由 $x=5$, $y=6$ 变到 $x=5+h$, $y=6+k$ 时，求：(1) 函数的增量；(2) 计算 $f(5.02,\ 5.99)$.

［解］ (1) $f'_x=3x^2-6y-39$, $f'_y=2y-6x+18$, $f''_{xx}=6x$, $f''_{yy}=2$, $f''_{xy}=-6$, $f'''_{xxx}=6$.

∴ 在 $(5,\ 6)$ 点处的偏导数为 $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f''_{xx}=30$, $f''_{yy}=2$, $f''_{xy}=-6$, $f'''_{xxx}=6$.

$$f(5+h,\ 6+k)-f(5,\ 6)$$
$$=\frac{1}{1!}[0\cdot h+0\cdot k]+\frac{1}{2!}[30\cdot h^2+2\cdot(-6)hk+2\cdot k^2]$$
$$+\frac{1}{3!}[6\cdot h^3+3\cdot 0\cdot h^2k+3\cdot 0\cdot hk^2+0\cdot k^3]$$

$=15h^2-6hk+k^2+h^3.$

(2) 当 $h=0.02,\ k=-0.01$ 时,

$$\begin{aligned}f(5.02,\ 5.99)&=f(5,\ 6)+15h^2-6hk+k^2+h^3\\&=-102+15\times0.02^2-6\times0.02\times(-0.01)]\\&\quad+(-0.01)^2+0.02^3\\&=-101.99.\end{aligned}$$

1275. 已知函数

$$f(x,\ y)=\frac{1}{4}xy^3-yx^3+\frac{1}{2}x^2y^2-2x+3y-4,$$

当自变量的值由 $x=1,\ y=2$ 变到 $x=1+h,\ y=2+k$ 时,求:(1) 函数的增量;(2) 计算函数展开到二阶时 $f(1.02,\ 2.03)$ 的近似值.

[解] $f(1,\ 2)=2,\ \frac{\partial}{\partial x}f(1,\ 2)=-2,\ \frac{\partial}{\partial y}f(1,\ 2)=7,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,\ 2)=-8,\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1,\ 2)=4,\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,\ 2)=4,\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}f(1,\ 2)=-12,$ $\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(1,\ 2)=-2,\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(1,\ 2)=5,\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}f(1,\ 2)=\frac{3}{2},$ $\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(1,\ 2)=\frac{\partial^4}{\partial y^4}f(1,\ 2)=0,\ \frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}f(1,\ 2)=-6,\ \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}f(1,\ 2)=2,\ \frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}f(1,\ 2)=\frac{3}{2}.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \Delta z=&-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-h^2k\\&+\frac{5}{2}hk^2+\frac{1}{4}k^3-h^3k+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{4}hk^3.\end{aligned}$$

$$f(1.02,\ 2.03)\approx f(1,\ 2)-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2=2.17.$$

1276. 设 $f(x,\ y,\ z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz$ 按 $h,\ k,\ l$ 的正整数幂展开 $f(x+h,\ y+k,\ z+l)$.

[解] $\frac{\partial f}{\partial x}=2Ax+2Dy+2Ez,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2By+2Dx+2Fz,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2Cz+2Ex+2Fy,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A,\ \frac{\partial f}{\partial y^2}=2B,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=2E.$

函数三阶以上偏导数都为零，故

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz +2(Ax+Dy+Ez)h+2(By+Dx+Fz)k +2(Cz+Ex+Fy)l+Ah^2+Bk^2+Cl^2 +2Dhk+2Ehl+2Fkl.$$

1277. 求函数 $f(x,\ y)=x^2+2y^3-3xy^2$ 在点 $(1,\ -2)$ 处的泰勒展开式.

［解］ $f(1,\ -2)=-27$, $\frac{\partial}{\partial x}f(1,\ -2)=2x-3y^2\Big|_{(1,-2)}=-10$,

$\frac{\partial}{\partial y}f(1,\ -2)=6y^2-6xy\Big|_{(1,-2)}=36$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,\ -2)=2$,

$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1,\ -2)=-6y\Big|_{(1,-2)}=12$,

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,\ -2)=12y-6x\Big|_{(1,-2)}=-30$, $\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(1,\ -2)=0$,

$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(1,\ -2)=0$, $\frac{\partial}{\partial y^2\partial x}f(1,\ -2)=-6$,

$\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(1,\ -2)=12$.

$$\therefore\ f(x,\ y)=f(1,\ -2)+\frac{\partial}{\partial x}f(1,\ -2)(x-1) +\frac{\partial}{\partial y}f(1,\ -2)(y+2)+\frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,\ -2)(x-1)^2 +2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1,\ -2)(x-1)(y+2) +\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,\ -2)(y+2)^2\Big]+\frac{1}{3!}\Big[\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(1,\ -2)(x-1)^3 +3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(1,\ -2)(x-1)^2(y+2) +3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(1,\ -2)(x-1)(y+2)^2 +\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(1,\ -2)(y+2)^3\Big]$$

$$=-27-10(x-1)+36(y+2)+(x-1)^2+12(x-1)(y+2) -15(y+2)^2-3(x-1)(y+2)^2+2(y+2)^3.$$

1278. 求函数 $f(x, y)=\frac{x}{y}$ 在(1, 1)点直到三阶为止的泰勒展开式.

［解］ $f(1, 1)=1$, $\frac{\partial}{\partial x}f(1, 1)=1$, $\frac{\partial}{\partial y}f(1, 1)=-1$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1, 1)=0$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1, 1)=-1$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1, 1)=2$, $\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(1, 1)=0$,

$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(1, 1)=0$, $\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(1, 1)=2$, $\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(1, 1)=-6$.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x, y)=&f(1, 1)+\frac{1}{1!}\Big[\frac{\partial}{\partial x}f(1, 1)(x-1)\\
&+\frac{\partial}{\partial y}f(1, 1)(y-1)\Big]+\frac{1}{2!}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1, 1)(x-1)^2\\
&+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1, 1)(x-1)(y-1)\\
&+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1, 1)(y-1)^2\Big]+\frac{1}{3!}\Big[\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(1, 1)(x-1)^3\\
&+3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(1, 1)(x-1)^2(y-1)\\
&+3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(1, 1)(x-1)(y-1)^2\\
&+\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(1, 1)(y-1)^3\Big]+\frac{1}{4!}\Big[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}\\
&+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^4 f[1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1)]\\
=&1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)\\
&+(y-1)^2+(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3\\
&+\frac{1}{4!}\Big[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^4\\
&\times f[1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1)]\quad (0<\theta<1).
\end{aligned}$$

1279. 求函数 $z=\sin(x^2+2y^2)$ 在点(0, 0)的泰勒展开式.

［解］ 令 $u=x^2+2y^2$, $z=\sin u$ 在 $u_0=0$ 点的泰勒展开式为

$$\begin{aligned}
\sin u=&u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\\
&+(-1)^n\frac{\sin\theta u}{(2n)!}u^{2n}\quad (|\theta|<1).
\end{aligned}$$

于是得

$$\sin(x^2+2y^2)=(x^2+2y^2)-\frac{(x^2+2y^2)^3}{3!}+\frac{(x^2+2y^2)^5}{5!}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x^2+2y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\cdot\frac{\sin[\theta(x^2+2y^2)]}{(2n)!}$$
$$\cdot(x^2+2y^2)^{2n},\quad 其中\quad |\theta|<1.$$

1280．求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 的泰勒展开式.

［解］ $f'_x=3x^2-3yz$, $f''_{xx}=6x$, $f'''_{xxx}=6$, $f''_{xy}=-3z$, $f'''_{xxy}=0$. $f'''_{xyz}=-3$.
由对称性即得 $(1,1,1)$ 点处的偏导数值:

$$f'_x=f'_y=f'_z=0,\ f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{zz}=6,\ f'''_{xxx}=f'''_{yyy}=f'''_{zzz}=6,$$
$$f''_{xy}=f''_{yz}=f''_{zx}=-3,\ f'''_{xxy}=f'''_{xxz}=f'''_{xyy}=f'''_{yyz}=f'''_{xzz}=f'''_{yzz}=0,$$

$f'''_{xyz}=-3$, 且 $f(1,1,1)=0$.

由泰勒公式

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)f(1,1,1)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(1,1,1)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^3f(1,1,1)$$
$$+\frac{1}{4!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^4f(1+\theta h,1+\theta k,1+\theta l).$$

其中 $0<\theta<1$, $h=x-1$, $k=y-1$, $l=z-1$. 于是

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2!}[6(x-1)^2+6(y-1)^2+6(z-1)^2]$$
$$+\frac{1}{2!}[2\cdot(-3)(x-1)(y-1)+2\cdot(-3)(y-1)(z-1)$$
$$+2\cdot(-3)(z-1)(x-1)]$$
$$+\frac{1}{3!}[6(x-1)^3+6(y-1)^3+6(z-1)^3$$
$$+6\cdot(-3)(x-1)(y-1)(z-1)]$$
$$=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)$$
$$-(y-1)(z-1)-(z-1)(x-1)]+(x-1)^3$$
$$+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$$

1281. 求下列函数的马克劳林展开式:

(1) $f(x, y)=\ln(1+x+y)$到三阶为止;

(2) $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 到二阶为止.

[解] (1) $f(0, 0)=0$, $\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)=\frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)=1$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0, 0)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0, 0)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0, 0)=-1,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(0, 0)=\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}f(0, 0)=\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(0, 0)=\frac{\partial^3}{\partial y^3}f(0, 0)=2.$$

$$\therefore\quad \ln(1+x+y)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3$$

$$-\frac{1}{4!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^4 f(\theta x, \theta y)\quad (0<\theta<1).$$

(2) $f(0, 0)=1$, $\frac{\partial}{\partial x}f(0, 0)=\frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)=0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0, 0)$ $=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0, 0)=-1$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0, 0)=0$.

$$\therefore\quad \sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$+\frac{1}{3!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(\theta x+\theta y)\quad (0<\theta<1).$$

1282. 求函数 $f(x, y)=e^{x+y}$ 的马克劳林展开式.

[解] $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}f(x, y)=e^{x+y}$,

故
$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}f(0, 0)=1\quad (m, n \text{ 为自然数})$$

$$\therefore\quad e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(x+y)^n+\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)}\quad (0<\theta<1).$$

1283. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y} 展开成泰勒级数.

[解] $e^{x+y}=e^{(x-1)+(y+1)}=e^{x-1}\cdot e^{y+1}$.

$$\therefore\quad e^{x+y}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}\quad (|x|<+\infty,\ |y|<+\infty).$$

1284. 求函数 $z=e^x\cos y$ 在 $(0,\ 0)$ 点邻域内的泰勒级数.

[解]　∵　$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$\cos y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}$，

并且右端的级数都绝对收敛，

$$\therefore\quad z=e^x\cos y=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{(m!)(2n)!}.$$

1285. 设函数 $z=f(x,\ y)$ 由方程 $z^3+yz-xy^2-x^3=0$ 所定义，且 $f(1,\ 1)=1$. 求 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 1)$ 的泰勒级数(写到二次项为止).

[解]　对方程 $z^3+yz-xy^2-x^3=0$ 求关于 x 的导数，得

$$3z^2\cdot z'_x+y\cdot z'_x-y^2-3x^2=0,\quad\therefore\quad z'_x=\frac{3x^2+y^2}{3z^2+y}.$$

同理　$$3z^2\cdot z'_y+z+yz'_y-2xy=0,\quad\therefore\quad z'_y=\frac{2xy-z}{3z^2+y}.$$

再求得　$$z''_{xx}=\frac{6x(3z^2+y)-6z\cdot z'_x(3x^2+y^2)}{(3z^2+y)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{2y(3z^2+y)-(6z\cdot z'_y+1)(3x^2+y^2)}{(3z^2+y)^2},$$

$$z''_{yy}=\frac{(2x-z'_y)(3z^2+y)-(6z\cdot z'_y+1)(2xy-z)}{(3z^2+y)^2}.$$

于是在 $x=y=1$，$z=1$ 处，$z'_x=1$，$z'_y=\frac{1}{4}$，$z''_{xx}=0$，$z''_{xy}=-\frac{1}{8}$，$z''_{yy}=\frac{9}{32}$.

$$\therefore\quad z=f(x,\ y)=f(1,\ 1)+\frac{1}{1!}[z'_x(1,\ 1)\cdot(x-1)+z'_y(y-1)]$$

$$+\frac{1}{2!}[z''_{xx}(1,\ 1)(x-1)^2+2z''_{xy}(1,\ 1)(x-1)(y-1)$$

$$+z''_{yy}(1,\ 1)(y-1)^2]+\cdots$$

$$=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+\cdots.$$

1286. 当 $|x|$、$|y|$、$|z|$ 都很小时，求证函数

$$f(x,\ y,\ z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z$$

有近似表达式

$$f(x,\ y,\ z)\approx-(xy+yz+zx).$$

[证] $f'_x=-\sin(x+y+z)+\sin x\cos y\cos z$,

$f''_{xx}=-\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z$,

$f''_{xy}=-\cos(x+y+z)-\sin x\sin y\cos z$.

由对称性得(0, 0, 0)点处的偏导数为

$$f'_x=f'_y=f'_z=0,\ f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{zz}=0,\ f''_{xy}=f''_{yz}=f''_{zx}=-1.$$

按泰勒展开，并考虑到$|x|$、$|y|$、$|z|$都很小，有

$$f(x,y,z)\approx-(xy+yz+zx).$$

1287. 按$(x-1)$, $(y-2)$的幂的形式，求函数$z=x^y$的泰勒展开式(至三次项)，并求$1.01^{2.2}$的近似值(精确到10^{-3}).

[解] $z=x^y$, $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$, $z''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $z''_{yy}=x^y(\ln x)^2$, $z'''_{xxx}=y(y-1)(y-2)x^{y-3}$, $z'''_{xxy}=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x$, $z'''_{xyy}=yx^{y-1}(\ln x)^2+2x^{y-1}\ln x$, $z'''_{yyy}=x^y(\ln x)^3$.

于是(1, 2)处的偏导数为: $z'_x=2$, $z'_y=0$, $z''_{xx}=2$, $z''_{xy}=1$, $z''_{yy}=0$, $z'''_{xxx}=0$, $z'''_{xxy}=3$, $z'''_{xyy}=0$, $z'''_{yyy}=0$, 且$z=1$. 得

$$x^y\approx1+\frac{1}{1!}[2(x-1)]$$

$$+\frac{1}{2!}[2(x-1)^2+2\cdot1(x-1)(y-2)]+\frac{1}{3!}[3\cdot3(x-1)^2(y-2)].$$

由上述展开式计算得

$$1.01^{2.2}\approx1+2\times(0.01)+\frac{1}{2!}[2\times0.01^2+2\times0.01\times0.2]$$

$$+\frac{1}{3!}[3\times3\times0.01^2\times0.2]=1.02213.$$

§7. 多元函数的极值

1288. 求函数$z=2xy-3x^2-2y^2+10$的极值.

[解] $\frac{\partial z}{\partial x}=2y-6x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x-4y$.

令$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 解方程组得$x=0$, $y=0$. 驻点为(0, 0). 又$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4$.

$AC-B^2=24-4>0$, $A<0$, $\therefore$ $(0, 0)$为极大值点，极大值为 $z(0, 0)=10$.

［说明］ 利用初等方法，通过恒等变形 $z=10-(x-y)^2-2x^2-y^2$ 也可看出函数的最大值为 10.

1289. 求函数 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 的极值.

［解］ $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y+1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-1$.

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 解方程组得 $x=-1, y=1$. 驻点为 $(-1, 1)$. 又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$.

于是 $AC-B^2=4-1>0$, $A>0$, $\therefore$ $(-1, 1)$ 为极小值点，极小值为 $z(-1, 1)=0$.

1290. 求函数 $z=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi)$的最大值与最小值.

［解］
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)=\sin y\cdot\sin(2x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cdot\cos y\cdot\sin(x+y)+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)=\sin x\cdot\sin(x+2y).$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 在区域 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant\pi$ 内的解为 $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=0$, $y=0$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\sin y\cdot\cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos y\cdot\sin(2x+y)+\sin y\cdot\cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\sin x\cdot\cos(x+2y).$$

在$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$处得 $A=-\sqrt{3}$, $B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $C=-\sqrt{3}$.

$\because$ $AC-B^2=3-\frac{3}{4}>0$, $A<0$, $\therefore$ $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$为函数的极大值点.

又由于 $z=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$ 在闭区域 $x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ x+y\leqslant\pi$ 连续，必有最大值与最小值. 显然 z 在边界上取得最小值0，而 $z\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，即最大值为 $z=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

1291．在曲面 $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$ 上求与平面 $z=0$ 的距离最大的点的坐标.

[分析] 问题实质是求方程 $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$ 定义的隐函数 $z=z(x,\ y)$ 的绝对值 $|z|$ 的最大值.

[解] 对方程 $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$，求关于 x 的导数.

$$4x+4z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2z+2x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+z}{2z+x}.$$

求关于 y 的导数，

$$6y+4z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y}{2z+x}.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 解得 $z=-2x,\ y=0$，代入原方程，得 $x=\pm1$，于是驻点为 $(1,\ 0,\ -2)$、$(-1,\ 0,\ 2)$.

又
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x+z}{2z+x}\right)=\frac{(2z'_x+1)(2x+z)-(2+z'_x)(2z+x)}{(2z+x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x+z}{2z+x}\right)=\frac{3xz'_y}{(2z+x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{3y}{2z+x}\right)=\frac{6yz'_y-3(2z+x)}{(2z+x)^2}.$$

对 $(-1,\ 0,\ 2)$ 点

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,0,2)}=-\frac{2}{3},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0,2)}=0,$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,0,2)}=-1.\quad AC-B^2>0,\ A<0,$$

$\therefore$ $(-1,\ 0,\ 2)$ 是极大值点，极大值是 $z(-1,\ 0)=2$.

对 $(1,\ 0,\ -2)$ 点

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0,-2)}=\frac{2}{3},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0,-2)}=0,$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0,-2)}=1.\quad AC-B^2>0,\ A>0,$$

$\therefore$ (1, 0, −2)是极小值点，极小值是 $z(1,0)=-2$. 得曲面到 $z=0$ 的最大距离为 2.

1292. 试讨论函数 $f(x,y)=e^{x^2-y}(3+2x-y)$ 的极值.

［解］ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2-y}(6x+4x^2-2xy+2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2-y}(y-2x-4)$.

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, 解得函数唯一的驻点(1, 6).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x^2-y}(8x^3+12x^2-4x^2y+12x-2y+6),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{x^2-y}(-4x^3+2xy-8x-2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{x^2-y}(2x-y+5).$$

得

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(1,6)}=2e^{-5}, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bigg|_{(1,6)}=-2e^{-5},\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(1,6)}=e^{-5}.$$

$\because$ $AC-B^2=2e^{-10}-4e^{-10}<0$. 所以 $f(x,y)$ 无极值点.

1293. 讨论函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$ 在点 (0, 0), (1, 1)是否有极值.

［解］ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x(y+2x^2y-3x^4)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-x^2-x^4$,

可知(0, 0)和(1, 1)都是驻点. 又,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=30x^4-12x^2y-2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x-4x^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

(1) 在点(0, 0)处

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

有 $AC-B^2=0$. 为判断(0, 0)是否极值点，需对函数继续进行讨论：由函数的表达式可以看出在(0, 0)点的邻域内，(0, 0)点并不满足 $f(x,y)>f(0,0)$ (或 $f(x,y)<f(0,0)$)这样的条件，故(0, 0)点不是函数的极值点.

(2) 在(1, 1)处

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=16,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

$AC-B^2=32-36<0$, $\therefore$ (1, 1)点不是函数的极值点.

1294. 在已知周长为 $2p$ 的三角形中，求面积的最大值.

［解］ 设三角形的边长为 x, y, z, 面积为 S. 则

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

已知 $x+y+z=2p$, 于是 $S^2=p(p-x)(p-y)(x+y-p)$.

问题归结为求 $F(x, y)=p(p-x)(p-y)(x+y-p)$ 的极值.

解方程组
$$\begin{cases} F'_x=p(p-y)(2p-2x-y)=0, \\ F'_y=p(p-x)(2p-x-2y)=0. \end{cases}$$

注意到 x, y 的取值范围是 $0<x, y<p, x+y>p$. 得驻点为 $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$.

又

$$F''_{xx}=-2p(p-y), \quad F''_{xy}=p[2(x+y)-3p], \quad F''_{yy}=-2p(p-x).$$

将 $x=y=\frac{2p}{3}$ 代入得

$$A=-\frac{2}{3}p^2, \quad B=-\frac{1}{3}p^2, \quad C=-\frac{2}{3}p^2. \quad \therefore AC-B^2=\frac{1}{3}p^4>0,$$

$A=-\frac{2}{3}p^2<0$, $\therefore \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$ 为闭区域内唯一的极大值点.

于是 $$S_{\max}=\sqrt{p\left(p-\frac{2}{3}p\right)\left(p-\frac{2}{3}p\right)\left(\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}p-p\right)}=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

此时三角形是等边三角形.

1295. 经过点(1, 3, 6)的所有平面中，哪一个平面与三个坐标平面所围的四面体的体积最小.

［解］ 经过点(1, 3, 6)的平面方程为 $A(x-1)+B(y-3)+C(z-6)=0$, 即 $Ax+By+Cz=A+3B+6C$. 若平面与三个坐标平面围成立体，则 $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, A+3B+6C\neq 0$. 平面与三坐标轴截距为

$$\frac{A+3B+6C}{A}, \quad \frac{A+3B+6C}{B}, \quad \frac{A+3B+6C}{C}.$$

于是平面与三个坐标平面围成的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\left|\frac{(A+3B+6C)^3}{ABC}\right|$$

设 $$U=\frac{1}{6}\cdot\frac{(A+3B+6C)^3}{ABC},$$

$$\frac{\partial V}{\partial A}=\frac{(A+3B+6C)^2(2A-3B-6C)}{6A^2BC}\cdot \operatorname{sgn} U,$$

$$\frac{\partial V}{\partial B}=\frac{(A+3B+6C)^2(-A+6B-6C)}{6AB^2C}\cdot\operatorname{sgn}U,$$

$$\frac{\partial V}{\partial C}=\frac{(A+3B+6C)^2(-A-3B+12C)}{6ABC^2}\cdot\operatorname{sgn}U.$$

令 $\frac{\partial V}{\partial A}=\frac{\partial V}{\partial B}=\frac{\partial V}{\partial C}=0$，得

$$\begin{cases}2A-3B-6C=0,\\ -A+6B-6C=0,\\ -A-3B+12C=0.\end{cases}$$

由方程组解得 $A:B:C=6:2:1$，又平面过 $(1, 3, 6)$ 点，因此平面方程为 $6x+2y+z=18$. 再由问题本身知道必存在所要求的平面，因此这一平面就是 $6x+2y+z=18$.

1296. 给定点 $A(0, 0, 12)$、$B(0, 0, 4)$、$C(8, 0, 8)$，在 xOy 平面上求 D 点，使过 A, B, C, D 的球半径最小.

[解] 设球面 $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2$ 过 A、B、C 三点，将 A、B, C 三点坐标分别代入球面方程得

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2+(12-\zeta)^2=R^2 & \cdots① \\ \xi^2+\eta^2+(4-\zeta)^2=R^2 & \cdots② \\ (8-\xi)^2+\eta^2+(8-\zeta)^2=R^2 & \cdots③\end{cases}$$

①－②得 $(12-\zeta)^2-(4-\zeta)^2=0,\ \zeta=8.$

②－③得 $\xi^2+16-(8-\xi)^2=0,\ \xi=3.$

于是 $(x-3)^2+(y-\eta)^2+(z-8)^2=R^2$. 将 ξ 和 ζ 代入①式得关系式 $R^2=25+\eta^2$. 不妨考虑 $\eta>0$ 的情况. 在 xOy 平面内 D 点坐标为 $(x, y, 0)$，则 D 点到球心 $(3, \eta, 8)$ 的距离平方为(即半径平方)

$$u=(x-3)^2+(y-\eta)^2+64,\ u=(x-3)^2+(y-\sqrt{u-25})^2+64.$$

求隐函数 $u=u(x, y)$ 的极值. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-3)-(y-\sqrt{u-25})\frac{u'_x}{\sqrt{u-25}}.$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2(x-3)\sqrt{u-25}}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2(y-\sqrt{u-25})\cdot\left[1-\frac{u'_y}{2\sqrt{u-25}}\right].$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(y-\sqrt{u-25})\cdot\sqrt{u-25}}{y}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，得 $x=3$，$y-\sqrt{u-25}=0$，$\therefore\ y=\sqrt{39}$．得驻点为 $(3,\sqrt{39},0)$．同理，$\eta<0$ 时，驻点为 $(3,-\sqrt{39},0)$．

由题意得 D 点为 $(3,\sqrt{39},0)$ 和 $(3,-\sqrt{39},0)$ 时球面半径最小，最小值为 8.

［说明］ 从 $u=(x-3)^2+(y-\sqrt{u-25})^2+64$，即可看出，$x=3$，$y=\sqrt{u-25}$ 时，u 取最小，$u=64$．即半径最小为 8.

1297．**设平面上有 n 个质量为 m_i 的质点 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，在平面上求一点 $M(x,y)$，使 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 对 M 点的转动惯量最小．**

［解］ n 个质点对 $M(x,y)$ 的转动惯量为
$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2].$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}m_i(x-x_i),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}m_i(y-y_i).$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，解得
$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad y=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

又
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\sum_{i=1}^{n}m_i,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\sum_{i=1}^{n}m_i,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

$AC-B^2=4\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)^2>0$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$．
$$\therefore\quad M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\right)$$
为 $f(x,y)$ 的极小值点．再由问题本身知道
$$M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\right)$$

为 $f(x, y)$ 的最小值点.

［说明］ M 点事实上是 n 个质点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的重心.

1298. 给定 n 个点 $A_1(x_1, y_1, z_1), \cdots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. 在 xOy 平面上求一点 P, 使 P 到 n 个点距离平方之和为最小.

［解］ 设 P 点坐标为 $(x, y, 0)$, 则 P 到 A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的距离平方之和为

$$f(x, y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+z_i^2].$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}2(y-y_i).$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 解方程组得 $x=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, $y=\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$. 驻点为 $P\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}, 0\right)$

又 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2n,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2n.$$

$\because AC-B^2=4n^2>0$, $A>0$, $\therefore P\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}, 0\right)$为所求的点.

1299. 已知 $u=ax^2+by^2+cz^2$ $(a, b, c>0)$, 求在条件 $x+y+z=1$ 下的极小值.

［解］ 利用拉格朗日乘数法. 令 $L(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2+\lambda(x+y+z-1)$.

解下面方程组:

$$\begin{cases} L'_x=2ax+\lambda=0\\ L'_y=2by+\lambda=0\\ L'_z=2cz+\lambda=0\\ x+y+z-1=0. \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} 2abcx+bc\lambda=0\\ 2abcy+ca\lambda=0\\ 2abcz+ab\lambda=0\\ x+y+z-1=0. \end{cases}$$

将上述前三式相加, $\therefore\ \lambda=-\frac{2abc}{ab+bc+ca}$.

再解出 $x=\frac{bc}{ab+bc+ca}$, $y=\frac{ca}{ab+bc+ca}$, $z=\frac{ab}{ab+bc+ca}$

得驻点为 $\left(\frac{bc}{ab+bc+ca}, \frac{ca}{ab+bc+ca}, \frac{ab}{ab+bc+ca}\right)$.

由题意得
$$u_{\min}=\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

1300. 求函数 $f(x,\ y)=x^2+12xy+2y^2$ 在区域 $x^2+5y^2\leqslant 1$ 内的最大值.

［解］ $f'_x=2x+12y,\quad f'_y=12x+4y.$

令 $f'_x=f'_y=0$，解方程组得 $x=0,\ y=0$.

$$f''_{xx}=2,\quad f''_{xy}=12,\quad f''_{yy}=4.$$

$AC-B^2=8-144<0$，所以函数在区域内部没有极值. 因此 $f(x,y)$ 在闭区域的最大值必在边界 $x^2+5y^2=1$ 上取得. 问题归结为求 $f(x,y)$ 在 $x^2+5y^2=1$ 条件下的极值问题，由拉格朗日乘数法，

令　　$L(x,\ y)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(x^2+5y^2-1)$.

解方程组：
$$\begin{cases}L'_x=2x+12y+2\lambda x=0,\\ L'_y=12x+4y+10\lambda y=0,\\ x^2+5y^2-1=0.\end{cases}$$

得 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-\dfrac{17}{5}$. 代入上述方程求得极值点为

$$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{15}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right).$$

$$f\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)=-2,\ f\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)=-2,\ f\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{2\sqrt{5}}{15}\right)=\frac{17}{5},$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)=\frac{17}{5}.$$

故得函数 $f(x,\ y)$ 在区域 $x^2+5y^2\leqslant 1$ 上的最大值为 $\dfrac{17}{5}$.

1301. 试求点 $P(3,\ 2,\ 1)$ 到平面 $2x-3y-4z=25$ 的距离.

［解］ 设 $Q(x,y,z)$ 为平面 $2x-3y-4z=25$ 上任意一点，问题化为求 PQ 两点间的距离的最小值. PQ 两点间距离平方为 $d^2=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$，约束条件为 $2x-3y-4z=25$.

由拉格朗日乘数法，令

$$L(x,\ y,\ z)=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+\lambda(2x-3y-4z-25).$$

解方程组
$$\begin{cases}L'_x=2(x-3)+2\lambda=0,\\ L'_y=2(y-2)-3\lambda=0,\\ L'_z=2(z-1)-4\lambda=0,\\ 2x-3y-4z-25=0.\end{cases}$$

由前面 3 式得 $x=-\lambda+3$, $y=\frac{3}{2}\lambda+2$, $z=2\lambda+1$, 代入第 4 式，解得 $\lambda=-2$. 分别再代入前 3 式得 $x=5$, $y=-1$, $z=-3$.

$(5, -1, -3)$为唯一驻点，按题意得 $P(3, 2, 1)$到平面的距离为

$$d=\sqrt{(3-5)^2+(2+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{29}.$$

1302. 求由点$(4, 5)$及点$(6, -3)$至直线 $2x+y=16$ 上的距离平方和为最小的点的坐标.

［解］ 设 $P(x, y)$为直线 $2x+y=16$ 上任意一点.

$$d_1^2=(x-4)^2+(y-5)^2=x^2-8x+16+y^2-10y+25,$$
$$d_2^2=(x-6)^2+(y+3)^2=x^2-12x+36+y^2+6y+9.$$

由拉格朗日乘数法，令

$$L(x, y)=x^2-10x+y^2-2y+43+\lambda(2x+y-16).$$

解方程组
$$\begin{cases}L'_x=2x-10+2\lambda=0,\\ L'_y=2y-2+\lambda=0,\\ 2x+y-16=0.\end{cases}$$

得 $x=5-\lambda$, $y=\frac{1}{2}(2-\lambda)$. 代入最后一个方程，有 $\lambda=-2$. ∴ 驻点为$(7, 2)$. 由问题可得直线上的点$(7, 2)$到$(4, 5)$, $(6, -3)$距离平方和为最小.

1303. 已知 $A(1, 4)$和 $B(3, 0)$是椭圆 $2x^2+y^2=18$ 上给定的两点，在椭圆上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 的面积为最大.

［解］ $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(12-2y-4x).$$

$$S(x, y)=6-y-2x.$$

由拉格朗日乘数法，令 $L(x, y)=6-2x-y+\lambda(2x^2+y^2-18)$. 解方程组

$$\begin{cases}L'_x=-2+4\lambda x=0,\\ L'_y=-1+2\lambda y=0,\\ 2x^2+y^2-18=0.\end{cases}$$

得 $x=\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{2\lambda}$, 代入最后一个方程，有 $\lambda=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$, 解得 $x_1=\sqrt{6}$, $y_1=\sqrt{6}$; $x_2=-\sqrt{6}$, $y_2=-\sqrt{6}$.

经检验，$(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$即是 C 点.

1304. 在平面 $3x+z=0$ 上求一点 P，使 P 点到 $A(1, 1, 1)$ 和 $B(2, 3, 4)$ 距离平方和为最小.

［解］ 设 $P(x, y, z)$为平面 $3x+z=0$ 上任意一点，P 到 A、B 两点距离平方和为 $f(x, y, z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$.

根据拉格朗日乘数法，令 $L(x, y, z)=f(x, y, z)+\lambda(3x+z)$.

解方程组
$$\begin{cases} L'_x=2[(x-1)+(x-2)]+3\lambda=0, & \cdots① \\ L'_y=2[(y-1)+(y-3)]=0, & \cdots② \\ L'_z=2[(z-1)+(z-4)]+\lambda=0, & \cdots③ \\ 3x+z=0. & \cdots④ \end{cases}$$

由前 3 式得 $x=-\frac{3}{4}\lambda+\frac{3}{2},\ y=2,\ z=-\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{2}$.

代入第 4 式得 $\lambda=2.8$，∴ $x=-0.6,\ y=2,\ z=1.8$. 由此得唯一驻点 $P(-0.6, 2, 1.8)$.

按题意 $P(-0.6, 2, 1.8)$到 A、B 两点距离的平方和为最小，最小值为 16.8.

1305. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$ 到 xOy 平面的最短距离.

［解］ 设 $P(x, y, z)$为曲线上的点，则 P 点坐标可表示为 $P(x, y, x^2+y^2)$. 于是 P 点到 xOy 平面的距离为 x^2+y^2. 问题化为求点 P 在条件 $y=x^2+2x-1$ 下，x^2+y^2 的最小值.

由拉格朗日乘数法，令 $L(x, y)=x^2+y^2+\lambda(y-x^2-2x+1)$.

解方程组
$$\begin{cases} L'_x=2x-2\lambda x-2\lambda=0, & \cdots① \\ L'_y=2y+\lambda=0, & \cdots② \\ y-x^2-2x+1=0. & \cdots③ \end{cases}$$

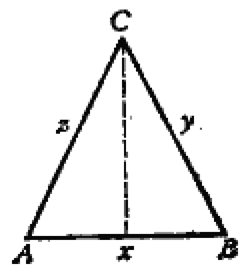
由前 2 式得 $x=\frac{\lambda}{1-\lambda},\ y=-\frac{\lambda}{2}$，代入第 3 式，解得 $\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad x_1=-2,\quad x_{2,3}=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}.$$

由题意经检验得在$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$处$x^2+y^2$取最小值.

∴ 曲线
$$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=x^2+2x-1 \end{cases}$$
到xOy平面的最短距离为$\frac{11-6\sqrt{3}}{4}$.

1306. 在周长为$2p$的三角形中，当三角形绕自己的某一边旋转时，求旋转体体积的最大值.



[解] 如图设三角形各边长为x、y、z，x边上的高为h，三角形绕AB边旋转. 由$\triangle ABC$的面积关系，有$h^2x^2=4p(p-x)(p-y)(p-z)$，

$$h^2=\frac{4p}{x^2}(p-x)(p-y)(p-z).$$

∴ 旋转体的体积$V=\frac{1}{3}\pi h^2x=\frac{4p\pi}{3x}(p-x)(p-y)(p-z)$， 其中$0<x, y, z<2p$，且$x+y+z=2p$.

按照拉格朗日乘数法，令

$$L(x, y, z)=\frac{4p\pi}{3}\frac{1}{x}(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p).$$

解方程组
$$\begin{cases} L'_x=-\frac{4p^2\pi}{3}\frac{(p-y)(p-z)}{x^2}+\lambda=0, & \cdots① \\ L'_y=-\frac{4p\pi}{3}\frac{(p-x)(p-z)}{x}+\lambda=0, & \cdots② \\ L'_z=-\frac{4p\pi}{3}\frac{(p-x)(p-y)}{x}+\lambda=0, & \cdots③ \\ x+y+z-2p=0. & \cdots④ \end{cases}$$

由前3式得

$$\lambda=\frac{4p^2\pi(p-y)(p-z)}{3x^2}, \quad \lambda=\frac{4p\pi(p-x)(p-z)}{3x},$$
$$\lambda=\frac{4p\pi(p-x)(p-y)}{3x}.$$

由前2式得$y=\frac{p^2-xp+x^2}{p}$，同理$z=\frac{p^2-xp+x^2}{p}$. 代入方程组最后一式，解得$x=\frac{p}{2}$，$y=\frac{3p}{4}$，$z=\frac{3p}{4}$.

函数 $V=\frac{4p\pi}{3x}(p-x)(p-y)(p-z)$ 在闭区域上是连续函数，V 有最大值. 由题意知 $\left(\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4}\right)$ 是函数的最大值点，最大值是 $\frac{1}{12}p^3\pi$.

1307. 求点 $P(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 的距离.

［解］ 设 $M(x, y, z)$ 为直线上一点，于是问题化为求

$$d^2=f(x, y, z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$$

在条件 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 下的极小值. M 点在直线上，等价于在 $\begin{cases}x=3z\\2x=3y\end{cases}$ 上.

由拉格朗日乘数法，令

$L(x, y, z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+\lambda(x-3z)+\mu(2x-3y)$.

解方程组
$$\begin{cases}L'_x=2(x-1)+\lambda+2\mu=0,\\L'_y=2(y-2)-3\mu=0,\\L'_z=2(z-3)-3\lambda=0,\\x-3z=0,\\2x-3y=0.\end{cases}$$

由前3式解得

$$x=-\frac{\lambda+2\mu-2}{2},\quad y=\frac{3\mu+4}{2},\quad z=\frac{3\lambda+6}{2}.$$

代入后2式，解得 $\lambda=-\frac{32}{21}$，$\mu=-\frac{8}{21}$，得驻点为 $\left(\frac{15}{7},\frac{10}{7},\frac{5}{7}\right)$.

由此可得 $P(1, 2, 3)$ 到直线的距离平方为 $d^2=f\left(\frac{15}{7},\frac{10}{7},\frac{5}{7}\right)=\frac{336}{49}$.

$$\therefore\quad d=\frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

1308. 求空间两条异面直线之间的距离.

［分析］ 空间两条直线之间的距离，即两直线上的点之间距离的最小值.

［解］ 设两直线的方程分别为

$$L_1:\begin{cases}x=x_1+l_1t\\y=y_1+m_1t\\z=z_1+n_1t,\end{cases}\quad L_2:\begin{cases}x=x_2+l_2s\\y=y_2+m_2s\\z=z_2+n_2s.\end{cases}$$

其中 t、s 为参数. L_1、L_2 上两点之间距离平方为

$$F(t,\ s)=d^2=(x_1+l_1t-x_2-l_2s)^2+(y_1+m_1t-y_2-m_2s)^2+(z_1+n_1t-z_2-n_2s)^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2(x_1+l_1t-x_2-l_2s)\cdot l_1+2(y_1+m_1t-y_2-m_2s)\cdot m_1+2(z_1+n_1t-z_2-n_2s)\cdot n_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}=-[2(x_1+l_1t-x_2-l_2s)\cdot l_2+2(y_1+m_1t-y_2-m_2s)\cdot m_2+2(z_1+n_1t-z_2-n_2s)\cdot n_2].$$

令 $\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial s}=0$, 得

$$\begin{cases}(l_1^2+m_1^2+n_1^2)t-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)s\\ \quad =(x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)m_1+(z_2-z_1)n_1,\\ (l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)t-(l_2^2+m_2^2+n_2^2)s\\ \quad =(x_2-x_1)l_2+(y_2-y_1)m_2+(z_2-z_1)n_2.\end{cases}$$

解得

$$t_0=\frac{\begin{vmatrix}(x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)m_1+(z_2-z_1)n_1 & -(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\\ (x_2-x_1)l_2+(y_2-y_1)m_2+(z_2-z_1)n_2 & -(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}l_1^2+m_1^2+n_1^2 & -(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & -(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)[(x_2-x_1)l_2+(y_2-y_1)m_2+(z_2-z_1)n_2]\\ -(l_2^2+m_2^2+n_2^2)[(x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)m_1+(z_2-z_1)n_1]\end{array}\right\}}{(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2-(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)},$$

$$s_0=\frac{\begin{vmatrix}l_1^2+m_1^2+n_1^2 & (x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)m_1+(z_2-z_1)n_1\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & (x_2-x_1)l_2+(y_2-y_1)m_2+(z_2-z_1)n_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}l_1^2+m_1^2+n_1^2 & -(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & -(l_2^2+m_2^2+n_2^2)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}(l_1^2+m_1^2+n_1^2)[(x_2-x_1)l_2+(y_2-y_1)m_2+(z_2-z_1)n_2]\\ -(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)[(x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)m_1+(z_2-z_1)n_1]\end{array}\right\}}{(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2-(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}.$$

由立体几何知识可知，空间两异面直线距离即是两直线上点之间的最小值．由题意，$(t_0,\ s_0)$ 是 $F(t,\ s)$ 唯一的驻点，且可知 $(t_0,\ s_0)$ 为 $F(t,\ s)$ 的最小值点．于是 $L_1,\ L_2$ 之间的距离为：

$$F_{\min}=F(t_0,\ s_0)=(x_1+l_1t_0-x_2-l_2s_0)^2+(y_1+m_1t_0-y_2-m_2s_0)^2+(z_1+n_1t_0-z_2-n_2s_0)^2.$$

注意到两条异面直线的距离是异面直线公垂线 L 夹在与 L_1、L_2 交点间线段之长. 而且 $L\perp L_1$, $L\perp L_2$.

由异面直线的方向数为 $[(x_1+l_1t_0-x_2-l_2s_0),\ (y_1+m_1t_0-y_2-m_2s_0),\ (z_1+n_1t_0-z_2-n_2s_0)]$.

$\therefore$ $[(x_1+l_1t_0-x_2-l_2s_0),\ (y_1+m_1t_0-y_2-m_2s_0),\ (z_1+n_1t_0-z_2-n_2s_0)]\cdot(l_1,\ m_1,\ n_1)=0$, $[(x_1+l_1t_0-x_2-l_2s_0),\ (y_1+m_1t_0-y_2-m_2s_0),\ (z_1+n_1t_0-z_2-n_2s_0)]\cdot(l_2,\ m_2,\ n_2)=0$.

整理得

$$F(t_0,\ s_0)=\left|\frac{[(x_1-x_2)(m_1n_2-n_1m_2)+(y_1-y_2)(n_1l_2-n_2l_1)+(z_1-z_2)(l_1m_2-l_2m_1)]^2}{(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2-(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}\right|.$$

$\therefore$ 异面直线的距离

$$d=\frac{\begin{vmatrix}(x_1-x_2) & (y_1-y_2) & (z_1-z_2)\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2}}.$$

1309. **过椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上任意点作椭圆的切线. 求切线与坐标轴所围成的三角形面积的最小值.**

[解] 设 $P(x_0,\ y_0)$为椭圆上任意一点,则切线方程为

$$3xx_0+(y_0x+x_0y)+3yy_0=1.$$

分别令 $y=0$ 与 $x=0$, 得切线与两坐标轴的交点

$$x=\frac{1}{3x_0+y_0},\quad y=\frac{1}{3y_0+x_0}.$$

于是切线与坐标轴所围的三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}|xy|=\frac{1}{2|(3x_0+y_0)(3y_0+x_0)|}.$$

问题归结为求$(3x+y)(3y+x)$在条件 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 下的极值.

由拉格朗日乘数法,令

$$F(x,\ y)=(3x+y)(3y+x)+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1).$$

$$\begin{cases}F'_x=6x+10y+6\lambda x+2\lambda y=0 & \cdots①\\ F'_y=10x+6y+6\lambda y+2\lambda x=0 & \cdots②\\ 3x^2+2xy+3y^2-1=0 & \cdots③\end{cases}$$

由方程 ①、② 有 $(3\lambda+3)x+(5+\lambda)y=0$，$(5+\lambda)x+(3+3\lambda)y=0$.

$$\frac{x}{y}=-\frac{5+\lambda}{3\lambda+3}=-\frac{3+3\lambda}{5+\lambda},\quad 得\quad \lambda^2+\lambda-2=0.$$

解得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$.

分别代入方程，解得 $x+y=0$, $x-y=0$. 分别与方程 ③ 联立，得：

$$x_1=\frac{1}{2},\ y_1=-\frac{1}{2};\quad x_2=-\frac{1}{2},\quad y_2=\frac{1}{2};$$

$$x_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\quad y_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{4};\quad x_4=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad y_4=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

于是极值点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$、$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

在 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 与 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 点处，$S=\frac{1}{2}$.

在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 与 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 点处，$S=\frac{1}{4}$.

∴　椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 的切线与坐标轴围成三角形面积最小值为 $\frac{1}{4}$.

1310．**旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+2y+3z=10$ 截成一个椭圆．求坐标轴原点到椭圆的最远点和最近点．**

［解］　设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，表示原点到 $P(x,y,z)$ 点距离平方．因为 $P(x,y,z)$ 既在 $z=x^2+y^2$ 上，又在 $x+2y+3z=10$ 上．故令

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+2y+3z-10).$$

解方程组

$$\begin{cases} L'_x=2x-2\lambda x+\mu=0 & \cdots① \\ L'_y=2y-2\lambda y+2\mu=0 & \cdots② \\ L'_z=2z+\lambda+3\mu=0 & \cdots③ \\ z-x^2-y^2=0 & \cdots④ \\ x+2y+3z-10=0 & \cdots⑤ \end{cases}$$

①×y－②×x，得 $\mu(y-2x)=0$.

若 $\mu=0$ 则方程组为矛盾方程组．故得 $y=2x$．代入 ④、⑤ 有

$$z=5x^2,\quad x+4x+15x^2-10=0,\quad 3x^2+x-2=0.$$

解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{2}{3}$．∴　驻点为 $(-1,-2,5)$、$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{20}{9}\right)$.

由问题本身可知最小值点为$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{9}\right)$, $f_{\min}=\frac{580}{81}$. 最大值点为$(-1, -2, 5)$, $f_{\max}=30$.

1311. 在椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的内接长方体中，求体积的最大值.

[解] 设长方体在第一卦限内的一个顶点为(x, y, z)，则长方体的体积为$V=8xyz$其中x, y, z满足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

由拉格朗日乘数法，令$F(x, y, z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$.

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz+\lambda\frac{2x}{a^2}=0 & \cdots① \\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz+\lambda\frac{2y}{c^2}=0 & \cdots② \\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy+\lambda\frac{2z}{c^2}=0 & \cdots③ \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 & \cdots④,\end{cases}$$

①$\times x+$②$\times y+$③$\times z$: $3xyz+2\lambda=0$, $\lambda=-\frac{3}{2}xyz$.

代入①，得$yz-\frac{3}{2}xyz\cdot\frac{2x}{a^2}=0$, $\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

代入②，得$xz-\frac{3}{2}xyz\cdot\frac{2y}{b^2}=0$, $\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}b$,

代入③，得$xy-\frac{3}{2}xyz\cdot\frac{2z}{c^2}=0$, $\therefore z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$,

得唯一驻点$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$. 由题意得体积的最大值

$$V_{\max}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$$

1312. 求旋转椭球面$\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$到平面$3x+4y+12z=288$的最近和最远距离.

[解一] 设$P(x, y, z)$为旋转椭球面上任意一点，它到平面$3x+4y+$

$12z=288$ 的距离为 $d=\dfrac{|3x+4y+12z-288|}{13}$.

由拉格朗日乘数法，令

$$L(x,y,z)=\frac{(3x+4y+12z-288)^2}{169}+\lambda\left(\frac{x^2}{96}+y^2+z^2-1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} L'_x=\dfrac{6(3x+4y+12z-288)}{169}+\dfrac{x}{48}\lambda=0 & \cdots① \\ L'_y=\dfrac{8(3x+4y+12z-288)}{169}+2\lambda y=0 & \cdots② \\ L'_z=\dfrac{24(3x+4y+12z-288)}{169}+2\lambda z=0 & \cdots③ \\ \dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2-1=0 & \cdots④, \end{cases}$$

①×4－②×3，$\lambda\left[\dfrac{1}{12}x-6y\right]=0$　得 $x=72y$.

①×4－③，$\lambda\left[\dfrac{1}{12}x-2z\right]=0$　得 $x=24z$.

将 $x=72y$, $z=\dfrac{1}{24}x=3y$ 代入④　得 $64y^2=1$,

$$\therefore\quad y=\pm\frac{1}{8},\ x=\pm 9,\ z=\pm\frac{3}{8}.$$

解得驻点为 $\left(9,\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8}\right)$、$\left(-9,-\dfrac{1}{8},-\dfrac{3}{8}\right)$.

由题意得椭球面上距平面最近点为 $\left(9,\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8}\right)$, $d_{最近}=19\dfrac{9}{13}$. 椭球面上距平面最远点为 $\left(-9,-\dfrac{1}{8},-\dfrac{3}{8}\right)$, $d_{最远}=24\dfrac{8}{13}$.

［解二］　设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为椭球面上任意一点，过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为 $\dfrac{xx_0}{96}+yy_0+zz_0=1$，由切平面必须平行于平面 $3x+4y+12z=288$ 才是与平面有最远(或最近)的距离，故 $\dfrac{x_0}{96}:y_0:z_0=3:4:12$，得 $x_0=72y_0$, $z_0=3y_0$. 又 $P(x_0,y_0,z_0)$ 在椭球上，代入得 $y_0^2=\dfrac{1}{64}$，$y_0=\pm\dfrac{1}{8}$, $x_0=\pm 9$, $z_0=\pm\dfrac{3}{8}$. 再将 x_0, y_0 代入平面的距离公式

$$d=\frac{|3x+4y+12z-288|}{13},$$

故得椭球上离平面最近点为$\left(9,\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\right)$. $d_{最近}=19\frac{9}{13}$. 椭球上离平面最远点为$\left(-9,\ -\frac{1}{8},\ -\frac{3}{8}\right)$, $d_{最远}=24\frac{8}{13}$.

1313. 已知 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n>0$,

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k,$$

若 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$. 求 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$的最大值.

〔解〕 由于 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 显然在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1$ 范围内函数无极值. 于是极值在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 内考虑.

由拉格朗日乘数法,令

$$L(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)+\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1).$$

解方程组
$$\begin{cases}L'_{x_1}=a_1+2\lambda x_1=0\\L'_{x_2}=a_2+2\lambda x_2=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\L'_{x_n}=a_n+2\lambda x_n=0\\x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1=0.\end{cases}$$

将前 n 个方程分别乘 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$相加

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k+2\lambda=0 \qquad \cdots①$$

将前 n 个方程分别乘 $a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$相加

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=0 \qquad \cdots②$$

由①得 $\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=-2\lambda$, 代入②有

$$\lambda=\pm\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

∴驻点为 $\left(\pm\frac{a_1}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \pm\frac{a_2}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots,\ \pm\frac{a_n}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

按题意最大值由驻点代入得

$$f_{\max}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1314. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$. 求: $x_1\cdot x_2\cdots x_n$ 的最大值

[解] 利用拉格朗日乘数法,令

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1\cdot x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a).$$

解方程组
$$\begin{cases} L'_{x_1}=x_2\cdot x_3\cdots x_n+\lambda=0 \\ L'_{x_2}=x_1\cdot x_3\cdots x_n+\lambda=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L'_{x_n}=x_1\cdot x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0. \end{cases}$$

得
$$\lambda=-\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_n}{x_1}=-\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_n}{x_2}=\cdots=-\frac{x_1\cdot x_2\cdots x_n}{x_n}.$$

$$\therefore\quad x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}.$$

按题意得 $x_1\cdot x_2\cdots x_n$ 的最大值为 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

[说明] 本题表明当 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$ 时, 有 $x_1\cdot x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

整理得
$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

即算术平均大于或等于几何平均. 这是一个著名的不等式.

1315. 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>1$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$, 求: $x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 的最大值.

[解] 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 由拉格朗日乘数法,令

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a).$$

解方程组
$$\begin{cases} L'_{x_1}=\frac{\alpha_1}{x_1}\cdot f+\lambda=0 \\ L'_{x_2}=\frac{\alpha_2}{x_2}\cdot f+\lambda=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L'_{x_n}=\frac{\alpha_n}{x_n}\cdot f+\lambda=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0. \end{cases}$$

将前 n 个方程分别乘 x_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 相加 $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)f+\lambda a=0$,

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}{a}\cdot f.$$

于是驻点为

$$\left[\frac{a\alpha_1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k},\ \frac{a\alpha_2}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k},\ \cdots,\ \frac{a\alpha_n}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right].$$

由题意得 $$f_{最大}=\left(\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right)^{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\cdot\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}.$$

［说明］ 本题是上题的更一般的形式.

1316. 求函数 $u=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2$ 的最大值与最小值,其中点 (x, y, z) 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上(且 $a>b>c>0$).

［解］ 按拉格朗日乘数法,令

$$L(x, y, z)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

解方程组

$$\begin{cases}L'_x=2a^2x-4ax(ax^2+by^2+cz^2)+2\lambda x=0 & \cdots①\\ L'_y=2b^2y-4by(ax^2+by^2+cz^2)+2\lambda y=0 & \cdots②\\ L'_z=2c^2z-4cz(ax^2+by^2+cz^2)+2\lambda z=0 & \cdots③\\ x^2+y^2+z^2-1=0 & \cdots④.\end{cases}$$

因为 $a>b>c>0$, 故

$$\begin{cases}a^2-2a(ax^2+by^2+cz^2)+\lambda=0\\ b^2-2b(ax^2+by^2+cz^2)+\lambda=0\\ c^2-2c(ax^2+by^2+cz^2)+\lambda=0.\end{cases}$$

由 a, b, c 互不相等,故无解. 因此考虑由 ① 得 $x=0$ 的情况.

(i) 若 $y=0$, 则由 ④ 得 $z=\pm1$.

(ii) 若 $y\neq0$, 则由 ② 得

$$2b^2-4b(by^2+cz^2)+2\lambda=0 \qquad \cdots⑤,$$

由 ③ 得

$$2c^2-4c(by^2+cz^2)+2\lambda=0 \qquad \cdots⑥,$$

⑤ − ⑥ 得 $$\frac{(b+c)}{2}=by^2+cz^2,$$

与 ④ 式联立, $1=y^2+z^2$.

解得
$$z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是方程组的解是 $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由对称性,得驻点是

$$(1,0,0),\ (-1,0,0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$
$$(0,1,0),\ (0,-1,0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

由题意,将上列驻点代入
$$u=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2,$$
推得最大值点为
$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0,\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

最大值为
$$u_{\max}=\frac{1}{4}(a-c)^2.$$

最小值点为 $(0,0,\pm1)$, $(0,\pm1,0)$, $(\pm1,0,0)$.

最小值为 $u_{\min}=0$.

第八章　重积分、曲线积分和曲面积分

1　二重积分的概念

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上的某个可求面积的闭区域 D 上有定义. 用平行于 y 轴的直线 $x=x_0$, $x=x_1$, …, $x=x_k$ 和平行于 x 轴的直线 $y=y_0$, $y=y_1$, …, $y=y_m$ 将 D 划分为 D_1, D_2, …, D_k, 记此划分为 P, 并记每一个 D_i 的直径 $\|P\|$ 是

$$d_i=\sup_{x, y\in D_i}\{|x-y|\},\ \|P\|=\max_{i=1,2,\cdots,k}\{d_i\},$$

D_i 的面积是 $|D_i|$. 在每一个 D_i 内任意取一点 $M_i=(\xi_i, \eta_i)$, 如果下列极限存在

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(M_i)|D_i|=I$$

I 是某一实数, 并且这一极限与划分 P 无关, 也与 M_i 在 D_i 内的选取无关, 则称 I 是函数 f 在 D 上的二重积分, 记为 $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$, 即

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(M_i)|D_i|=\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy.$$

这时又称 $f(x, y)$ 在 D 可积(黎曼可积). 若函数 $f(x, y)$ 在可求面积的闭区域 D 上连续,则 $f(x, y)$ 在 D 可积

最常用的基本性质有

(1) 设 f, g 都在 D 可积, α, β 是两个常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 也在 D 可积,并且有

$$\iint_D (\alpha f+\beta g)dx\,dy=\alpha\iint_D f\,dx\,dy+\beta\iint_D g\,dx\,dy.$$

(2) 设 f 在 D 可积，则 $|f|$ 也在 D 可积，并且有

$$\left|\iint_D f\,dx\,dy\right|\leqslant\iint_D |f|\,dx\,dy.$$

2. 二重积分的计算

设区域 $D=\{(x, y)\,|\,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$，其中 y_1 和 y_2 都是 $[a, b]$ 上的连续函数. 又设 f 在 D 连续，则二重积分可以化为下列先对 y 后对 x 的累次积分来计算:

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

设区域 $D=\{(x, y)\,|\,x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\}$，其中 x_1 和 x_2 都是 $[c, d]$ 上的连续函数. 又设 f 在 D 连续，则二重积分可以化为下列先对 x 后对 y 的累次积分来计算.

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx.$$

二重积分的变量代换　设 f 在 D 可积，代换 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 是正则的，即它是一一对应的，并且 x 和 y 都有关于 u, v 的连续偏导数，其雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

在 D 内无零点. 则

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy=\iint_{D'} f(x(u, v),\ y(u, v))\,|J|\,du\,dv.$$

其中 D' 是区域 D 在坐标 (u, v) 下的表示.

特别，在极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下，有

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$

3．广义二重积分

(1) 收敛和发散的概念 无界区域上的广义二重积分．设 D 是一个无界区域，$\{D_n\}$ 是 D 的任意一列可求面积的子区域，并且 $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n=D$．又设函数 f 在每一个 D_n 上可积．定义

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} f(x,\ y)dx\,dy \quad (\text{若极限存在}).$$

则称广义二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy$ 收敛．如果上述极限不存在，则称 $\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy$ 发散．

无界函数的广义二重积分 设 D 是可求面积的区域，$M_0(x_0,y_0)\in D$，M_0 是函数 f 的奇点．又设 $\{D_n\}$ 是 D 内一列可求面积的子区域，每一个 D_n 的内部都含有 M_0，并且 $D_1\supset D_2\supset\cdots\supset D_n\supset\cdots$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n=\{M_0\}$，再设 f 在 $D-D_n$ 上可积，定义

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D-D_n} f(x,\ y)dx\,dy \quad (\text{若极限存在}).$$

则称无界函数的广义二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy$ 收敛．如果上述极限不存在，则称 $\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy$ 发散．

不论是无界区域上的广义二重积分还是无界函数的广义二重积分，$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dx\,dy$ 和 $\iint\limits_{D}|f(x,\ y)|dx\,dy$ 是同时收敛和同时

发散的.

(2) 判别法　无界区域上的广义二重积分　设 D 和 f 都如前面 (1) 所说. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x, y)\in D$. 如果对充分大的 r 有

$$|f(x, y)|\leqslant\frac{c}{r^\alpha}\quad (c\text{ 是常数})$$

并且 $\alpha>2$, 则广义二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 收敛. 如果 D 内含有一个扇形区域: $\{(\theta, r)|\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, r\geqslant r_0\}(\alpha<\beta)$, 并且当 r 充分大时有

$$|f(x, y)|\geqslant\frac{c}{r^\alpha}\quad (c\text{ 是常数})$$

其中 $\alpha\leqslant2$, 则广义二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 发散.

无界函数的广义二重积分　设 D 和 f 都如上面(1)所说, $M_0(x_0, y_0)$是 f 的奇点. 令 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $(x, y)\in D$, 如果在 M_0 的某一邻域 O 内有

$$|f(x, y)|\leqslant\frac{c}{r^\alpha},\quad (x, y)\in O-\{M_0\}\quad (c\text{ 是常数}),$$

并且 $\alpha<2$, 则广义二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 收敛. 如果 D 内含有一个以 M_0 为顶点的扇形区域, 并且

$$|f(x, y)|\geqslant\frac{c}{r^\alpha},\quad (x, y)\in O-\{M_0\}\quad (c\text{ 是常数}),$$

其中 $\alpha\geqslant2$, 则广义二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 发散.

4. 三重积分

其概念、基本性质、累次积分公式都与二重积分相仿, 所不同的有

(1) 变量代换　设 $x=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$ 是正则代换，雅可比行列式是

$$J=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix},$$

则

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{D'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|du\,dv\,dw.$$

其中 D' 是 D 在坐标 (u, v, w) 下的表示. 特别的

柱面坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z(r\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, -\infty<z<+\infty)$, 则

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dr\,d\theta\,dz.$$

球面坐标代换　$x=r\cos\theta\sin\varphi$,　$y=r\sin\theta\sin\varphi$,　$z=r\cos\varphi$ $(r\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$, 则

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{D'} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

(2) 广义三重积分的判别法　无界区域上的广义三重积分，参见广义二重积分. 不同的是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 当 $\alpha>3$ 时广义积分收敛，当 $\alpha\leqslant 3$ 时广义积分发散.

无界函数的广义三重积分　参见广义二重积分，不同的是设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 f 的奇点，

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

当 $\alpha<3$ 时广义积分收敛，当 $\alpha\geqslant 3$ 时广义积分发散.

5．重积分的应用

(1) 体积　设柱体的底是 $z=0$ 平面上可求面积的区域 D，上顶是连续的曲面 $z=f(x, y)$，则此柱体的体积是

$$V=\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy.$$

(2) 平均值　设 D 是平面上可求面积的区域，f 是 D 上的可积函数，则 f 在 D 上的平均值是

$$M(f)=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy \quad (|D| \text{ 是 } D \text{ 的面积}).$$

(3) 质量　设 D 是空间可求体积的区域，带有密度 $\rho(x, y, z)$，则 D 的质量是

$$m=\iiint\limits_D f(x, y, z)dx\,dy\,dz.$$

(4) 重心　设 D 如同 (3) 中所说，则 D 的重心 (ξ, η, ζ) 是

$$\xi=\frac{1}{m}\iiint\limits_D x\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

$$\eta=\frac{1}{m}\iiint\limits_D y\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz \qquad (m \text{ 是 } D \text{ 的质量}).$$

$$\zeta=\frac{1}{m}\iiint\limits_D z\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

(5) 转动惯量　设 D 如同 (3) 中所说，则 D 关于坐标平面 xOy, yOz, zOx 的转动惯量分别是

$$I_{xy}=\iiint\limits_D \rho z^2\,dx\,dy\,dz,\quad I_{yz}=\iiint\limits_D \rho x^2\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_D \rho y^2\,dx\,dy\,dz.$$

D 关于 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量分别是

$$I_x=\iiint_D \rho(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y=\iiint_D \rho(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint_D \rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

(6) 引力 设 D 如同(3)中所说, 又设一质量为 m 的质点位于(x_0, y_0, z_0), 则 D 对该质点的引力在三个坐标轴上的投影分别为

$$f_x=km\iiint_D \rho\,\frac{x-x_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$f_y=km\iiint_D \rho\,\frac{y-y_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$f_z=km\iiint_D \rho\,\frac{z-z_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz,$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

k 是引力常数.

6. 曲线积分

(1) 第一类曲线积分 设 C 是光滑曲线,其方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. 又设 f 是定义在 C 上的连续函数, ds 是 C 的弧长微分,则第一类曲线积分是

$$\int_C f(x, y, z)ds=\int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t))\times\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

(2) 第二类曲线积分 设 C 如同 (1) 中所说, 并且给定了 C 的方向, 例如 C 的方向是以 C 上某一端点 A 为起点, 另一端点

B 为终点，又设当 t 从 t_0 变化到 t_1 时与曲线 C 的方向一致，即 t_0 对应 A 点而 t_1 对应 B 点．再设函数 P, Q, R 在 C 上连续，则第二类曲线积分是

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{t_0}^{t_1}[P(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t)$$
$$+Q(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t)$$
$$+R(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t)]dt.$$

(3) 曲线积分的应用

(i) 质量　设光滑曲线 C 的密度为 ρ, 则 C 的质量是

$$m=\int_C \rho\,ds.$$

(ii) 重心　设光滑曲线 C 的密度是 ρ, 则 C 的重心 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 是

$$\xi=\frac{1}{m}\int_C x\rho\,ds,\quad \eta=\frac{1}{m}\int_C y\rho\,ds,$$
$$\zeta=\frac{1}{m}\int_C z\rho\,ds,\ (m\text{ 是 }C\text{ 的质量}).$$

(iii) 引力　设光滑曲线 C 的密度是 ρ, 又设一质量为 m 的质点位于 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则曲线 C 对该质点的引力在三个坐标轴上的投影分别为

$$f_x=km\int_C \rho\,\frac{x-x_0}{r^3}\,ds,\ f_y=km\int_C \rho\,\frac{y-y_0}{r^3}\,ds,$$
$$f_z=km\int_C \rho\,\frac{z-z_0}{r^3}\,ds,$$
$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

k 是引力常数．

(iv) 功　在力场 $\boldsymbol{f}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的作用下，单位质点沿光滑曲线 C 从 A 位移到 B, 则力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功是

$$W=\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz,\ \text{方向从}\ A\ \text{到}\ B.$$

7．曲面积分

(1) 第一类曲面积分设 S 是一光滑曲面，其方程是 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, $(u, v)\in D$. 又设 f 是定义在 S 上的连续函数，dS 是曲面 S 的面积元素，则第一类曲面积分是

$$\iint_S f(x, y, z)dS=\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\times\sqrt{EG-F^2}\,dS,$$

其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$

$$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v,$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

特别，若 S 的方程为 $z=z(x, y)$, $(x, y)\in D$, 则

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS=\iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy.$$

(2) 第二类曲面积分　设 S 是一光滑曲面，预先选定了一侧，即选定了法方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 又设 P、Q、R 是定义在 S 上的连续函数，则第二类曲面积分是

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

若 S 的方程是 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, $(u, v)\in D$, 则

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\pm\iint_D P(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))A\,du\,dv$$

$$\pm\iint_D Q(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))B\,du\,dv$$

$$\pm\iint_D R(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))C\,du\,dv.$$

其中　　$A=\dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)},\quad B=\dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)},\quad C=\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}.$

右端三个二重积分前的符号由曲面 S 的侧所确定.

8. 格林公式、高斯公式、斯托克斯公式

格林公式　设平面区域 D 的边界 C 由逐段光滑曲线组成，C 的方向是逆时针方向，函数 P、Q 在 D 有连续的偏导数，则

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

高斯公式　设空间区域 D 的边界 S 由逐片光滑曲面组成，S 的法向量是外法向（相对于 D 而言），又设函数 P, Q, R 在 D 有连续偏导数，则

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

斯托克斯公式　设光滑曲面 D 的边界 C 由逐段光滑曲线组成，D 与 C 的方向服从右手联系法则，函数 P、Q、R 在 D 连续，则

$$\int_S P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

9. 散度和旋度

散度　设向量场 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则其散度是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

旋度　设向量场 $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则其旋度是

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}\ (\text{或}\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

记 $\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$，则梯度　$\operatorname{grad}f=\nabla f$，

散度　$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}$，旋度　$\operatorname{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$.

§1. 重 积 分

(1) 二 重 积 分

1317. 求下列二次积分:

(1) $\int_0^a dx\int_0^b xy^2\,dy$; (2) $\int_0^2 dx\int_0^1 (x+y)\,dy$;

(3) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} y^2\,dx$; (4) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} x^2\,dy$;

(5) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy$;

(6) $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2-x^2-y^2)\,dy \quad (a>0)$.

［解］ (1) $\int_0^a dx\int_0^b xy^2\,dy=\int_0^a x\,dx\int_0^b y^2\,dy$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^a\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^b=\frac{a^2b^3}{6}.$$

(2) $\int_0^2 dx\int_0^1 (x+y)\,dy=\int_0^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2=3.$$

(3) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} y^2\,dx=\int_0^1 y^2x\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}dy=\int_0^1 (2y^2-y^3-y^{\frac{5}{2}})\,dy$

$$=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{y^4}{4}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{11}{84}.$$

(4) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} x^2\,dy=\int_0^1 x^2y\Big|_{x^2}^{2-x}dx=\int_0^1 (2x^2-x^3-x^4)\,dx$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{13}{60}.$$

(5) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{x^2}^{x}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)\,dx$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{40}.$$

(6) $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-x^2-y^2)dy=\int_0^a\left[(a^2-x^2)y-\frac{y^3}{3}\right]\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt$（令 $x=a\sin t$）

$=\frac{2}{3}a^4\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}a^4$.

1818. 求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$:

(1) $f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}$, $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$;

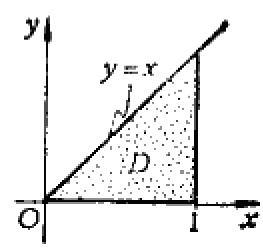
(2) $f(x,y)=x^2y^2$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$ $(a>0)$;

(3) $f(x,y)=xy$, $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x,\ x+y\leqslant 3\right\}$;

(4) $f(x,y)=x+y$, $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 4-x^2,\ 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

[解]

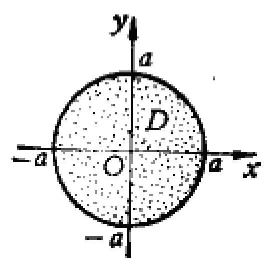
(1) $\iint\limits_D\sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy$



$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y\sqrt{4x^2-y^2}+4x^2\arcsin\frac{y}{2x}\right)\Big|_0^x dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)x^2dx=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\,dx\,dy=\int_{-a}^a x^2dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dy$



$=4\int_0^a x^2dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dy$

$=\frac{4}{3}\int_0^{a}x^2(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{4}{3}a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta$（令 $x=a\sin\theta$）$=\frac{\pi}{24}a^6$.

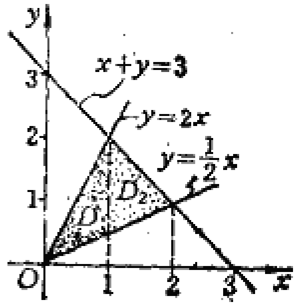
(3) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}xy\,dx\,dy$

$=\int_0^1dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x}xy\,dy+\int_1^2dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}xy\,dy$

$$=\int_0^1 \frac{x}{2}\cdot y^2\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx+\int_1^2 \frac{x}{2}\cdot y^2\Big|_{\frac{x}{2}}^{3-x} dx$$

$$=\int_0^1\left(2x^3-\frac{x^3}{8}\right)dx+\int_1^2\frac{x}{2}\left[(3-x)^2-\frac{x^2}{4}\right]dx$$

$$=\frac{15}{8}\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^2\left(\frac{3}{8}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{13}{8}.$$

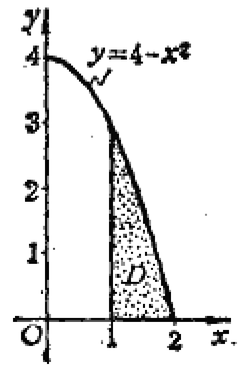


(4) $$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_0^{4-x^2}(x+y)\,dy$$

$$=\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{4-x^2}dx$$

$$=\int_1^2\left[x(4-x^2)+\frac{(4-x^2)^2}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(x^4-2x^3-8x^2+8x+16)\,dx=\frac{241}{60}.$$



1319. 求二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$:

(1) $f(x,y)=x+y^2$, D 由 $y=\frac{1}{1+x}$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ 围成;

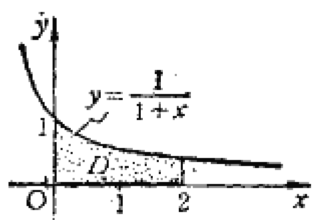
(2) $f(x,y)=x^2+y^2$, D 由 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=1$ 围成;

(3) $f(x,y)=\sqrt{4ay-x^2}$, D 由曲线 $x^2+y^2=2ay$ $(a>0)$ 所围;

(4) $f(x,y)=xy$, D 由 $x=y-a$, $x=2y$, $y=0$, $y=a$ 所围.

[解]

(1) $$\iint\limits_D(x+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{1}{1+x}}(x+y^2)\,dy$$

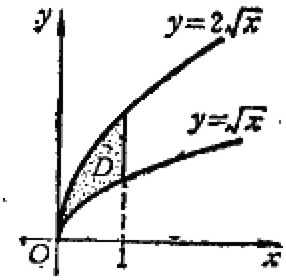


$$=\int_0^2\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{1+x}}dx$$

$$=\int_0^2\left(\frac{x}{1+x}+\frac{1}{3(1+x)^3}\right)dx=\left[x-\ln(1+x)-\frac{1}{6(1+x)^2}\right]\Big|_0^2$$

$$=2\frac{4}{27}-\ln 3.$$

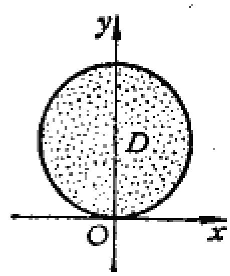
(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy$



$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{128}{105}.$$

(3) $\iint\limits_D \sqrt{4ay-x^2}\,dx\,dy=\int_0^{2a}dy\int_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4ay-x^2}\,dx$



$$=\int_0^{2a}\left(x\sqrt{4ay-x^2}+4ay\arcsin\frac{x}{2\sqrt{ay}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2ay-y^2}}dy$$

$$=\int_0^{2a}\left(y\sqrt{4a^2-y^2}+4ay\arcsin\frac{\sqrt{2a-y}}{2\sqrt{a}}\right)dy.$$

前后两项分别是:

$$\int_0^{2a}y\sqrt{4a^2-y^2}\,dy=-\frac{1}{3}(4a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a}=\frac{8}{3}a^3.$$

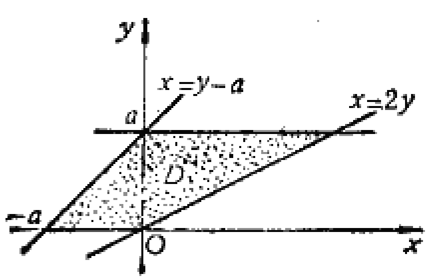
$$\int_0^{2a}y\arcsin\frac{\sqrt{2a-y}}{2\sqrt{a}}\,dy\left(\text{令 }\theta=\arcsin\frac{\sqrt{2a-y}}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos2\theta\sin2\theta\,d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\sin4\theta\,d\theta$$

$$=4a^2\left(-\frac{\theta\cos4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos4\theta\,d\theta\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin4\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}a^2.$$

$\therefore\quad \iint\limits_D\sqrt{4ay-x^2}\,dx\,dy=\left(\frac{8}{3}+\pi\right)a^3.$



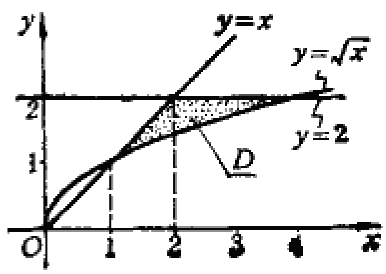
(4) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^a y\,dy\int_{y-a}^{2y}x\,dx$

$$=\int_0^a y\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y-a}^{2y}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a[4y^3-y(y-a)^2]dy=\frac{1}{2}\int_0^a(3y^3+2ay^2-a^2y)\,dy=\frac{11}{24}a^4.$$

1320. 求 $\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}\,dx\,dy,\ D=\{(x,y)\,|\,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant \min(x,2)\}$

［分析］ 区域 D 的边界是由 $y=\sqrt{x}$ 以及 $y=x$(当 $x\leqslant 2$ 时)和 $y=2$(当 $x\geqslant 2$ 时) 所围成.



［解］ $\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}\,dx\,dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$

$$=\int_1^2\left(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2}dy$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy=-\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{2}{\pi}y\sin\frac{\pi y}{2}\right)\Big|_1^2\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}dy\right]=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}.$$

1321. 在下列积分中改变积分顺序(假定被积函数 $f(x,y)$ 是连续的):

(1) $\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y}f(x,y)dx$;　　(2) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x}f(x,y)dy$;

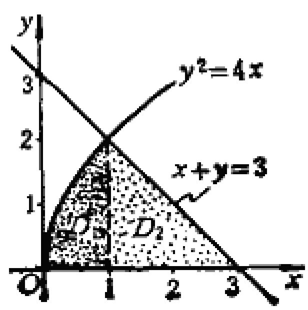
(3) $\int_0^1 dy\int_{2\sqrt{y}}^{3-y}f(x,y)dx$;

(4) $\int_{-\sqrt{b^2-a^2}}^{\sqrt{b^2-a^2}}dx\int_{a-\sqrt{b^2-x^2}}^{-a+\sqrt{b^2-x^2}}f(x,y)dy\quad(b>a)$.

［分析］ 首先要从积分限给出二重积分的积分区域 D. 以 (1) 为例,

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y^2}{4}\leqslant x\leqslant 3-y,\ 0\leqslant y\leqslant 2\right\},$$

亦即 D 的边界是 $y^2=4x$ 和 $x=3-y$ 以及 $y=0$.



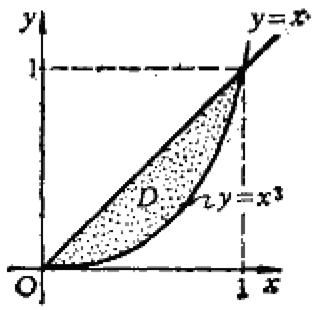
［解］ (1) $\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y}f(x,y)dx=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

$$=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{3-x}f(x,y)dy$$

(2) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} f(x,\ y)\,dy=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$

$=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt[3]{y}} f(x,\ y)\,dx.$

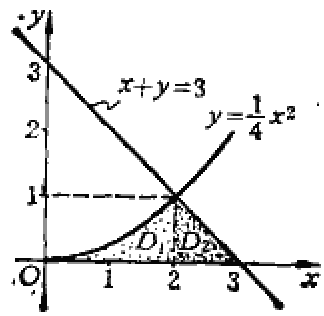


(3) $\int_0^1 dy\int_{2\sqrt{y}}^{3-y} f(x,\ y)\,dx=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$

$=\iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\,dx\,dy$

$=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{4}} f(x,\ y)\,dy$

$+\int_2^3 dx\int_0^{3-x} f(x,\ y)\,dy.$



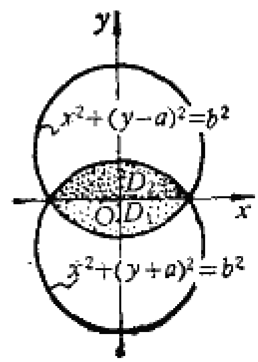
(4) $\int_{-\sqrt{b^2-a^2}}^{\sqrt{b^2-a^2}} dx\int_{a-\sqrt{b^2-x^2}}^{-a+\sqrt{b^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy$

$=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\,dx\,dy$

$+\iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\,dx\,dy$

$=\int_{a-b}^0 dy\int_{-\sqrt{b^2-(y-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(y-a)^2}} f(x,\ y)\,dx$

$+\int_0^{b-a} dy\int_{-\sqrt{b^2-(y+a)^2}}^{\sqrt{b^2-(y+a)^2}} f(x,\ y)\,dx.$



1322. 改变下列积分的积分顺序之后求值：

(1) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\sin y\,dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} x\sin y\,dx$；

(2) $\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\,dy$，$f'$ 连续。

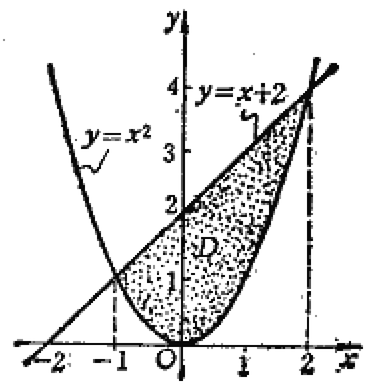
［解］ (1) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\sin y\,dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} x\sin y\,dx$

$=\iint\limits_D x\sin y\,dx\,dy=\int_{-1}^2 dx\int_{x^2}^{x+2} x\sin y\,dy$

$=-\int_{-1}^2 x\cos y\Big|_{x^2}^{x+2} dx=-\int_{-1}^2 [x\cos(x+2)-x\cos x^2]dx$

$$=-[x\sin(x+2)]\Big|_{-1}^{2}+\int_{-1}^{2}\sin(x+2)dx+\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_{-1}^{2}$$

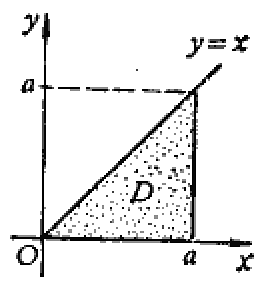
$$=-\frac{3}{2}\sin 4-\frac{3}{2}\sin 1-\cos 4+\cos 1.$$



(2) $$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy$$

$$=\iint_D \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy$$

$$=\int_0^a f'(y)dy\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}.$$



在积分 $I=\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ 中令 $\sqrt{\frac{x-y}{a-x}}=t$（第三种欧拉代换，参见第 663 题），则

$$I=\int_y^a \frac{dx}{(a-x)\sqrt{\frac{x-y}{a-x}}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

$$\therefore\quad \int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy=\int_0^a \pi f'(y)dy=\pi[f(a)-f(0)].$$

1323. 设 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ 连续，证明

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$

［证］ 设 $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=G(x,y)$，则 $\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}=f(x,y)$，$G$ 和 f 都是连续函数。

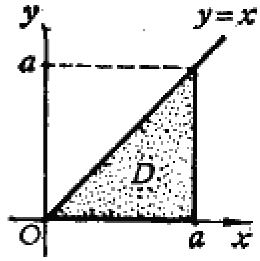
$$\therefore\quad \int_c^d f(x,y)dy=G(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d}=G(x,d)-G(x,c).$$

$$\therefore\quad \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_a^b[G(x,d)-G(x,c)]dx$$

$$=[F(x,d)-F(x,c)]\Big|_a^b$$

$$=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$

1324. 设 f''' 连续，求 $\iint\limits_D \sqrt{(a-x)(x-y)}f'''(y)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant x\leqslant a\}$.



［解］ $\iint\limits_D \sqrt{(a-x)(x-y)}\,f'''(y)\,dx\,dy$

$$=\int_0^a f'''(y)\,dy\int_y^a \sqrt{(a-x)(x-y)}\,dx$$

$$=\int_0^a f'''(y)\,dy\int_y^a \sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^a f'''(y)\Big[\frac{2x-(a+y)}{4}\sqrt{(a-x)(x-y)}$$

$$+\frac{(a-y)^2}{8}\arcsin\frac{2x-(a+y)}{a-y}\Big]\Big|_{x=y}^{x=a}dx$$

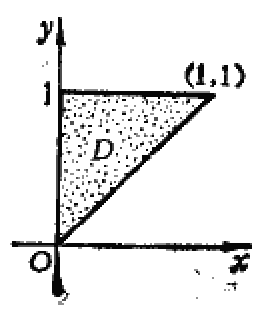
$$=\frac{\pi}{8}\int_0^a (a-y)^2\cdot f'''(y)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{8}\Big\{[(a-y)^2\cdot f''(y)]\Big|_0^a+2\int_0^a (a-y)f''(y)\,dy\Big\}$$

$$=\frac{\pi}{8}\Big\{-a^2f''(0)+2[(a-y)f'(y)]\big|_0^a+2\int_0 f'(y)\,dy\Big\}$$

$$=\frac{\pi}{8}[-a^2f''(0)-2af'(0)+2f(a)-2f(0)].$$

1325. 将二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy$ 写成两个二次积分（先对 x 后对 y 的积分和先对 y 后对 x 的积分），并说明哪一个积分将积不出．其中 D 是三角形，顶点是 $(0,0)$，$(1,1)$，$(0,1)$。



［解］ $\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}\,dx$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}\,dy.$$

由于 $\int e^{-y^2}dy$ 不可能用初等函数表示，所以先对 y 后对 x 的积分 $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$ 将积不出。

而
$$\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

1326. 设函数 f 在 $[a, b]$ 连续，无零点，证明
$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geqslant(b-a)^2.$$

［分析］ 如果函数 u, v 在 $[a, b]$ 连续，那么
$$\int_a^b u(x)dx\int_a^b v(y)dy=\iint\limits_D u(x)v(y)dxdy,$$
其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$。现在视 $u(x)=f(x), v(y)=\dfrac{1}{f(y)}$，通过二重积分即可证明。

［证］ $I=\displaystyle\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy$
$$=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy,$$
$$D=\{(x, y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}.$$
同样有
$$I=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy.$$
$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy.$$
利用不等式 $A^2+B^2\geqslant 2AB$，得
$$I\geqslant\frac{1}{2}\iint\limits_D 2dxdy=(b-a)^2.$$

1327. 设函数 f 在 $[a, b]$ 连续，证明
$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

［分析］ $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)^2$ 可以看成
$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)dx=\iint\limits_D f(x)f(y)dxdy,$$
$D=\{(x, y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$。$(b-a)\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$ 可以看成

$$\int_a^b dy\int_a^b f^2(x)\,dx=\iint_D f^2(x)\,dx\,dy.$$

问题化为比较两个二重积分的大小.

［证］　$I=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b f(y)\,dy=\iint_D f(x)f(y)\,dx\,dy,$

$$D=\{(x,\ y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}.$$

$$J=(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx=\int_a^b dy\int_a^b f^2(x)\,dx=\iint_D f^2(x)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (f^2(x)+f^2(y))\,dx\,dy.$$

利用不等式 $A^2+B^2\geqslant 2AB$, 即得 $I\leqslant J$.

1328. 求二重积分 $\iint_D f(x,\ y)dx\,dy$:

(1) $f(x,\ y)=x^2y^2,\ D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}\quad (a>0)$;

(2) $f(x,\ y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}$,

$D=\{(x,\ y)\,|\,0<r_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant r_2\}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$,

$D=\{(x,\ y)\,|\,(x^2+y^2)^2\leqslant x^2-y^2,\ x\geqslant 0\}$.

［解］ (1) 作极坐标代换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则

$$\iint_D x^2y^2\,dx\ dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^4\cos^2\theta\sin^2\theta r\,dr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^a r^5\,dr=\frac{2}{3}a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{2}{3}a^6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{24}a^6$$ （参见第 1318(2) 题）.

(2) 作极坐标代换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{r^n}\,dr=2\pi\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{n-1}}$$

$$=\begin{cases}2\pi\ln\dfrac{r_2}{r_1}, & \text{当 } n=2,\\ \dfrac{2\pi}{2-n}\left(\dfrac{1}{r_2^{n-2}}-\dfrac{1}{r_1^{n-2}}\right), & \text{当 } n\neq 2.\end{cases}$$

(3) 作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则 D 变换为极坐标系内的

$$D'=\left\{(r,\ \theta)\,|\,r^2\leqslant\cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

$$\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{r\,dr}{(1+r^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{1+r^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\theta}\right)d\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

1329. 设函数 f 在 $D=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 连续，证明

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta)r\,dr$$

并求：(1) $\displaystyle\iint\limits_D(x^2+y^2)dx\,dy$;　(2) $\displaystyle\iint\limits_D\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$.

［证］ 作广义极坐标代换 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, D 变为广义极坐标系内的 $D'=\{(\theta,\ r)\,|\,r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 代换的雅可比行列式为 $abr\,dr\,d\theta$. 所以

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta)\,r\,dr.$$

再求解(1)和(2)如下：

(1) $\displaystyle\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)\,r\,dr$

$$=ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta\int_0^1 r^3\,dr$$

$$=ab\pi(a^2+b^2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{ab}{4}\pi(a^2+b^2).$$

(2) $$\iint\limits_D\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$

$$=-2\pi ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab.$$

1330. 求二重积分 $\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy$：

(1) $f(x,\ y)=(x^2+y^2)e^{-x-y}$,
$D=\{(x,\ y)\mid -1\leqslant x+y\leqslant 1,\ -1\leqslant x-y\leqslant 1\}$;

(2) $f(x,\ y)=e^{\frac{y}{x+y}}$, $D=\{(x,\ y)\mid x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$;

(3) $f(x,\ y)=y$,
$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$ $(a>0,\ b>0)$.

［解］ (1) 作代换 $x+y=u$, $x-y=v$, 则 $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$, 代换的雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u,\ v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1,\ -1\leqslant v\leqslant 1\}$. 所以

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)e^{-x-y}dx\,dy=\iint\limits_{D'}\frac{u^2+v^2}{2}e^{-u}\frac{1}{2}du\,dv$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^1 du\int_{-1}^1(u^2+v^2)e^{-u}dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left(u^2+\frac{1}{3}\right)e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{2}\left[-e^{-u}\left(u^2+\frac{1}{3}\right)\Big|_{-1}^1+\int_{-1}^1 2ue^{-u}du\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left[-e^{-u}\left(u^2+2u+\frac{1}{3}+2\right)\right]\Big|_{-1}^1=\frac{2}{3}\left(e-\frac{4}{e}\right).$$

(2) 作代换 $x+y=u$, $\frac{y}{x+y}=v$, 则 $x=u(1-v)$, $y=uv$, 雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u.$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1\}$. 所以

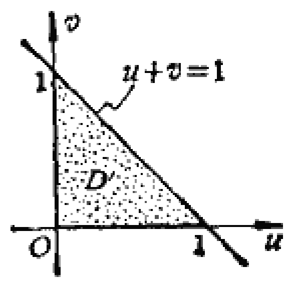
$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}e^v u\,du\,dv=\int_0^1 u\,du\int_0^1 e^v\,dv=\frac{1}{2}(e-1).$$

(3) 作代换 $\sqrt{\frac{x}{a}}=u$, $\sqrt{\frac{y}{b}}=v$, 则 $x=au^2$, $y=bv^2$, 雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}2au & 0\\ 0 & 2bv\end{vmatrix}=4abuv.$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u,v)\mid u+v\leqslant 1,\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0\}$. 所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y\,dx\,dy&=\iint\limits_{D'}bv^2\,4abuv\,du\,dv\\&=2ab^2\int_0^1 v^3\,dv\int_0^{1-v}2u\,du\\&=2ab^2\int_0^1 v^3(1-v)^2dv\\&=2ab^2\int_0^1(v^3-2v^4+v^5)\,dv=\frac{1}{30}ab^2.\end{aligned}$$



1331. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_0^a dx\int_0^{a-x}f(x,\ y)dy=\int_0^1 dv\int_0^a f(u-uv,\ uv)u\,du,$$

并计算
$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dy.$$

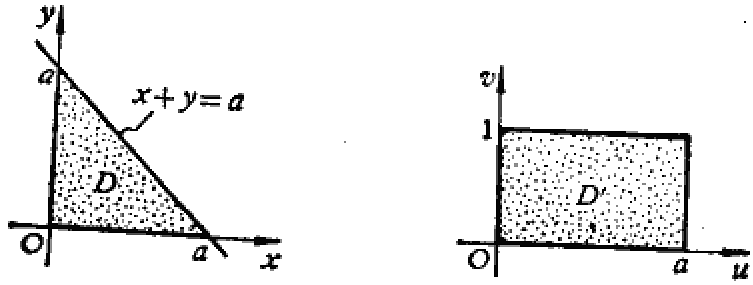
[证] $\int_0^a dx\int_0^{a-x}f(x,\ y)\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, 其中

$$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant a,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

作代换 $x+y=u$, $\frac{y}{x+y}=v$, 则 $x=u-uv$, $y=uv$, 雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u.$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 1\}$.



$$\int_0^a dx\int_0^{a-x} f(x,\ y)dy=\iint_{D'} f(u-uv,\ uv)u\,du\,dv$$

$$=\int_0^1 dv\int_0^a f(u-uv,\ uv)u\,du.$$

再计算
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}}dy$$
如下：利用上述公式，

$$\frac{y-x}{y+x}=\frac{uv-(u-uv)}{u}=2v-1,$$

所以 $I=\int_0^1 dv\int_0^1 e^{2v-1}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2v-1}\,dv=\frac{1}{4}(e^{2v-1})\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).$

1332. 设 f', g' 都连续，证明：

(1) $$\iint_D f'(x+y)g'(x-y)dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}[f(a)-f(-a)][g(a)-g(-a)],$$

$D=\{(x,\ y)\mid -a\leqslant x+y\leqslant a,\quad -a\leqslant x-y\leqslant a\}\quad(a>0);$

(2) $$\iint_D f'(x^2+y^2)dx\,dy=\pi[f(a^2)-f(0)],$$

$D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}.$

［证］ (1) 作代换 $x+y=u$, $x-y=v$, 则

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(u-v),$$

雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u, v)\mid -a\leqslant u\leqslant a,\ -a\leqslant v\leqslant a\}$. 所以

$$\iint\limits_D f'(x+y)g'(x-y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}f'(u)g'(v)\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f'(u)\,du\int_{-a}^{a}g'(v)\,dv$$

$$=\frac{1}{2}[f(a)-f(-a)][g(a)-g(-a)].$$

(2) 作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_D f'(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a f'(r^2)r\,dr$$

$$=\pi\int_0^a f'(r^2)\,dr^2=\pi[f(a^2)-f(0)].$$

1333. 求下列函数 f 在区域 D 上的平均值 m:

(1) $f(x, y)=e^{\frac{y}{x}}$, $D=\{(x, y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$;

(2) $f(x, y)=\sqrt{x}$, $D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$;

(3) $f(x, y)=(x+y)\sin(x-y)$,

$D=\{(x, y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant \pi,\ 0\leqslant x-y\leqslant \pi\}$.

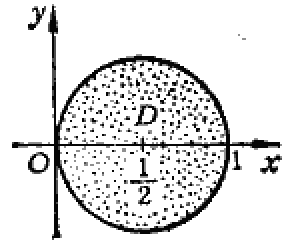
[解]　(1) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_0^1 xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{y=0}^{y=x^2}dx$

$$=\int_0^1(xe^x-x)\,dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$D\text{的面积}=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad \text{平均值}\ m=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

(2) 作极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 方程 $x^2+y^2=x$ 变换为 $r=\cos\theta$. 故



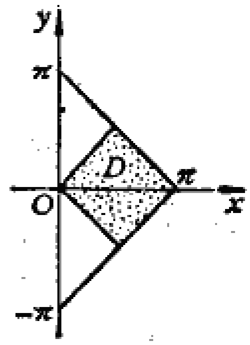
$$\iint\limits_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\,r\,dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\cdot\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15},$$

$$D\text{的面积}=\frac{\pi}{4},\quad\therefore\quad\text{平均值 } m=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{32}{15\pi}.$$

(3) 作代换 $x+y=u$, $x-y=v$, 则雅可比行列式



$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

D 变换为 u, v 坐标系内的 $D'=\{(u,\ v)\,|\,0\leqslant u\leqslant\pi,\ 0\leqslant v\leqslant\pi\}$. 所以

$$\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}u\,du\int_0^{\pi}\sin v\,dv=\frac{\pi^2}{2},$$

$$D\text{的面积}=\frac{\pi^2}{2},\quad\therefore\quad\text{平均值 } m=\frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{\pi^2}{2}}=1.$$

(2) 三重积分和 n 重积分

1334. 设函数 f 连续, 将三重积分

$$I=\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

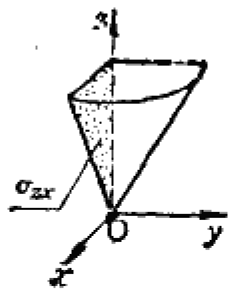
$\Big($其中 V 是由锥面 $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 以及平面 $z=c$, 三个坐标面在第一卦限内所围的区域, a, b, $c>0\Big)$写为:

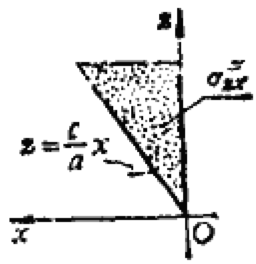
(1) 先对 y，再对 z，最后对 x 的三次积分；

(2) 先对 z，再对 x，最后对 y 的三次积分.

［解］ (1) $I=\iint\limits_{\sigma_{zx}} dz\,dx\int_0^{b\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,\ y,\ z)\,dy$

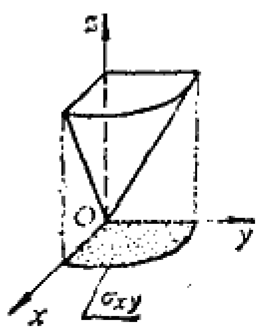
$$=\int_0^a dx\int_{\frac{c}{a}x}^{c} dz\int_0^{b\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,\ y,\ z)\,dy.$$

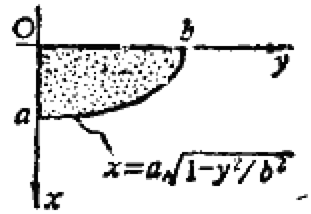




(2) $I=\iint\limits_{\sigma_{xy}} dx\,dy\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x,\ y,\ z)\,dz$

$$=\int_0^b dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$





1335. 求下列三重积分 $\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$：

(1) $f(x,\ y,\ z)=x\sin^2 y+z\cos y$,

$$V=\left\{(x,\ y,\ z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant z\leqslant 2\right\};$$

(2) $f(x,\ y,\ z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$,

$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x+y+z\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$;

(3) $f(x,\ y,\ z)=e^{x+y+z}$,

$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant x+y\}$.

［解］ (1) $\iiint\limits_V (x\sin^2 y+z\cos y)\,dx\,dy\,dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy\int_0^2 (x\sin^2 y+z\cos y)\,dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(xz\sin^2 y+\frac{z^2}{2}\cos y\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2} dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x\sin^2 y+2\cos y)\,dy=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}x+2\right)dx=\frac{\pi}{4}+2.$$

(2) $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\dfrac{dz}{(x+y+z+1)^3}$

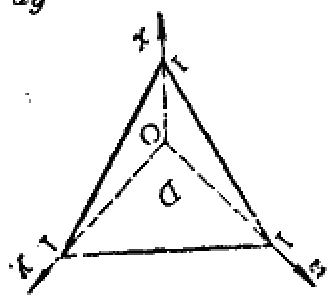
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2(x+y+1)^2}-\frac{1}{8}\right]dy.$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{2(x+y+1)}-\frac{1}{8}y\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}-\frac{1-x}{8}\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$



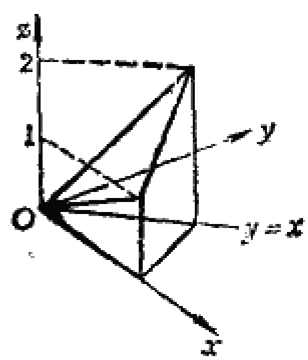
(3) $\iiint\limits_V e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 e^x\,dx\int_0^x e^y\,dy\int_0^{x+y} e^z\,dz$

$$=\int_0^1 e^x\,dx\int_0^x e^y(e^{x+y}-1)\,dy$$

$$=\int_0^1 e^x\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}e^x+1\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{8}e^{4x}-\frac{3}{4}e^{2x}+e^x\right)\Bigg|_0^1$$

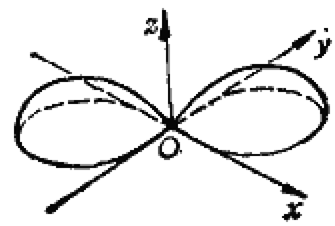
$$=\frac{1}{8}e^4-\frac{3}{4}e^2+e-\frac{3}{8}$$



1336. 求下列三重积分 $\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dx\,dy\,dz$:

(1) $f(x,\ y,\ z)=\frac{xyz}{x^2+y^2}$, V 是介于曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 之下 $z=0$ 之上的区域;

(2) $f(x,\ y,\ z)=x^2y^2$, V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1(a,\ b,\ c>0)$.



［解］ (1) 作球坐标代换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 则曲面方程 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ 变换为 $r^2=a^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta$, 变换的雅可比行列式 $J=r^2\sin\varphi$, 所以

$$\iiint\limits_V \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\,d\sin\varphi$$

$$=\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{6}\sin^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{1}{6}\sin^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{144}.$$

(2) 作广义球坐标代换 $x=ar\sin\varphi\cos\theta$, $y=br\sin\varphi\sin\theta$, $z=cr\cos\varphi$, 则椭球面方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 变换为 $r=1$, 变换的雅可比行列式

$$J=abcr^2\sin\varphi,$$

所以

$$\iiint\limits_V x^2y^2\,dx\,dy\,dz=a^3b^3c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^6\sin^5\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\,dr$$

$$=\frac{a^3b^3c}{7}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^3b^3c}{7}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta\,d\theta\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^3b^3c}{7}\cdot 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\,\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{4\pi}{105}\,a^3b^3c.$$

1337. 求下列三重积分 $\iiint\limits_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz$:

(1) $f(x, y, z)=z^2$,

$V=\{(x, y, z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ x^2+y^2\leqslant ax\}(a>0)$;

(2) $f(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2}$,

$V=\{(x, y, z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 3\}$.

[解] (1) 作柱面坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 则球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 变换为 $r^2+z^2=a^2$, 柱面方程 $x^2+y^2=ax$ 变换为 $r=a\cos\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 代换的雅可比行列式 $J=r$. 所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\,dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}z^2\,dz\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}dr\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{5}(a^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^{a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{4}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^5(1-\sin^5\theta)d\theta=\frac{4a^5}{15}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8}{15}\right).\end{aligned}$$

(2) 作柱面坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 则锥面方程

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

变换为 $z=r$, 锥面与平面 $z=3$ 的交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2=9$ 即 $r=3$, 代换的雅可比行列式 $J=r$. 所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r\,dr\int_r^3 r\,dz\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r^2(3-r)\,dr=2\pi\cdot\left[r^3-\frac{1}{4}r^4\right]\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}\pi.\end{aligned}$$

1338. 求下列三重积分 $\iiint\limits_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz$:

(1) $f(x, y, z)=(x+y+z)\cos(x+y+z)^2$,

$V=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x-y\leqslant 1, 0\leqslant x-z\leqslant 1, 0\leqslant x+y+z\leqslant 1\}$;

(2) $f(x,y,z)=x^2$, V 是由 $z=ay^2$, $z=by^2, y\geqslant 0(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x(0<\alpha<\beta)$, $z=h(h>0)$所围的区域.

[解]　(1) 作代换 $x-y=u$, $x-z=v$, $x+y+z=w$, 则

$$x=\frac{1}{3}(u+v+w),\quad y=\frac{1}{3}(-2u+v+w),$$

$$z=\frac{1}{3}(u-2v+w),$$

区域 V 在 u, v, w 坐标系内变换为 $V'=\{(u,v,w)\mid 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1,\ 0\leqslant w\leqslant 1\}$, 代换的雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

所以　$$\iiint\limits_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2 dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 du\int_0^1 dv\int_0^1 w\cos w^2 dw$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 w\cos w^2 dw=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin w^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}\sin 1.$$

(2) 作代换 $z=\xi y^2$, $z=\eta x$, $z=\zeta$, 则 $x=\zeta\eta^{-1}$, $y=\zeta^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}$, $z=\zeta$. 曲面方程 $z=ay^2$, $z=by^2$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ 分别变换为 $\xi=a$, $\xi=b$, $\eta=\alpha$, $\eta=\beta$, 代换的雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix} 0 & -\zeta\eta^{-2} & \eta^{-1} \\ -\frac{1}{2}\zeta^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}}\eta^{-2}\zeta^{\frac{3}{2}},$$

所以　$$\iiint\limits_V x^2 dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}\int_a^b d\xi\int_\alpha^\beta d\eta\int_0^h \xi^{-\frac{3}{2}}\eta^{-4}\zeta^{\frac{7}{2}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b \xi^{-\frac{3}{2}}d\xi\int_\alpha^\beta \eta^{-4}d\eta\int_0^h \zeta^{\frac{7}{2}}d\zeta$$

$$=\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\beta^3}-\frac{1}{\alpha^3}\right)h^{\frac{9}{2}}.$$

1339. 求 n 重积分

$$V_n=\int\cdots\int_V dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

其中 $V=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in R^n|x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a,\ x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0\}$, $(a>0)$.

[解] 作变量代换: $x_1=a\xi_1$, $x_2=a\xi_2$, $\cdots$, $x_n=a\xi_n$, 代换的雅可比行列式是 $\dfrac{\partial(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}{\partial(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)}=a^n$, 故

$$V_n=a^n\int\cdots\int_{\substack{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant 1,\\ \xi_1>0,\xi_2>0\cdots,\xi_n>0}} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n=a^nW_n.$$

利用重积分的计算有

$$W_n=\int_0^1 d\xi_n\int\cdots\int_{\substack{\xi_1+\cdots\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n\\ \xi_1>0,\xi_2>0,\cdots\xi_n>0}} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}$$

在右端的 $n-1$ 重积分中,重复刚才的做法(作代换 $\xi_i=(1-\xi_n)u_i$),有

$$\int\cdots\int_{\substack{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant 1-\xi_n\\ \xi_1>0,\xi_2>0,\cdots,\xi_n>0}} d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}=(1-\xi_n)^{n-1}\int\cdots\int_{\substack{u_1+\cdots+u_{n-1}\leqslant 1\\ u_1>0,u_2>0,\cdots,u_n>0}} du_1du_2\cdots du_{n-1}$$

$$=(1-\xi_n)^{n-1}W_{n-1}.$$

于是得递推公式

$$W_n=W_{n-1}\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}d\xi_n=\frac{1}{n}W_{n-1}.$$

而 $W_1=1$, 故 $W_2=\dfrac{1}{2}$, $W_3=\dfrac{1}{3!}$, $\cdots$, $W_n=\dfrac{1}{n!}$, $\therefore\ V_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

[说明] V_n 的几何意义是 n 维超平面 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 和各个坐标平面所围 n 维区域的体积.

1340 给出 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 的体积 V_n 的递推公式.

[解] $$V_n=\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2} dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{-R}^R dx_n\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant R^2-x_n^2} dx_1dx_2\cdots dx_{n-1},$$

作变量代换 $x_1=R\xi_1$, $x_2=R\xi_2$, $\cdots$, $x_n=R\xi_n$, 代换的雅可比行列式 $\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}=R^n$, 故

$$V_n=R^n \underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2<1}{\int\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n=R^nW_n.$$

而

$$W_n=\int_{-1}^{1}d\xi_n \underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_{n-1}^2<1-\xi_n^2}{\int\cdots\int} d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_{n-1}.$$

在右端的 $n-1$ 重积分中，重复刚才的做法(作代换 $\xi_i=\sqrt{1-\xi_n^2}u_i$)，有

$$\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2<1-\xi_n^2}{\int\cdots\int} d\xi_1\cdots d\xi_{n-1}=(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \underset{u_1^2+\cdots+u_{n-1}^2<1}{\int\cdots\int} du_1\cdots du_{n-1}.$$

于是得递推公式

$$W_n=\int_{-1}^{1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi_n\cdot W_{n-1}.$$

令 $\xi_n=\cos t$, 得

$$W_n=2W_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$$

$$V_n=R^nW_n.$$

§2. 广义重积分

1341. 判别下列二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ 的收敛性:

(1) $f(x, y)=\dfrac{1}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$,

$D=\{(x, y)\,|\,-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\}$;

(2) $f(x, y)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^p}$,

$D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1, -\infty<x<+\infty\}$;

(3) $f(x, y)=\dfrac{\varphi(x, y)}{|x-y|^\alpha}$,

$D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x, y\leqslant a\}$, φ 连续, $0<m\leqslant\varphi(x, y)\leqslant M$, $(x, y)\in D$;

(4) $f(x,\ y)=\dfrac{\varphi(x,\ y)}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$,

$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}\ (a>0)$，$\varphi$ 连续，$0<m\leqslant\varphi(x,\ y)\leqslant M$，$(x,\ y)\in D$.

［解］ (1) $\displaystyle\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+|x|^p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+|y|^q}$

∴ 当 $p>1$，$q>1$ 时积分收敛，其他情形都发散.

(2) ∵ $\displaystyle\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+x^2)^p}$

∴ $\displaystyle\int_0^1dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^2)^p}\leqslant\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\int_0^1dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^p}$

得：当 $2p>1$ 即 $p>\dfrac{1}{2}$ 时积分收敛；$p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散.

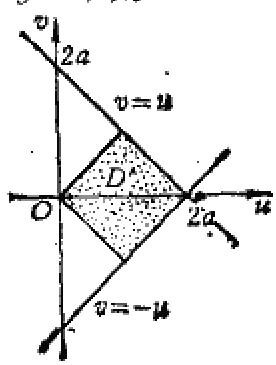
(3) 首先有

$$m\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha}\leqslant\iint\limits_D\frac{\varphi(x,\ y)}{|x-y|^\alpha}\,dx\,dy\leqslant M\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha},$$

所以 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{\varphi(x,\ y)}{|x-y|^\alpha}\,dx\,dy$ 和 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha}$

同时收敛或发散. 奇线是 $y=x$，作变换 $x+y=u$，$x-y=v$，则

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(u-v),$$



雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

D 变换为 D'. 所以

$$\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|x-y|^\alpha}=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'}\frac{du\,du}{|v|^\alpha}$$

得当 $\alpha<1$ 时，积分收敛；当 $\alpha\geqslant1$ 时积分发散.

(4) 与(3)相仿，有：

$$\iint\limits_D\frac{\varphi(x,\ y)\,dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}\quad 和\quad\iint\limits_{D_1}\frac{dx\,dy}{x^2+xy+y^2}$$

同时收敛或发散. 作极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \frac{r\,dr}{r^{2\alpha}(1+\cos\theta\sin\theta)^\alpha}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \frac{dr}{r^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^\alpha}.$$

所以当 $2\alpha-1<1$ 即 $\alpha<1$ 时积分收敛, $\alpha\geqslant 1$ 时发散.

1342. 从广义二重积分收敛的定义出发, 讨论下列积分 $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ 的收敛性. 如果收敛, 求其值.

(1) $f(x, y)=\dfrac{1}{(x+y)^\alpha}$, $(1<\alpha<2)$,

$D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$;

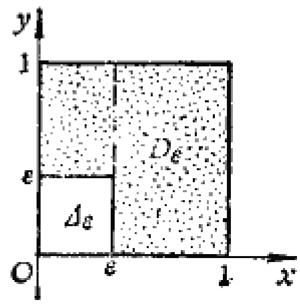
(2) $f(x, y)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(3) $f(x, y)=\dfrac{1}{|x-y|^\alpha}$ $(\alpha<1)$,

$D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $f(x, y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, $D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

[解] (1) 点(0, 0)是奇点. 除奇点外 f 是正的连续函数. 记 $\Delta_\varepsilon=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant y\leqslant\varepsilon\}$, $(\varepsilon>0)$, $D_\varepsilon=D-\Delta_\varepsilon$, 则



$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^\alpha}$$

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^\alpha}=\int_0^\varepsilon dx\int_\varepsilon^1\frac{dy}{(x+y)^\alpha}+\int_\varepsilon^1 dx\int_0^1\frac{dy}{(x+y)^\alpha}$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^\varepsilon[(x+1)^{1-\alpha}-(x+\varepsilon)^{1-\alpha}]dx+\frac{1}{1-\alpha}\int_\varepsilon^1[(x+1)^{1-\alpha}-x^{1-\alpha}]dx$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}[2^{2-\alpha}-2+2\varepsilon^{2-\alpha}-(2\varepsilon)^{2-\alpha}].$$

$$\therefore \quad \iint \frac{dx\,dy}{(x+y)^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}[2^{2-\alpha}-2+2\varepsilon^{2-\alpha}-(2\varepsilon)^{2-\alpha}]$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(2^{2-\alpha}-2).$$

(2) 点(0, 0)是奇点，除奇点外 f 是正的连续函数．记小圆

$$\Delta_\varepsilon = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2\} \quad (\varepsilon>0), \; D_\varepsilon = D-\Delta_\varepsilon,$$

则
$$\iint_D \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

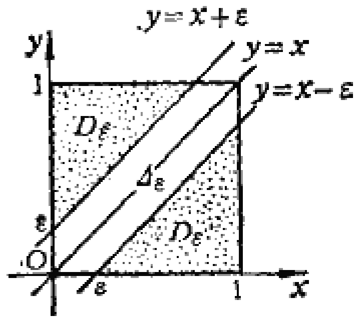
$$\iint_{D_\varepsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \ln \frac{1}{r^2}\cdot r\,dr$$

$$= -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 r\ln r\,dr = -4\pi\left(\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{1}{4}r^2\right)\Big|_\varepsilon^1$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$$

$$\therefore \quad \iint_D \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} 4\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right) = \pi.$$

(3) $y=x$ 是奇线，除奇线外 f 是正的连续函数．记 $\Delta_\varepsilon = \{(x, y) \mid (x, y) \in D,\; x-\varepsilon<y<x+\varepsilon\}\,(\varepsilon>0)$, $D_\varepsilon = D-\Delta_\varepsilon$．则



$$\iint_D \frac{dx\,dy}{|x-y|^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dx\,dy}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dx\,dy}{|x-y|^{\alpha}} = \int_\varepsilon^1 dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^{\alpha}} + \int_0^{1-\varepsilon} dx \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{dy}{(y-x)^{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_\varepsilon^1 (x^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})\,dx + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\varepsilon} [(1-x)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}]dx$$

$$= \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(1-\varepsilon^{2-\alpha}) - \frac{2}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}(1-\varepsilon).$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{dx\,dy}{|x-y|^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dx\,dy}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

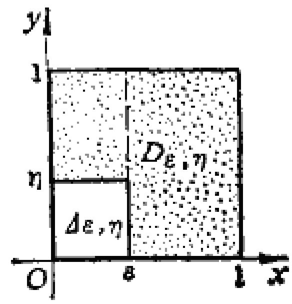
(4) 点(0, 0)是奇点．记 $\Delta_{\varepsilon,\eta} = \{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant\varepsilon,\; 0\leqslant y\leqslant\eta\}$ $(\varepsilon>0,\; \eta>0)$. $D_{\varepsilon,\eta} = D-\Delta_{\varepsilon,\eta}$.

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon,\eta}} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy=\int_0^{\varepsilon}dx\int_{\eta}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy$$

$$+\int_{\varepsilon}^{1}dx\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy$$

$$=\int_0^{\varepsilon}dx\int_{\eta}^{1}\frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3}\,dy$$

$$+\int_{\varepsilon}^{1}dx\int_0^1\frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3}\,dy$$



$$=\int_0^{\varepsilon}\left[-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right]\Bigg|_{y=\eta}^{y=1}dx+\int_{\varepsilon}^{1}\left[-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx$$

$$=\int_0^{\varepsilon}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\eta}{(x+\eta)^2}\right]dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{\eta}{x+\eta}\right)\Bigg|_0^{\varepsilon}+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\frac{\eta}{\varepsilon+\eta}-\frac{1}{2}。$$

当 $\varepsilon\to+0$，$\eta\to+0$ 时，$\iint\limits_{D_{\varepsilon,\eta}}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$ 无极限，故 $\iint\limits_{D}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$ 发散。

1343．从广义二重积分收敛的定义出发，讨论下列积分 $\iint\limits_{D}f(x,\ y)dx\,dy$ 的收敛性．如果收敛，求其值．

(1) $f(x,\ y)=xye^{-(x^2+y^2)}$，$D=\{(x,\ y)\,|\,y\geqslant x\geqslant 0\}$；

(2) $f(x,\ y)=\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\geqslant 1\}$；

(3) $f(x,\ y)=\sin(x^2+y^2)$，
$D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant y<+\infty\}$

［解］ (1) f 在 D 内是非负的连续函数，记

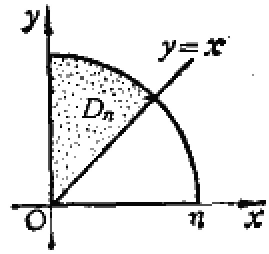
$$D_n=\{(x,\ y)\,|\,(x,\ y)\in D,\ x^2+y^2\leqslant n^2\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

则
$$\iint\limits_{D}xye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{D_n}xye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{D_n} xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n r^2\cos\theta\sin\theta e^{-r^2}r\,dr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^n r^3e^{-r^2}\,dr.$$



而 $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\sin^2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4},$$

$$\int_0^n r^3e^{-r^2}\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{n^2}te^{-t}\,dt \quad (令\ r^2=t)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(-te^{-t}\right)\Big|_0^{n^2}+\int_0^{n^2}e^{-t}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-n^2e^{-n^2}+1-e^{-n^2}\right).$$

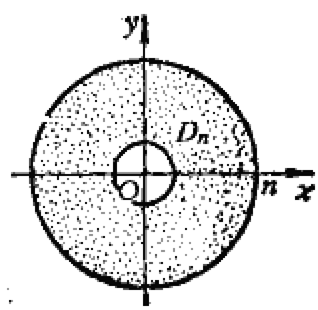
$$\therefore\quad \iint\limits_D xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(-n^2e^{-n^2}+1-e^{-n^2}\right)=\frac{1}{8}.$$

(2) f 在 D 内是非负的连续函数，记

$$D_n=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x^2+y^2\leqslant n^2\}\quad (n=2,3,\cdots),$$

则 $$\iint\limits_D\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，则



$$\iint\limits_{D_n}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^n\frac{\ln r^2}{r^3}\,r\,dr$$

$$=4\pi\int_1^n\frac{\ln r}{r^2}\,dr=4\pi\left[\left(-\frac{\ln r}{r}\right)\Big|_1^n+\int_1^n\frac{dr}{r^2}\right]$$

$$=4\pi\left(-\frac{\ln n}{n}+1-\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}4\pi\left(-\frac{\ln n}{n}+1-\frac{1}{n}\right)=4\pi,$$

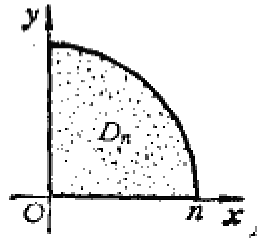
$$\therefore\quad \iint\limits_D\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy=4\pi.$$

(3) 记 $D_n=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant n^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ $(n=1,2,3\cdots)$，利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，得

$$\iint\limits_{D_n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n \sin r^2\, r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}(1-\cos n^2).$$



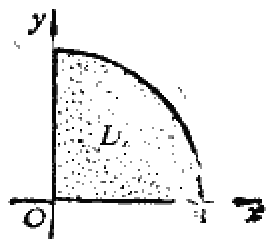
当 $n\to\infty$ 时，上述积分无极限，所以 $\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 发散。

1344. 求 $\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ 的值，$D=\{(x,\ y)\,|\,x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0\}$，并证明

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

［解］ $e^{-(x^2+y^2)}$ 在 D 内是正的连续函数，记

$$D_n=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant n^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

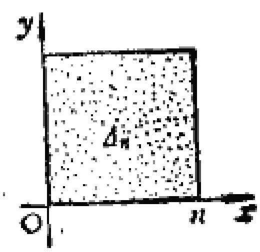


再利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则

$$\iint\limits_{D}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n re^{-r^2}dr=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$



另外，记 $\Delta_n=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant x\leqslant n,\ \ 0\leqslant y\leqslant n\}(n=1,$ $2,\ \cdots)$，则

$$\iint\limits_{D}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx\int_0^n e^{-y^2}dy=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2.$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1345. 设函数$f(x)$在$0\leqslant x\leqslant a$连续，证明

$$\iint\limits_{0<y<x<a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx\,dy=\pi\int_0^a f(x)dx.$$

［分析］ 由 $\dfrac{|f(y)|}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\leqslant\dfrac{C}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$（$C$是$|f(x)|$在$[0,a]$上的界）知道积分是收敛的，则有

$$\iint\limits_{0<y<x<a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx\,dy=\int_0^a f(y)\,dy\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}.$$

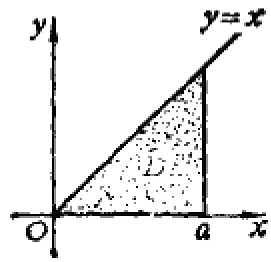
问题化为证明

$$\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\pi,$$

而这一积分是不难求得的。

［证］ $\because$ $\displaystyle\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2}}$

$$=\arcsin\frac{2x-(a+y)}{a-y}\Bigg|_y^a=\pi,$$



$\therefore$ $\displaystyle\iint\limits_{0<y<x<a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx\,dy$

$$=\int_0^a f(y)\,dy\int_y^a\frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$$=\pi\int_0^a f(y)\,dy\left(=\pi\int_0^a f(x)\,dx\right).$$

1346. 求下列广义三重积分 $\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dx\,dy\,dz$.

(1) $f(x,\ y,\ z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}}$,

$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\}$　$(a>0)$;

(2) $f(x,\ y,\ z)=\dfrac{1}{(1+x+y+z)^{\alpha}}$　$(\alpha>3)$,

$V=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ z\geqslant0\}$;

(3) $f(x, y, z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$,

$V=\{(x, y, z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1\}$.

[解]　(1) 点(0, 0, 0)是奇点. 除奇点外 f 在区域 V 内是正的连续函数，记 $\Delta_\varepsilon=\{(x, y, z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2\}(a>\varepsilon>0)$, $V_\varepsilon=V-\Delta_\varepsilon$, 则

$$\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{4}}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{4}}}.$$

利用球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 故

$$\iiint_{V_\varepsilon}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{4}}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_\varepsilon^a\frac{r^2\sin\varphi}{r^{\frac{5}{2}}}\,dr$$

$$=4\pi\,(2\sqrt{r}\,)\Big|_\varepsilon^a=8\pi(\sqrt{a}-\sqrt{\varepsilon}\,),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}8\pi\,(\sqrt{a}-\sqrt{\varepsilon}\,)=8\pi\sqrt{a},$$

$$\therefore\quad\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{4}}}=8\pi\sqrt{a}.$$

(2) f 在 V 内是正的连续函数. 记 $V_n=\{(x, y, z)\,|\,0\leqslant x\leqslant n,\ 0\leqslant y\leqslant n,\ 0\leqslant z\leqslant n\}$, 则

$$\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iiint_{V_n}\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^\alpha}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^n dy\int_0^n(1+x+y+z)^{-\alpha}dz$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^n[(1+n+x+y)^{1-\alpha}-(1+x+y)^{1-\alpha}]dy$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\lim_{n\to\infty}\int_0^n[(1+2n+x)^{2-\alpha}-2(1+n+x)^{2-\alpha}+(1+x)^{2-\alpha}]dx$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}\lim_{n\to\infty}[(1+3n)^{3-\alpha}-3(1+2n)^{3-\alpha}+3(1+n)^{3-\alpha}-1]$$

$$=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}.$$

(3) $x^2+y^2+z^2=1$ 是奇面. 在奇面外，f 是 V 内的正的连续函数. 记 $V_\rho=\{(x, y, z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant\rho^2\}(0<\rho<1)$, 则

$$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}=\lim_{\rho\to1-0}\iiint\limits_{V_\rho}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

利用球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 故

$$\iiint\limits_{V_\rho}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^\rho\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$

$$=4\pi\int_0^\rho\frac{1-(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}}\,dr=4\pi\left(\int_0^\rho\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}-\int_0^\rho\sqrt{1-r^2}\,dr\right)$$

$$=4\pi\left[\arcsin r-\frac{1}{2}\left(r\sqrt{1-r^2}+\arcsin r\right)\right]\Big|_0^\rho$$

$$=4\pi\left(\frac{1}{2}\arcsin\rho-\frac{1}{2}\rho\sqrt{1-\rho^2}\right),$$

$$\lim_{\rho\to1-0}4\pi\left(\frac{1}{2}\arcsin\rho-\frac{1}{2}\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)=\pi^2,$$

$$\therefore\quad\iiint\limits_V\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}=\pi^2.$$

§ 3. 重积分的应用

1347. 求由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围区域的体积.

[解] 抛物面和平面的交线在 xOy 平面上的投影为

$$x^2+y^2=x+y,\qquad 即\qquad y=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4x-4x^2}\right).$$

可见 x 的范围是 $1+4x-4x^2\geqslant0$. 解得 x 在

$$x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\quad 和\quad x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

之间. 令

$$y_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4x-4x^2}\right),\ y_2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4x-4x^2}\right),$$

则所求体积为

$$V=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1}^{y_2}(x+y-x^2-y^2)\,dy$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)\left[(x-x^2)+\frac{y_2+y_1}{2}-\frac{(y_2+y_1)^2-y_2y_1}{3}\right]dx$$

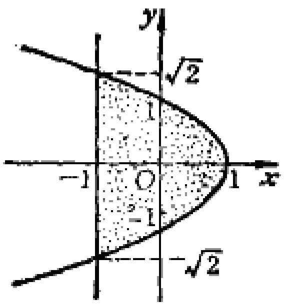
由于 $y_2+y_1=1$，$y_2-y_1=\sqrt{1+4x-4x^2}$，$y_2y_1=x^2-x$，所以

$$V=\frac{1}{6}\int_{x_1}^{x_2}(1+4x-4x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{12}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}dt\quad(令\ t=2x-1)$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta\quad(令 t=\sqrt{2}\sin\theta)=\frac{\pi}{8}.$$

1348. 求两抛物柱面 $z=1-x^2$，$x=1-y^2$ 和坐标面 $z=0$ 所围区域的体积.

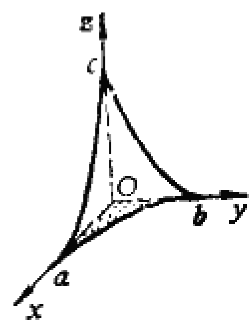
［解］ 所围区域的底部是 xOy 平面上由抛物线 $x=1-y^2$ 和直线 $x=-1$ 所围的平面区域，其顶部是曲面 $z=1-x^2$. 故所求体积为



$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{-1}^{1-y^2}(1-x^2)\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}-y^4+\frac{y^6}{3}\right)dy=\frac{64}{35}\sqrt{2}.$$

1349. 求由曲面 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(a,\ b,\ c>0)$ 和三个坐标面所围区域的体积.



［解］ 曲面的方程可以写为

$$z=c\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2,$$

它在 xOy 平面上的投影 D 是

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leqslant 1,$$

$x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. 故所求体积为

$$V=c\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2dy=\frac{bc}{6}\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4dx$$

$$=\frac{bc}{6}\cdot 2a\int_0^1 t^4(1-t)\,dt\quad\left(令 t=1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)$$

$$=\frac{abc}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{abc}{90}.$$

1350. 求由抛物面 $4z=x^2+y^2$，柱面 $2x=x^2+y^2$ 和坐标面 $z=0$ 所围区域的体积.

［解］ $V=\iint\limits_{2x\geqslant x^2+y^2} z\,dx\,dy=\frac{1}{4}\iint\limits_{2x\geqslant x^2+y^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$

利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

$$V=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\,dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3}{8}\pi.$$

1351．求由曲面 $xy=1$, $xy=4$, $xz=9$, $xz=16$, $yz=25$, $yz=36$ 所围区域的体积．

［解］ 所求体积是 $x>0$, $y>0$, $z>0$ 的部分的 2 倍．作代换 $xy=u$, $xz=v$, $yz=w$ 即

$$x=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}},\quad y=u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},\quad z=u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}.$$

变换的雅可比行列式是：

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}.$$

这时区域 V 变换为 V': $1\leqslant u\leqslant 4$, $9\leqslant v\leqslant 16$, $25\leqslant w\leqslant 36$．故所求体积为：

$$V=2\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=2\iiint\limits_{V'}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}du\,dv\,dw$$

$$=\int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}du\int_9^{16}v^{-\frac{1}{2}}dv\int_{25}^{36}w^{-\frac{1}{2}}dw=8.$$

1352．求由闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz\ (a>0)$ 所围区域的体积．

［分析］ 利用球坐标代换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 曲面方程变换为 $r^3=27a^3\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$．整个区域由四个对称的部分组成：

(i) $0\leqslant r\leqslant 3a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(ii) $0\leqslant r\leqslant 3a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}$, $\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(iii) $0\leqslant r\leqslant 3a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}$, $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$, $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$;

(iv) $0\leqslant r\leqslant 3a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}$, $\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

于是所求体积为上述任一部分体积的四倍.

［解］ 利用球坐标代换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$，$y=r\sin\varphi\cos\varphi$，$z=r\cos\varphi$，变换的雅可比行列式是

$$J=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \varphi)}=r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

故所求体积是

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{3a\sqrt[3]{\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}}r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=36a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=36a^3\times\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}a^3.$$

1353. 求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 内挖去锥体

$$z^2\sin^2\alpha\geqslant(x^2+y^2)\cos^2\alpha\quad(0<\alpha<\pi)$$

后剩下的体积.

［解］ 先求挖去的体积，利用球坐标代换 $x=r\cos\theta\sin\varphi$，$y=r\sin\varphi\sin\theta$，$z=r\cos\varphi$，变换的雅可比行列式是

$$J=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \varphi)}=r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

则球面方程变换为 $r=a$，锥面方程变换为 $\varphi=\alpha$，故所挖去的体积是

$$V_0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{a}r^2\sin\varphi\,dr=\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\alpha),$$

球体的体积是 $\frac{4}{3}\pi a^3$，故所求剩下的体积

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3-V_0=\frac{2}{3}\pi a^3(1+\cos\alpha).$$

1354. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ **内的平均值.**

［解］ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积是 πab，所求平均值

$$m=\frac{1}{\pi ab}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

其中 D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 利用广义极坐标代换 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, 得

$$m=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)\,r\,dr$$

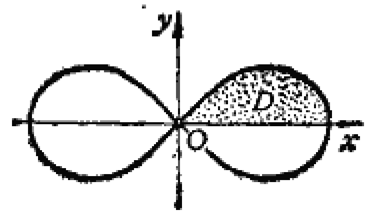
$$=ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2).$$

1355. 求由双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ 所围薄板的质量. 点 (x, y) 的密度与该点到原点的距离成正比（设比例系数是 k）.

［解］ 由对称性，所求质量

$$m=4k\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

其中 D 如图所示. 利用极坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 双纽线方程变换为 $r^2=a^2\cos 2\theta$, 于是



$$m=4k\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^2\cdot r\,dr$$

$$=a^4k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,d\theta=\frac{\pi a^4k}{8}.$$

1356. 求密度均匀的半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $y\geqslant 0$ $(a, b>0)$ 的重心.

［解］ 由对称性知道重心的横坐标 $\xi=0$. 半椭圆的面积是 $\frac{1}{2}\pi ab$, 故重心的纵坐标

$$\eta=\frac{2}{\pi ab}\iint\limits_{D}y\,dx\,dy\quad\left(D:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ y\geqslant 0\right)$$

$$=\frac{2}{\pi ab}\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy=\frac{b}{a^3\pi}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4b}{3\pi}.$$

1357. 求密度均匀的扇形的重心.

［分析］ 用极坐标较方便，这时扇形的表达式是 $r\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant\alpha$，扇形的面积是 $\frac{1}{2}a^2\alpha$。

［解］ 重心的坐标 (ξ,η) 是

$$\xi=\frac{2}{a^2\alpha}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{a^2\alpha}\int_0^{\alpha}d\theta\int_0^{a}r\cos\theta\cdot r\,dr=\frac{2a}{3\alpha}\sin\alpha.$$

$$\eta=\frac{2}{a^2\alpha}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{2}{a^2\alpha}\int_0^{\alpha}d\theta\int_0^{a}r\sin\theta\cdot r\,dr=\frac{2a}{3\alpha}(1-\cos\alpha).$$

［说明］ 因为

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{4a}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{\eta}{\xi}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

所以扇形的重心位于扇形顶角的角平分线上，重心到原点的距离是 $\frac{4a}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$。

1358．求由旋轮线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$a>0)$ 和 x 轴所围均匀薄板的重心．

［解］ 由对称性知道重心的横坐标 $\xi=\pi a$． 旋轮线在一个周期内的面积是 $3\pi a^2$。旋轮线和 x 轴的交点是 $(0,0)$ 和 $(0,2\pi a)$，所以重心的纵坐标是

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2a\pi}dx\int_0^{y}y\,dy=\frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2a\pi}y^2\,dx\\&=\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2d(t-\sin t)\\&=\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\frac{4a}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt\\&=\frac{16a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta=\frac{5}{6}a.\end{aligned}$$

1359．求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围均匀薄板的重心．

［解］ 由对称性知道重心的纵坐标 $\eta=0$． 心脏线所围图形的面积是 $\frac{3}{2}\pi a^2$，故其重心的横坐标

$$\xi=\frac{2}{3\pi a^2}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r\cos\theta\cdot r\,dr$$

$$=\frac{2a}{9\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3\,d\theta$$

$$=\frac{32a}{9\pi}\int_0^{\pi}(2\cos^2\varphi-1)\cos^6\varphi\,d\varphi\quad\left(令\ \varphi=\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{64a}{9\pi}\left\{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\varphi\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi\right\}=\frac{5}{6}a.$$

1360. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$ 的密度是

$$\rho=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

求其质量和重心.

〔解〕 质量 m 是

$$m=c\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

利用柱坐标变换 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$，其变换的雅可比行列式:

$$J=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ z)}=r\,dr\,d\theta\,dz.$$

球体的表达式变换为 $r^2+z^2\leqslant 2az$，密度的表达式变换为 $\dfrac{c}{\sqrt{r^2+z^2}}$，于是

$$m=c\int_0^{2a}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=2\pi c\int_0^{2a}(\sqrt{2az}-z)\,dz=\frac{4}{3}\pi a^2c.$$

再求重心 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 如下: 由对称性 $\xi=\eta=0$.

$$\zeta=\frac{c}{m}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az}\frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 $m=\dfrac{4}{3}c\pi a^2$. 同样利用柱坐标变换得

$$\zeta=\frac{c}{m}\int_0^{2a}z\,dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{c}{m}\int_0^{2a}2\pi z(\sqrt{2az}-z)\,dz=\frac{16}{15}\frac{\pi}{m}a^3c=\frac{4}{5}a.$$

1361. 求密度均匀的上半椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0$ 的重心.

［解］ 由对称性知道重心$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$中的 $\xi=\eta=0$, 半个椭球体的体积是 $\frac{2}{3}\pi abc$. 所以

$$\zeta=\frac{3}{2\pi abc}\iiint\limits_{D} z\,dx\,dy\,dz\quad\left(D:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0\right)$$

$$=\frac{3}{2\pi abc}\int_0^c z\,dz\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dx\,dy,$$

而椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}$ 的面积是 $\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$, 即

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}} dx\,dy=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$\therefore\quad \zeta=\frac{3}{2c}\int_0^c z\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{3}{8}c.$$

1362. 求密度均匀的椭圆板 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1(a,\ b>0)$分别对于两个坐标轴的转动惯量.

［解］ 设密度是 ρ(常数), 利用广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta$, 则椭圆板的表达式变换为 $r\leqslant 1$. 对于 x 轴的转动惯量

$$I_x=\rho\iint\limits_{D} y^2\,dx\,dy=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 b^2r^2\sin^2\theta\,abr\,dr$$

$$=ab^3\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr=\frac{1}{4}\pi ab^3\rho.$$

同样对于 y 轴的转动惯量

$$I_y=\rho\iint\limits_{D} x^2\,dx\,dy=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta\,a\,br\,dr=\frac{1}{4}\pi a^3b\rho.$$

1363. 求由平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,\ b,\ c>0)$ 和三个坐标平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 所围均匀物体分别对于坐标平面的转动惯量.

［解］ 设物体的密度为 ρ(常数). 对于坐标平面 $z=0$ 的转动惯量 I_{xy}

$$I_{xy}=\rho\iiint\limits_D z^2\,dx\,dy\,dz=\rho\int_0^c z^2\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}dy\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)}dx$$

$$=\rho\int_0^c z^2\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)dy$$

$$=\rho\int_0^c z^2\,\frac{1}{2c^2}\,ab(c-z)^2\,dz=\frac{\rho}{60}\,abc^3.$$

同样可得对于坐标平面 $x=0$ 和 $y=0$ 的转动惯量 I_{yz} 和 I_{zx} 分别是

$$I_{yz}=\frac{\rho}{60}\,a^3bc,\quad I_{zx}=\frac{\rho}{60}\,ab^3c.$$

1364. **求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$ $(a,\ b,\ c>0)$ 所围均匀物体(在柱面内的部分)分别对于三个坐标平面的转动惯量.**

［解］ 设物体的密度为1. 利用广义柱面坐标代换 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$, $z=cz'$, 变换的雅可比行列式 $|J|=abcr\,dr\,d\theta\,dz'$. 椭球面方程变换为 $r^2+z'^2=1$, 柱面方程变换为 $r=\cos\theta$, 则对于坐标平面 $z=0$ 的转动惯量

$$I_{xy}=\iiint\limits_D z^2\,dx\,dy\,dz=abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\,dr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}z'^2\,dz'$$

$$=\frac{2}{3}\,abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dr=\frac{2}{15}\,abc^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{4}{15}\,abc^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\cdot2}{5\cdot3}\right)=\frac{2}{225}\,abc^3(15\pi-16).$$

对于坐标平面 $x=0$ 的转动惯量

$$I_{yz}=\iiint\limits_D x^2\,dx\,dy\,dz'=a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,dr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}dz'$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=2a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92).$$

同样对于坐标平面 $y=0$ 的转动惯量

$$I_{zx}=\iiint_D y^2\,dx\,dy\,dz'=ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,dr\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}dz'$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=2ab^3c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272).$$

1365. 求密度为 1 的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$，$0\leqslant z\leqslant h\,(a,\ h>0)$ 对于 z 轴的转动惯量 I.

［解］ 利用柱面坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，则

$$I=\iiint_V(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dz\int_0^a r^2\ \,r\,dr=\frac{1}{2}\pi ha^4.$$

1366. 求密度均匀的椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 分别对于三个坐标轴的转动惯量.

［解］ 利用广义柱面坐标变换 $x=ar\cos\theta$，$y=br\sin\theta$，$z=cz'$. 变换的雅可比行列式 $|J|=abcr\,dr\,d\theta\,dz'$，椭球体的表达式变换为 $r^2+z'^2=1$. 对于 z 轴的转动惯量

$$I_z=\iiint_V(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}r^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,r\,dz'$$

$$=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=8abc\,\frac{a^2+b^2}{4}\pi\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{15}abc(a^2+b^2)\pi.$$

同样对于 y 轴和 x 轴的转动惯量分别是

$$I_y=\frac{4}{15}abc(a^2+c^2)\pi,\quad I_x=\frac{4}{15}abc(b^2+c^2)\pi.$$

1367. 求密度均匀的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant h$ $(a,\ h>0)$ 对于 z 轴上一单位质点 $(0,\ 0,\ c)$ 的引力，其中 $c>0$.

［解］ 设圆柱体的密度为 ρ（常数），又设引力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，由对称性知道 $F_x=F_y=0$.

$$F_z=k\rho\iiint\limits_V\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}dx\,dy\,dz$$

其中 k 是引力常数，V 是圆柱体.利用柱面坐标代换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 则

$$\begin{aligned}F_z&=k\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\,dr\int_0^h\frac{z-c}{[r^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}dz\\&=k\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\left\{\frac{1}{(r^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{[r^2+(h-c)^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}dr\\&=2\pi k\rho\left[\sqrt{r^2+c^2}-\sqrt{r^2+(h-c)^2}\right]\Big|_0^a\\&=2\pi k\rho\left[\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+(h-c)^2}-c+|h-c|\right].\end{aligned}$$

1368. 求密度均匀的球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 对 z 轴上单位质点 $(0,\ 0,\ c)(c>0)$ 的引力.

［解］ 设球体密度为 ρ（常数），所求的引力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，由对称性有 $F_x=F_y=0$.

$$F_z=k\rho\iiint\limits_V\frac{z-c}{[x^2+y^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}dx\,dy\,dz$$

其中 k 是引力常数，V 是球体. 利用球面坐标变换 $x=r\cos\theta\sin\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, 则

$$Fz=k\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\,dr\int_0^\pi\frac{(r\cos\varphi-c)\sin\varphi}{(r^2+c^2-2rc\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$$

在积分 $J=\int_0^\pi\frac{(r\cos\varphi-c)\sin\varphi}{(r^2+c^2-2rc\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$ 中令 $t^2=r^2+c^2-2rc\cos\varphi$, 则

$$J=\frac{1}{2c^2r}\int_{|r-c|}^{r+c}\left(\frac{r^2-c^2}{t^2}-1\right)dt=-\frac{1}{2c^2r}\left(2r-\frac{r^2-c^2}{|r-c|}-|r-c|\right)$$

$$=\begin{cases}0, & r>c,\\ -\frac{2}{c^2}, & r<c.\end{cases}$$

由此可得，当 $c\geqslant a$ 时，

$$F_z=-k\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{3}\cdot\frac{2}{c^2}=-k\rho\frac{4\pi a^3}{3c^2}.$$

当 $c<a$ 时　　$F_z=-k\rho 2\pi\cdot\frac{2}{c^2}\int_0^c r^2\,dr=-k\rho\frac{4\pi c}{3}.$

［说明］ 由上面的解答知：(i) 球体对空间任意一点的引力总是指向球心。(ii) 球体对球外任何单位质点的引力等于 $k\rho\frac{4\pi a^3}{3c^2}$（$c$ 是该点到球心的距离），这相当于球的质量 $\rho\frac{4}{3}\pi a^3$ 全部集中于球心时对该点的引力。(iii) 球体对球内任何单位质点的引力等于 $k\rho\frac{4\pi c}{3}=k\rho\frac{4\pi c^3}{3c^2}$（$c$ 是该点到球心的距离），这相当于半径为 c 的球对该点的引力，而球中半径大于 c 的那些部分对该点不产生引力。

§4. 曲线积分

(1) 第一类曲线积分

1369. 计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_C y\,ds$，C 是第一象限内的圆周 $x^2+y^2=a^2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$；

(2) $\int_C y\,ds$ 和 $\int_C |y|\,ds$，C 是右半圆周 $x^2+y^2=a^2$，$x\geqslant 0$；

(3) $\int_C (x+y)\,ds$，C 是以 (0, 0)，(1, 0)，(1, 1) 为顶点的三角形的边界；

(4) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，$C$ 是圆周 $x^2+y^2=ax$；

(5) $\int_C xy\,ds$, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

[解] (1) 利用参数方程. C 的方程是 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$, $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=a\,dt$,

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t\cdot a\,dt=a^2.$$

或者利用直角坐标. C的方程是 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant a$, $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

$$\therefore\quad I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2.$$

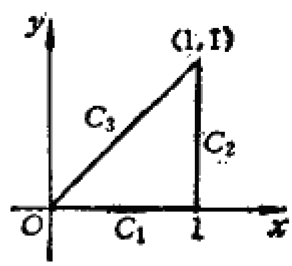
(2) 由对称性立即得出

$$\int_C y\,ds=0.$$

同样, 由对称性以及本题 (1) 得

$$\int_C |y|\,ds=2a^2.$$

(3) $I=\int_C (x+y)\,ds=\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}\right\}(x+y)\,ds$. C_1 的方程是 $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $ds=dx$,



$$\therefore\quad \int_{C_1}(x+y)\,ds=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

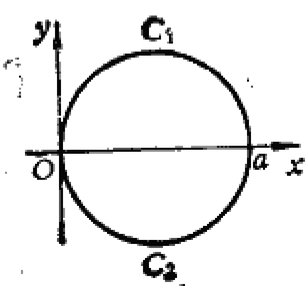
C_2 的方程是 $x=1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $ds=dy$,

$$\therefore\quad \int_{C_2}(x+y)\,ds=\int_0^1(1+y)\,dy=\frac{3}{2}.$$

C_3 的方程是 $y=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $ds=\sqrt{2}\,dx$,

$$\therefore\quad \int_{C_3}(x+y)\,ds=\int_0^1 2x\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}.$$

最后得 $I=2+\sqrt{2}$.



(4) $I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}\right\}\sqrt{x^2+y^2}\,ds$.

C_1的方程是 $y=\sqrt{ax-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant a$.

$$ds=\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}.$$

C_2 的方程是 $y=-\sqrt{ax-x^2}$，$0\leqslant x\leqslant a$，$ds=\dfrac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}$

$$\therefore\quad I=2\int_0^a\sqrt{x^2+(ax-x^2)}\cdot\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}=2a^2.$$

(5) C 的方程是 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$．$ds=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx$.

$$\therefore\quad I=\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot x\,dx$$

$$=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^4-(a^2-b^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{ab}{3}\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

1370．计算下列第一类曲线积分：

(1) $\int_C x^2ds$，C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 相交的圆周；

(2) $\int_C xyz\,ds$，C 的方程是 $x=t$，$y=\dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3}$，$z=\dfrac{1}{2}t^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$；

(3) $\int_C(x^2+y^2+z^2)ds$，C 是螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$．

［解］ (1) 因为曲线 C 关于 x, y, z 是对称的，所以

$$\int_C x^2\,ds=\int_C y^2\,ds=\int_C z^2\,ds$$

$$\therefore\quad I=\int_C x^2\,ds=\frac{1}{3}\int_C(x^2+y^2+z^2)\,ds=\frac{1}{3}\int_C a^2\,ds$$

$$=\frac{2}{3}a^3\pi\quad\left(\because\int_C ds\text{ 是圆周 }C\text{ 之长度}\right).$$

(2) $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{1+2t+t^2}\,dt=(1+t)\,dt$.

$$\therefore\quad \int_C xyz\,ds=\int_0^1 t\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2(1+t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

(3) $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$

$$\therefore\quad \int_C(x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8}{3}b^2\pi^3\right).$$

1371. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ $(0<x_1<x_2)$ 之间的质量. 已知曲线在每一点的密度与该点横坐标的平方成正比.

［解］ 密度 $\rho=kx^2$, $k>0$ 为一确定的常数. 有

$$m=\int_C\rho\,ds,$$

$$ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx,$$

$$\therefore\quad m=k\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{k}{3}[(1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}].$$

1372. 设曲线C 的方程是 $x=a$, $y=at$, $z=\frac{1}{2}at^2$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ a>0)$, 在点 $(x,\ y,\ z)$ 处密度 $\rho=\sqrt{\frac{2z}{a}}$, 求曲线C 的质量.

［解］ $m=\int_C\rho\,ds$, $\quad ds=a\sqrt{1+t^2}\,dt$,

$$\therefore\quad m=\int_0^1 at\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

1373. 求均匀曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$, $-\infty<t\leqslant 0$ 的重心$(x_0,\ y_0,\ z_0)$(设密度 $\rho=1$).

［解］ $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{3}\,e^t\,dt$,

$$m=\int_C ds=\int_{-\infty}^0\sqrt{3}\,e^t\,dt=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x_0=\frac{1}{m}\int_C x\,ds=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{0}e^t\cos t\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

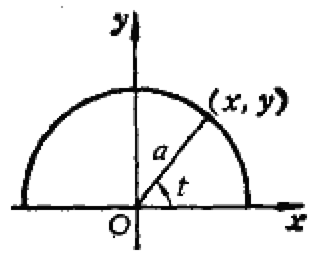
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t\,dt=\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{2t}}{5}(2\cos t+\sin t)\right]\Big|_A^0=\frac{2}{5}.$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_C y\,ds=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{0}e^t\sin t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\sin t\,dt=\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{2t}}{5}(2\sin t-\cos t)\right]\Big|_A^0=-\frac{1}{5}.$$

$$z_0=\frac{1}{m}\int_C z\,ds=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{0}e^t\cdot\sqrt{3}\,e^t\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{2t}\,dt=\frac{1}{2}.$$

1374. 求一均匀半圆周（设密度 $\rho=1$，半径为 a）对位于其中心的单位质点的引力.



［解］ 将坐标原点置于圆的中心，并且该半圆周为上半圆周．设引力为 $F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$. 由对称性得 $F_x=0$. 而

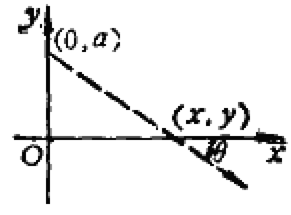
$$F_y=k\int_C\frac{\sin t}{a^2}\,ds.$$

（k 是引力常数），利用参数方程，半圆周是 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, $ds=a\,dt$,

$$\therefore\quad F_y=\frac{k}{a}\int_0^{\pi}\sin t\,dt=k\frac{2}{a}.$$

1375. 一单位质量的点与一无穷的均匀直线（设密度 $\rho=1$）的距离为 a，求直线对该点的引力.

［解］ 将直线作为 x 轴，质点位于 y 轴上．设引力为 $F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$，由对称性得 $F_x=0$，而



$$F_y=k\int_C\frac{\sin\theta}{r^2}\,ds.$$

其中 $ds=dx$，$r^2=x^2+a^2$，$\sin\theta=-\dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$，

$$\therefore\quad F_y=-ak\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{k}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=-k\frac{2}{a}.$$

(2) 第二类曲线积分

1376. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\int_C (x+y)dx+(x-y)dy$, C 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 沿正向(即逆时针方向);

(2) $\int_C y^2 dx+x^2 dy$, C 是上半椭圆周 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y\geqslant 0$, 沿顺时针方向;

(3) $\int_C (x-y)^2dx+2xy\,dy$, C 的方程是 $y=x^n$, $(n>0)$; 方向从(0, 0)到(1, 1);

(4) $\int_C (x^2+xy)dx+(x+y^2)dy$, C 是 $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ 的边界,沿正向;

(5) $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, C 的方程是 $y=1-|1-x|$, $0\leqslant x\leqslant 2$, 方向从(0, 0)到(2, 0)。

[解] (1) 利用参数方程. C 的方程是 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, t 从0变化到 2π,

$$\therefore \int_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[-a^2(\cos t+\sin t)\sin t+a^2(\cos t-\sin t)\cos t]dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-2\cos t\sin t-\sin^2 t)\,dt=0.$$

(2) 利用参数方程. C 的方程是 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, t 从 π 变化到0.

$$\therefore \int_C y^2 dx+x^2 dy=\int_\pi^0[b^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\,b\cos t]dt$$

$$=ab^2\int_0^\pi \sin^3 t\,dt-a^2b\int_0^\pi \cos^3 t\,dt=2ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=\frac{4}{3}ab^2.$$

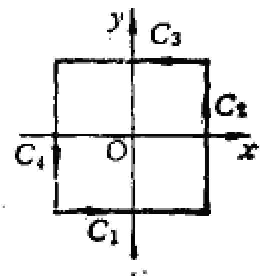
(3) $\int_C (x-y)^2\,dx+2xy\,dy=\int_0^1 (x-x^n)^2\,dx+\int_0^1 2x^{n+1}(nx^{n-1})\,dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{n+2}x^{n+2}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_0^1+2n\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{n-4}{3(n+2)}.$$

(4) $I=\int_C (x^2+xy)\,dx+(x+y^2)\,dy=\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\right\}(x^2+xy)\,dx$

$+(x+y^2)\,dy$

$=I_1+I_2+I_3+I_4$



C_1 的方程是 $y=-1$, x 从 -1 变化到 1, $dy=0$,

$$\therefore\quad I_1=\int_{-1}^1 (x^2-x)\,dx=\frac{2}{3}.$$

C_2 的方程是 $x=1$, y 从 -1 变化到 1, $dx=0$,

$$\therefore\quad I_2=\int_{-1}^1 (1+y^2)\,dy=2+\frac{2}{3}.$$

C_3 的方程是 $y=1$, x 从 1 变化到 -1, $dy=0$,

$$\therefore\quad I_3=\int_1^{-1} (x^2+x)\,dx=-\frac{2}{3}.$$

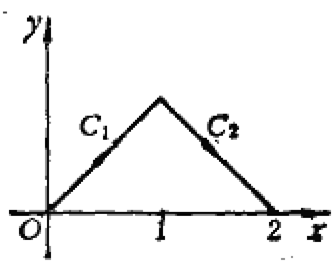
C_4 的方程是 $x=-1$, y 从 1 变化到 -1, $dx=0$,

$$\therefore\quad I_4=\int_1^{-1} (-1+y^2)\,dy=2-\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad I=I_1+I_2+I_3+I_4=4.$$

(5) $I=\int_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}\right\}(x^2+y^2)\,dx$

$+(x^2-y^2)\,dy=I_1+I_2$



C_1 的方程是 $y=x$, x 从 0 变化到 1.

$$\therefore\quad I_1=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}.$$

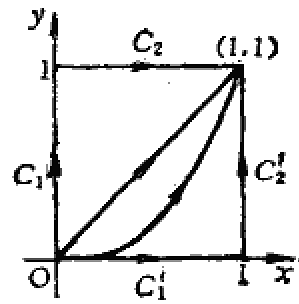
C_2 的方程是 $y=2-x$, x 从 1 变化到 2.

$$\therefore\quad I_2=\int_1^2 \{x^2+(2-x)^2-[x^2-(2-x)^2]\}\,dx=\frac{2}{3}.$$

由此得
$$I=I_1+I_2=\frac{4}{3}.$$

[说明]　第(4)题亦可用格林公式计算，参见第 1396 题。

1377. 计算曲线积分 $I=\int_C 2xy\,dx-x^2\,dy$, 其中 C 分别是(1) 连结(0, 0), (0, 1), (1, 1)的折线; (2) 直线 $y=x$; (3) 立方抛物线 $y=x^3$; (4) 连结 (0, 0), (1, 0), (1, 1) 的折线, 方向都是由(0, 0)到(1, 1).



[解] (1) $I=\int_C 2xy\,dx-x^2\,dy$

$$=\left\{\int_{C_1}+\int_{C_2}\right\}2xy\,dx-x^2\,dy$$

C_1 的方程是 $x=0$, y 由 0 变化到 1, $dx=0$,

$$\therefore \int_{C_1}2xy\,dx-x^2\,dy=0.$$

C_2 的方程是 $y=1$, x 由 0 变化到 1, $dy=0$,

$$\therefore \int_{C_2}2xy\,dx-x^2\,dy=\int_0^1 2x\,dx=1.$$

这样便得到 $I=1$.

(2) 沿直线 $y=x$, x 从 0 变化到 1, $dy=dx$,

$$\therefore I=\int_C 2xy\,dx-x^2\,dy=\int_0^1 2x^2\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

(3) 沿立方抛物线 $y=x^3$, x 从 0 变化到 1, $dy=3x^2\,dx$,

$$\therefore I=\int_C^1 2xy\,dx-x^2\,dy=\int_0^1 2x^4\,dx-\int_0^1 3x^4\,dx$$

$$=-\int_0^1 x^4\,dx=-\frac{4}{5}.$$

(4) $I=\int_C 2xy\,dx-x^2\,dy=\left\{\int_{C_1'}+\int_{C_2'}\right\}2xy\,dx-x^2\,dy.$

C_1' 的方程是 $y=0$, x 从 0 变化到 1, $dy=0$,

$$\therefore \int_{C_1'}2xy\,dx-x^2\,dy=0.$$

C_2' 的方程是 $x=1$, y 从 0 变化到 1, $dx=0$,

$$\therefore\quad \int_{C_2} 2xy\,dx - x^2\,dy = -\int_0^1 dy = -1$$

这样便得到 $I=-1$.

1378. 证明不等式 $\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant ML$, 其中 L 是曲线 C 的弧长, $M=\max\limits_{(x,y)\in C}\{\sqrt{(P(x,y))^2+(Q(x,y))^2}\}$. 并利用该不等式估计

$$I_R=\int_{C_R}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

C_R 是圆周 $x^2+y^2=R^2$. 再证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

[证]　由不等式 $(ax+by)^2\leqslant(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ 得

$$|ax+by|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\quad |P\,dx+Q\,dy|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

这样便得到

$$\left|\int_C Pdx+Qdy\right|\leqslant\int_C\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{dx^2+dy^2}\leqslant M\int_C\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$=M\int_C ds=ML.$$

估计积分 I_R 如下:

$$P^2+Q^2=\frac{y^2+x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}=\frac{R^2}{(x^2+y^2+xy)^4}.$$

利用参数方程 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, 则

$$P^2+Q^2=\frac{R^2}{(R^2+R^2\sin t\cos t)^4}=\frac{1}{R^6\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^4}$$

$$\therefore\quad M=\max_{(x,y)\in C_R}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}=\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\left\{\frac{1}{R^3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}\right\}=\frac{4}{R^3}$$

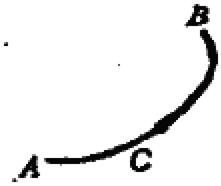
又 C_R 的弧长是 $2\pi R$, 故

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可得 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

1379. 求质量为 m 的质点从位置 $A(x_1, y_1, z_1)$ 位移到位置 $B(x_2, y_2, z_2)$ 时由重力所作的功(设 z 轴方向是垂直向上的).

［解］ 设质点由 A 沿任一路径 C 位移到 B. 因为重力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}=-mg\boldsymbol{k}$, g 是重力加速度. 所以由重力产生的功



$$W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int_C mg\,dz=-mg\int_{z_1}^{z_2}dz$$
$$=-mg(z_2-z_1).$$

［说明］ 上式表明：重力所产生的功仅与质点位移的高度有关，而与所沿的路径无关，也与质点的 x 坐标，y 坐标无关.

1380. 已知一引力场，在点 (x, y, z) 处力的方向向着坐标原点，力的大小与 r^2 成反比，这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求单位质点由位置 $A(x_1, y_1, z_1)$ 位移到位置 $B(x_2, y_2, z_2)$ 时(不通过原点)力场所作的功.

［解］ 已知力 $\boldsymbol{F}$ 的单位方向是 $-\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)$, 力的大小是 $\frac{a}{r^2}$ ($a>0$ 是一确定的常数)，则

$$\boldsymbol{F}=-a\left(\frac{x}{r^3}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r^3}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r^3}\boldsymbol{k}\right).$$

设质点由 A 沿任一路径 C 位移到 B. 则力场所作的功为:

$$W=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=-a\int_C \frac{x}{r^3}dx+\frac{y}{r^3}dy+\frac{z}{r^3}dz.$$

不难获得
$$d\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r^3},$$

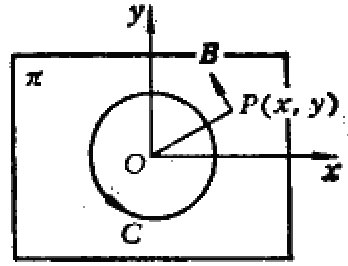
$$\therefore\quad W=a\int_C d\left(\frac{1}{r}\right)=a\int_{r_A}^{r_B}d\left(\frac{1}{r}\right)=a\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right).$$

其中 $r_A=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, $r_B=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$, 分别是 A, B 两点到原点的距离.

［说明］ 上式表示所作之功仅与 A, B 两点到原点的距离有关，而与所沿路径无关.

1381. 安倍环路定律. 电流 I 通过一根直导线，在垂直于导

线的平面 π 上产生磁场 $\boldsymbol{B}$，设导线与平面 π 的交点为 O，证明磁场 $\boldsymbol{B}$ 沿圆周 C 的环量 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=4\pi I$（其中 C 的中心是 O，半径是 a，逆时针方向）.



［证］ 坐标的安置如图所示．由物理学知道，在点 $P(x, y)$ 处的 $\boldsymbol{B}$ 的大小是 $\frac{2I}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，即点 P 到 O 的距离．$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$，服从右手法则，所以 $\boldsymbol{B}$ 的单位方向 $\boldsymbol{B}_0=-\frac{y}{r}\boldsymbol{i}+\frac{x}{r}\boldsymbol{j}$．由此得

$$\boldsymbol{B}=\frac{2I}{r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}).$$

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=2I\int_C \frac{-y}{r^2}\,dx+\frac{x}{r^2}\,dy.$$

利用参数方程：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，t 从 0 变化到 2π，这时 $r^2=a^2$.

$$\therefore\quad \int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=2I\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=4\pi I.$$

［说明］ 上式表明 沿圆周 C 的环量与圆周的半径无关，仅与电流强度 I 有关．更一般的结论见第 1403 题．

§5. 曲 面 积 分

(1) 第一类曲面积分

1382．求螺旋面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=cv$ 被 $x^2+y^2=a^2$，$z=0$，$z=4\pi c$ 所割的面积．

［解］ $(x_u, y_u, z_u)=(\cos v, \sin v, 0)$，

$$(x_v, y_v, z_v)=(-u\sin v, u\cos v, c).$$

$$E=\cos^2 v+\sin^2 v=1,\ F=0,$$

$$G=u^2\sin v^2+u^2\cos^2 v+c^2=u^2+c^2,$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{u^2+c^2}\,du\,dv,$$

$$A=\iint_D dS,\ D=\{(u, v)\,|\,0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 4\pi\}.$$

$$\therefore\quad A=\int_0^{4\pi}dv\int_0^a\sqrt{u^2+c^2}\,du=2\pi\left(a\sqrt{a^2+c^2}+c^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{a}\right).$$

1383. 求上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geqslant0$ 介于圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内的面积.

［解一］ 上半球面方程是

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

$$A=\iint_D dS,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}.$$

利用极坐标变换得

$$A=2\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r\,dr}{\sqrt{4-r^2}}=4(2-\sqrt{3})\pi.$$

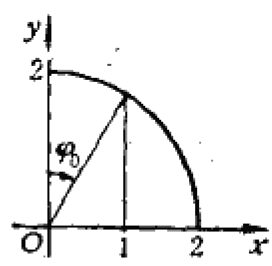
［解二］ 利用参数方程. 上半球的方程为 $x=2\sin\varphi\cos\theta, y=2\sin\varphi\sin\theta, z=2\cos\varphi$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, 被 $x^2+y^2=1$ 所截的球面方程同上, 但 $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, 其中 $\sin\varphi_0=\frac{1}{2}$, 即 $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$.

$$(x_\theta,\ y_\theta,\ z_\theta)=(-2\sin\varphi\sin\theta,\ 2\sin\varphi\cos\theta,\ 0),$$

$$(x_\varphi,\ y_\varphi,\ z_\varphi)=(2\cos\varphi\cos\theta,\ 2\cos\varphi\sin\theta,\ -2\sin\varphi).$$

$$\therefore\quad E=4\sin^2\varphi,\ F=0,\ G=4,$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=4\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi.$$



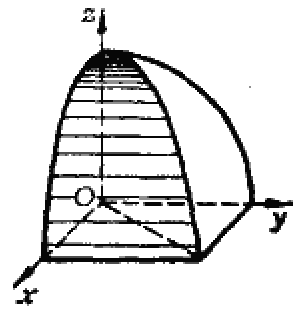
$$\therefore\quad A=\iint_D dS=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=-8\pi\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=4(2-\sqrt{3})\pi.$$

1384. 求两柱面 $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2(a>0)$ 相交所截下的面积.

［解］ 所求面积为图中阴影面积的 16 倍, 阴影部分的曲面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2}$. 它在 xOy 平面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant x\leqslant a\}.$$



$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ z_y=0$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx\,dy$$

$$=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\therefore\quad A=16\iint_D dS=16a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dy=16a\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a=16a^2.$$

1385. 求在球面坐标 $r,\ \theta,\ \varphi$ 表示下的曲面面积. 设曲面的方程为 $r=r(\theta,\ \varphi)$, $(\theta,\ \varphi)\in D$.

［解］ 因为球面坐标与直角坐标的关系式为

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi.$$

所以上述曲面的参数方程为:

$$x=r(\theta,\ \varphi)\sin\varphi\cos\theta,\ y=r(\theta,\ \varphi)\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\ (\theta,\ \varphi)\cos\varphi,$$

$(\theta,\ \varphi)\in D$. 这时有

$$(x_\theta,y_\theta,z_\theta)=((r_\theta\cos\theta-r\sin\theta)\sin\varphi,\ (r_\theta\sin\theta+r\cos\theta)\sin\varphi,\ r_\theta\cos\varphi),$$

$$(x_\varphi,\ y_\varphi,\ z_\varphi)=((r_\varphi\sin\varphi+r\cos\varphi)\cos\theta,\ (r_\varphi\sin\varphi+r\cos\varphi)\sin\theta,$$

$$r_\varphi\cos\varphi-r\sin\varphi).$$

由此得出 $\qquad E=r_\theta^2+r^2\sin^2\varphi,\ F=r_\theta\cdot r_\varphi,\ G=r^2\varphi+r^2,$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=\sqrt{(r^2+r_\varphi^2)\sin^2\varphi+r_\theta^2}\cdot r\,d\theta\,d\varphi.$$

$$\therefore\quad A=\iint_D dS=\iint_D\sqrt{(r^2+r_\varphi^2)\sin^2\varphi+r_\theta^2}\cdot r\,d\theta\,d\varphi.$$

1386. 求闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$ 的面积.

［解］ 作球面坐标代换 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 则闭曲面的方程为

$$r^2=a^2\sin^2\varphi\cos2\theta,\ \text{即}\quad r=a\sin\varphi\sqrt{\cos2\theta},$$

其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

$$r_\varphi=a\cos\varphi\sqrt{\cos2\theta},\quad r_\theta=-\frac{a\sin\varphi\sin2\theta}{\sqrt{\cos2\theta}},$$

$$dS=\sqrt{(r^2+r_\varphi'^2)\sin^2\varphi+r_\theta'^2}\,r\,d\theta\,d\varphi=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,r\,d\theta\,d\varphi$$

$$=a^2\sin^2\varphi\,d\theta\,d\varphi.$$

$$\therefore\quad A=\iint_D dS=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^\pi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi^2a^2}{2}.$$

1387. 计算第一类曲面积分 $I=\iint_S(x^2+y^2)dS$, S **是抛物面** $z=2-(x^2+y^2)$, $z\geqslant 0$.

[解] $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$,

$$\therefore\quad I=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

$$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2\}.$$

利用极坐标变换,得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\quad(令\ 4r^2=t)$$

$$=\frac{1}{32}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^8 t\sqrt{1+t}\,dt=\frac{149}{30}\pi.$$

1388. 计算第一类曲面积分 $I=\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\,dS$, S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$. **并给出这一积分的物理解释.**

[解一] 利用参数方程. 球面 S 的方程为

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\ y=R\sin\varphi\sin\theta,\ z=R\cos\varphi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

这时 $(x_\varphi,\ y_\varphi,\ z_\varphi)=(R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ -R\sin\varphi)$,

$$(x_\theta,\ y_\theta,\ z_\theta)=(-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ 0),$$

$$E=R^2,\ F=0,\ G=R^2\sin^2\varphi,$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,d\theta=R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=R\sin\varphi$$

$$\therefore\quad I=R^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin^2\varphi\,d\varphi=\pi^2R^3.$$

其物理解释是: 如果视 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 是球面 S 上点 $(x,\ y,\ z)$ 的密度, 则

上述积分表示 S 的质量.

［解二］ 利用直角坐标. 设 S_0 是 S 的上半面, 即 S_0 的方程是

$$z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,,$$

那么由对称性,

$$I=2\iint_{S_0}\sqrt{x^2+y^2}\,dS,$$

其中 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy$, 所以

$$I=2\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy,$$

$$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}.$$

利用极坐标变换, 得

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r\,\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr=\pi^2R^3.$$

1389. 求均匀的抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$, $z\geqslant 0$ 的重心 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ (设密度 $\rho=1$).

［解］ 由对称性知道 $x_0=y_0=0$. 又

$$z_0=\frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS},\quad \text{其中}\quad dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

而 $$\iint_S dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr$$

$$=\frac{13}{3}\pi.$$

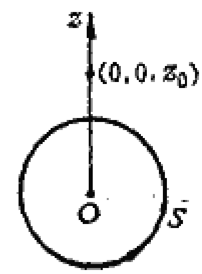
$$\iint_S z\,dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\quad (\text{令 }1+4r^2=t^2)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^3\frac{9-t^2}{4}\cdot t\cdot\frac{t}{4}\,dt=\frac{37}{10}\pi.$$

$$\therefore\quad z_0=\frac{111}{130}.$$

1390. 求均匀球面对一单位质点的引力(设此点不在球面上，并且球面的密度 $\rho=1$).



[解] 选取直角坐标，球心是原点，单位质点在 z 轴上，距原点的距离是 z_0，球面方程是 $x^2+y^2+z^2=R^2$.设球面对该点的引力 $F=(F_x, F_y, F_z)$.由对称性知 $F_x=F_y=0$. 而

$$F_z=k\iint\frac{z-z_0}{r^3}\,dS \quad (k\text{ 为引力常数})$$

利用球面坐标变换 $x=R\sin\varphi\cos\theta$, $y=R\sin\varphi\sin\theta$, $z=R\cos\varphi$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $dS=R^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$

$$\therefore\quad F_z=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{R\cos\varphi-z_0}{(R^2+z_0^2-2Rz_0\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}R^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

令 $R^2+z_0^2-2Rz_0\cos\varphi=t^2$, 对 φ 微分后得 $\sin\varphi\,d\varphi=\frac{t}{Rz_0}dt$,

$$R\cos\varphi-z_0=\frac{R^2-z_0^2-t^2}{2z_0}$$

$$\therefore\quad F_z=\frac{\pi Rk}{z_0^2}\int_{|R-z_0|}^{(R+z_0)}\left(\frac{R^2-z_0^2}{t^2}-1\right)dt$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } z_0<R,\\ -\dfrac{4\pi R^2k}{z_0^2}, & \text{当 } z_0>R.\end{cases}$$

[说明] 上面的计算结果表明：当质点在球的内部时，球面对该点的引力为 0；当质点在球的外部时，球面对该点的引力等效于球面的质量(它等于 $4\pi R^2$) 全部集中于球心 O, 点 O 对该点的引力.

(2) 第二类曲面积分

1391. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$, S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 积分沿 S 的外侧.

[解] 先计算 $\iint\limits_S z^2dx\,dy$. 将 S 划分为上半球面 S_2 和下半球面 S_1, 它

们的方程分别是

$$S_2:\quad z=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

$$S_1:\quad z=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

$$\therefore\quad \iint\limits_S z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{S_2} z^2\,dx\,dy+\iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy,$$

其中 S_2 是上侧，S_1 是下侧，所以

$$\iint\limits_S z^2\,dx\,dy=\iint\limits_D\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2 dx\,dy$$

$$-\iint\limits_D\left[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2 dx\,dy$$

$$=4c\iint\limits_D\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy,$$

$D=\{(x,\ y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2\}$. 利用极坐标代换 $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_S z^2\,dx\,dy=4c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\sqrt{R-r^2}\,r\,dr=\frac{8}{3}\cdot\pi cR^3.$$

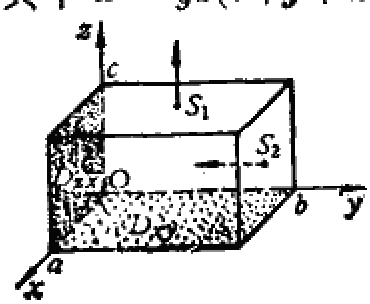
由对称性，同样可得

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz=\frac{8}{3}\pi aR^3,\quad \iint\limits_S y^2\,dz\,dx=\frac{8}{3}\pi bR^3.$$

$$\therefore\quad \iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

［说明］　此题可利用高斯公式计算，参见第 1401 题.

1392. 计算第二类曲面积分 $\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{a}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，$S$ 是由 S_1 和 S_2 组成，如图所示.



［解］　$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_S xyz\,dy\,dz+xyz\,dz\,dx+xyz\,dx\,dy$$

$$\iint_{S_1} xyz\,dy\,dz+xyz\,dz\,dx+xyz\,dx\,dy=\iint_{S_1} xyz\,dx\,dy$$

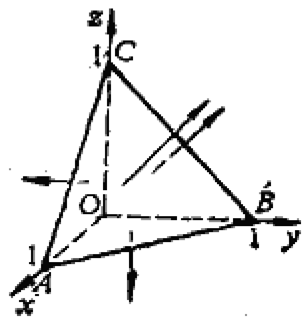
$$=\iint_{D_{xy}} cxy\,dx\,dy=c\int_0^a x\,dx\int_0^b y\,dy=\frac{c}{4}a^2b^2.$$

$$\iint_{S_2} xyz\,dy\,dz+xyz\,dz\,dx+xyz\,dx\,dy=\iint_{S_1} xyz\,dz\,dx$$

$$=-\iint_{D_{xz}} bxz\,dz\,dx=-b\int_0^a x\,dx\int_0^c z\,dz=-\frac{b}{4}a^2c^2.$$

$$\therefore\quad \iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{a^2bc}{4}(b-c).$$

1393. 计算 $\iint_S (x+1)dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$，$S$ 是由顶点为(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) 的四面体的表面，积分沿外侧.



[解] 将四面体的表面划分为四片：OBA, OCB, OAC, ABC，那么

$$\iint_{OBA} (x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$$

$$=\iint_{OBA} dx\,dy=-\iint_{D_{xy}} dx\,dy$$

$$(D_{xy}=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\})$$

$$=-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy=-\frac{1}{2}.$$

$$\iint_{OCB} (x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy=\iint_{OCB} (x+1)\,dy\,dz$$

$$=-\iint_{D_{yz}} dy\,dz\quad (D_{yz}=\{(y,\ z)\,|\,0\leqslant z\leqslant 1-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\})$$

$$=-\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz=-\frac{1}{2}.$$

$$\iint_{OAC} (x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy=\iint_{OAC} y\,dx\,dz=0\quad (\because\ \ y=0).$$

平面 ABC 的方程是 $x+y+z=1$. 故

$$\iint\limits_{ABO}(x+1)\,dy\,dz=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z+1)\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-z)\,dz=\frac{2}{3}.$$

$$\iint\limits_{ABO}y\,dz\,dx=\iint\limits_{D_{zx}}(1-x-z)\,dz\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)\,dz=\frac{1}{6}.$$

$$\iint\limits_{ABC}dx\,dy=\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=\frac{1}{2}.$$

最后得
$$\iint\limits_{S}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy=\frac{1}{3}.$$

［说明］ 此题可以用高斯公式计算，参见第 1405 题.

1394. 计算 $\iint\limits_{S}x^3\,dy\,dz$, S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\geqslant 0$, 积分沿 S 的外侧.

［解］ 将 S 划分为前半片 S_2 和后半片 S_1，它们的方程分别是

$$S_2:\ x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}},\quad S_1:\ x=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}},$$

$$\therefore\quad \iint\limits_{S}x^3\,dy\,dz=\iint\limits_{S_2}x^3\,dy\,dz+\iint\limits_{S_1}x^3\,dy\,dz,$$

其中积分沿 S_2 的前侧，沿 S_1 的后侧. 故

$$\iint\limits_{S_2}x^3\,dy\,dz=\iint\limits_{D}a^3\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}dy\,dz,$$

其中 $D=\left\{(y,z)\,\middle|\,\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ \ z\geqslant 0\right\}$, 利用广义极坐标变换 $y=br\cos\theta$, $z=cr\sin\theta$, 得:

$$\iint\limits_{S_2}x^3\,dy\,dz=a^3\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,r\,dr=\frac{1}{5}\pi a^3bc.$$

$$\iint\limits_{S_1}x^3\,dy\,dz=-\iint\limits_{D}\left[-a^3\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dy\,dz$$

$$=a^3\iint\limits_{D}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}dy\,dz=\frac{1}{5}\pi a^3bc.$$

$$\therefore \quad \iint_S x^3\,dy\,dz=\frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

1395. 高斯定律. 证明由点电荷 q 产生的静电场 $\boldsymbol{E}$ 通过以点电荷为中心的球面 S 的通量 $\iint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi q$.

［证］ 设点电荷在原点 O. 空间任一点 $M(x, y, z)$ 处的电场 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^2}\boldsymbol{r}_0$, 其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是 $\overrightarrow{OM}$ 上的单位向量, r 是点 M 到原点 O 的距离. 设球面 S 的半径为 R, S 上的通量是

$$\Phi=\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (\text{沿 } S \text{ 的外侧})$$

因为在球面 S 上 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 $d\boldsymbol{S}$ 的方向一致,故

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{E}|\,dS=\frac{q}{R^2}\,dS,$$

$$\therefore \quad \Phi=\iint_S \frac{q}{R^2}\,dS=4\pi q \quad \left(\because \iint_S dS \text{ 是 } S \text{ 的面积}\right)$$

［说明］ 上述结果表明, 通量 Φ 与球面的半径无关, 仅与点电荷 q 有关. 更一般的结论见第 1408 题.

§ 6. 格林公式、高斯公式、斯托克斯公式、向量分析

1396. 计算 $\int_C (x^2+xy)dx+(x+y^2)dy$, C 是正方形 $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ 的边界,逆时针方向.

［解］ 利用格林公式,有

$$\int_C (x^2+xy)\,dx+(x+y^2)\,dy=\iint_D (1-x)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}(1-x)\,dx=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}dx=4.$$

［说明］ 直接计算上述积分,见第 1376(4) 题.

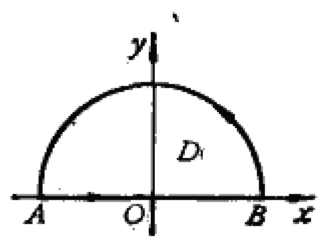
1397. 计算 $\int_C (y+3x)dx+(2y-x)dy$, C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 逆时针方向.

[解] 利用格林公式,有

$$\int_C (y+3x)\,dx+(2y-x)\,dy=\iint_D(-2)\,dx\,dy=-2\pi ab.$$

1398. 计算 $\int_C xy^2dy-x^2y\,dx$, C 是上半圆周 $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$, 方向从 $B(1,\ 0)$ 到 $A(-1,\ 0)$.

[解] 连接 AB, 方向自 A 到 B, 则由格林公式得



$$\int_{C+\overrightarrow{AB}} xy^2\,dy-x^2y\,dx=\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^2\cdot r\,dr=\frac{1}{4}a^4\pi.$$

$$\therefore\quad \int_C xy^2\,dy-x^2y\,dx=\frac{1}{4}a^4\pi-\int_{\overrightarrow{AB}} xy^2\,dy-x^2y\,dx.$$

而

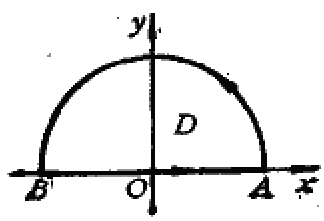
$$\int_{\overrightarrow{AB}} xy^2\,dy-x^2y\,dx=0\quad(\because\ y=0).$$

$$\therefore\quad \int_C xy^2\,dy-x^2y\,dx=\frac{1}{4}a^4\pi.$$

1399. 设 C 是上半圆周 $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, 方向从 $A(1,\ 0)$到 $B(-1,\ 0)$, 证明对任何连续可微函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$, 有

$$\int_C[\varphi(x)-2y]dx+[3x+\psi(y)]dy+\int_{-1}^1\varphi(x)dx=\frac{5}{2}\pi.$$

[证] 连接 AB, 方向自 B 到 A. 由格林公式得:



$$\int_{C+\overrightarrow{BA}}[\varphi(x)-2y]dx+[3x+\psi(y)]dy$$

$$=\iint_D(3+2)\,dx\,dy=\frac{5}{2}\pi,$$

$$\therefore\quad \int_C[\varphi(x)-2y]dx+[3x+\psi(y)]dy$$

$$=\frac{5}{2}\pi-\int_{\overrightarrow{BA}}[\varphi(x)-2y]dx+[3x+\psi(y)]dy$$

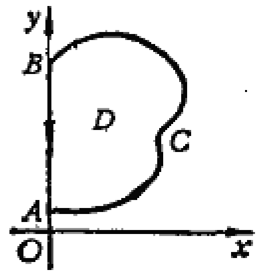
$$=\frac{5}{2}\pi-\int_{\overrightarrow{BA}}[\varphi(x)-2y]dx=\frac{5}{2}\pi-\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx,$$

即 $$\int_C[\varphi(x)-2y]dx+[3x+\psi(y)]dy+\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=\frac{5}{2}\pi.$$

1400. 设 C 为连接点 $A(0,\ c)$ 和点 $B(0,\ d)(c<d)$ 的任一逐段光滑曲线，方向由 A 到 B. 它和线段 AB 所围图形的面积为 A，又设 $\varphi(y)$ 是连续可微函数，计算

$$\int_C[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy.$$

［解］ 连接 BA，方向从 B 到 A. 由格林公式得



$$\int_{C+\overrightarrow{BA}}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=\iint_D(\varphi'(y)e^x-\varphi'(y)e^x+m)dxdy$$

$$=m\iint_D dxdy=mA.$$

$$\therefore\quad \int_C[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mA-\int_{\overrightarrow{BA}}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mA-\int_{\overrightarrow{BA}}[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mA-\int_d^c\varphi'(y)dy+\int_d^c m\,dy$$

$$=m(A+c-d)+\varphi(d)-\varphi(c).$$

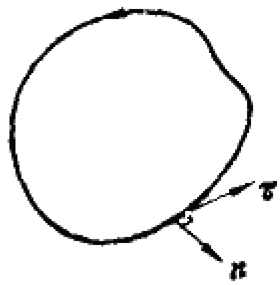
1401. 设函数 u, v 二阶连续可微，记 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$，证明：

(1) $$\iint\limits_D v\Delta u\,dx\,dy=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy+\int v\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 C 是区域 D 的边界，由逐段光滑的曲线组成，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 沿 C 的外法向 n 的方向导数，C 的方向(对 D) 是正向；

(2) $$\iint\limits_D\Delta u\,dx\,dy=\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds;$$

(3) $$\iint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)dx\,dy=\int_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds.$$



[分析] 将第一类曲线积分 $\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds$ 化为第二类曲线积分，再利用格林公式化为 D 内的二重积分。

[证] (1) 记 τ 是 C 的切线方向，那么

$$\frac{dx}{ds}=\cos(\tau,x)=-\cos(n,y),$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos(\tau,y)=\cos(n,x).$$

则

$$\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_C v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right)ds$$
$$=\int_C\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+v\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

由格林公式，得

$$\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$
$$=\iint\limits_D v\Delta u\,dx\,dy+\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

这样便证明了(1)。

(2) 在(1)中特别令 $v=1$ 即得

$$\iint_D \Delta u\,dx\,dy=\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

(3) 将 $\iint_D u\Delta v\,dx\,dy$ 和 $\iint_D v\,\Delta u\,dx\,dy$ 分别运用(1)的结果，然后相减即得(3).

1402. 设图形 D 是由逐段光滑闭曲线 C 围成，证明 D 的面积

$$A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx.$$

并由此计算下列曲线所围图形的面积.

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ a>0)$；

(2) 笛卡尔叶形线 $x^3+y^3=3axy,\ (a>0)$. 提示：令 $y=tx$.

［证］ 利用格林公式

$$\int_C x\,dy-y\,dx=\iint_D(1+1)\,dx\,dy=2\iint_D dx\,dy=2A,$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx.$$

再由此公式计算下列曲线所围图形的面积:

(1) $A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx$

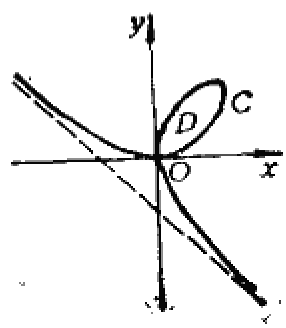
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$=6a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) 令 $y=tx$, 代入方程得

$$x^3+t^3x^3=3atx^2.$$



解得 $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$, 这就是笛卡尔叶形线的参数方程. 当 t 从 0 变化到 $+\infty$ 时，相应的图形正好是第一象限内的闭曲线，方向是逆时针方向，所以

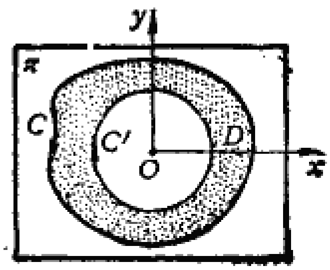
$$A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_C xd(tx)-y\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_C x(t\,dx+x\,dt)-tx\,dx=\frac{1}{2}\int_C x^2\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt=\frac{3}{2}a^2\left(-\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{2}a^2.$$

1403. **安倍环路定律. 电流 I 通过一根直导线, 在垂直于导线的平面 π 上产生磁场 $\boldsymbol{B}$, 设导线与平面 π 的交点为 O. 证明磁场 $\boldsymbol{B}$ 沿任一逐段光滑闭曲线 C 的环量 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=4\pi I$ (其中 O 在 C 所围区域的内部).**

[证] 坐标设置如图所示. 设 C' 是以 O 为中心的圆周, 顺时针方向, 并且 C' 在 C 所围区域的内部. 又设 D 是以 C 和 C' 为边界的区域. $\boldsymbol{B}=\frac{2I}{r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$, 其中 (x, y) 是平面 π 上任一点 (非原点),



$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由格林公式, 有

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}+\int_{C'}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=2I\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\right)dx\,dy$$

$$=2I\iint_D\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\,dy=0,$$

$$\therefore\quad \int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int_{C'}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

由第 1381 题知道

$$\int_{C'}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=-4\pi I,$$

所以

$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=4\pi I.$$

[说明] 上述结果表明环量 $\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$ 与 C 无关, 仅与电流 I 有关.

1404. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$，$S$ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，沿外侧.

[解] 利用高斯公式，

$$I=\iint\limits_{S} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy=\iiint\limits_{V}(2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz.$$

作代换 $x=a+u$，$y=b+v$，$z=c+w$，则

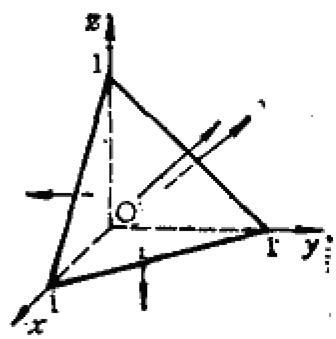
$$I=2\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2}(a+b+c+u+v+w)\,du\,dv\,dw$$

$$=2\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2}(a+b+c)\,du\,dv\,dw=\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3.$$

[说明] 直接计算上述积分参见第1391题.

1405. 计算 $\iint\limits_{S}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$，$S$ 是由顶点为 $(0,0,0)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 的四面体的表面，积分沿外侧.

[解] 利用高斯公式，有



$$I=\iint\limits_{S}(x+1)\,dy\,dz+y\,dz\,dx+dx\,dy$$

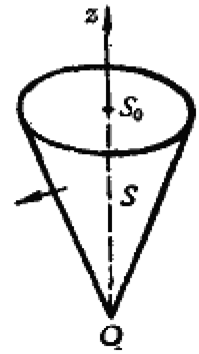
$$=\iiint\limits_{V}(1+1+0)\,dx\,dy\,dz$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\frac{1}{3}.$$

[说明] 直接计算上述积分参见第1393题.

1406. 计算 $\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$，$S$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$，$0\leqslant z\leqslant h$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 S 上法向的方向余弦，并且 $\cos\gamma\leqslant 0$.

[解] 作平面 $z=h$，它和锥面所围的空间记为 V. V 的边界由 S 和 S_0



组成，S_0 的法向朝上．由高斯公式：

$$I=\iint\limits_{S+S_0}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$$

$$=2\iiint\limits_{D}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

作柱面坐标变换：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$，则

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h r\,dr\int_r^h[r(\cos\theta+\sin\theta)+z]dz=\frac{\pi}{2}h^4.$$

又：

$$\iint\limits_{S_0}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS=\iint\limits_{S_0}z^2\,dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leq h^2}h^2\,dx\,dy=\pi h^4,$$

$$\therefore\quad\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS=\frac{\pi}{2}h^4-\pi h^4=-\frac{\pi}{2}h^4.$$

1407．设 S 是光滑的闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 是一个固定的方向，证明

$$\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})\,dS=0$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向．

［证］ 设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 和 $\cos\alpha_0$，$\cos\beta_0$，$\cos\gamma_0$，α_0，β_0，γ_0 是常数．则

$$\cos(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{l})=\cos\alpha\cos\alpha_0+\cos\beta\cos\beta_0+\cos\gamma\cos\gamma_0,$$

$$\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,dS=\iint\limits_{S}(\cos\alpha\cos\alpha_0+\cos\beta\cos\beta_0+\cos\gamma\cos\gamma_0)\,dS.$$

利用高斯公式，有

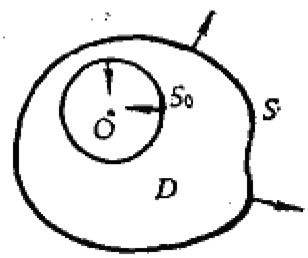
$$\iint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,dS=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0+\frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma_0\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{V}0\,dx\,dy\,dz=0.$$

1408．高斯定律．证明点电荷 q 产生的静电场 $\boldsymbol{E}$ 通过任一光滑闭曲面 S（点电荷在此曲面所围的区域内）的通量

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi q.$$

［证］ 设点电荷在原点 O, S_0 是任一球面，球心为 O，法方向朝向点 O，并且 S_0 含在 S 所围的区域内．又设区域 D 的边界由 S 和 S_0 组成．空间任一点 (x, y, z) 处的电场



$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^2}\boldsymbol{r}_0=\frac{q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).$$

由高斯定理，有

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]dx\,dy\,dz$$

$$=0.$$

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

$$\therefore\quad \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=-\iint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

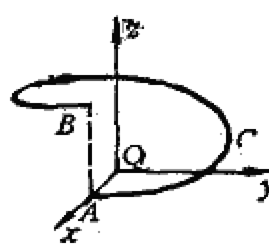
由第 1395 题知道

$$\iint_{S_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=-4\pi q.\quad \therefore\quad \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=4\pi q.$$

［说明］ 这一结果表明通量与曲面无关，仅与电荷 q 有关．

1409. 计算 $\int_C (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$, C 是螺旋线 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=\frac{h}{2\pi}\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，方向自 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, h)$．

［解］ 连接 AB，方向是 B 到 A，C 和 $\overline{BA}$ 构成一条闭曲线．利用斯托克斯公式，有

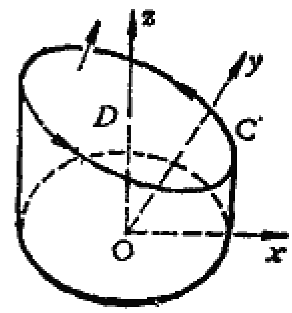


$$\int_{C+\overline{BA}}(x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy+(z^2-xy)\,dz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy\end{vmatrix}=\iint_S 0\,dy\,dz+0\,dz\,dx+0\,dx\,dy=0$$

$$\therefore \int_C (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$
$$=-\int_{\overline{BA}} (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$
$$=-\int_{\overline{BA}} (z^2-xy)dz=-\int_h^0 z^2dz=\frac{h^3}{3}.$$

1410. 计算 $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，$C$ 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ 的交线，其方向如图所示.



［解］ 交线 C 是一椭圆．设在平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上由椭圆 C 所围的区域为 D，其法方向与 z 轴的夹角为锐角．由斯托克斯公式，有

$$\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$
$$=\iint_D \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\iint_D dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy$$

后一积分等于 D 在三个坐标平面上投影面积之和，设 D 的面积为 A，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 D 的法方向余弦，那么

$$\iint_D dy\,dz+dz\,dx+dx\,dy=A(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

而 D 的面积 $A=\pi a\sqrt{a^2+h^2}$（椭圆的面积），

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right),$$

所以　　$$\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\pi a(h+a).$$

1411. 计算 $\int_C xdx+(x+z)dy+ydz$，C 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$ 和柱面 $ax-x^2=y^2$ 的交线．球面的方向是外法向，C 的方向与球面的方向服从右手法则．

［解］ 利用斯托克斯公式，有

$$\int_C x\,dx+(x+z)\,dy+y\,dz=\iint_D \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & x+z & y \end{vmatrix}$$

$$=\iint_D dx\,dy=\iint_{y^2\leqslant ax-x^2} dx\,dy=\frac{\pi}{4}a^2.$$

1412. 设 $f(t)$ 连续可微，C 是任一逐段光滑的曲线，求

$$\int_C f(x^\alpha+y^\alpha)(x^{\alpha-1}dx+y^{\alpha-1}dy)\quad(\alpha\geqslant 1).$$

［解］ 设 $P=f(x^\alpha+y^\alpha)x^{\alpha-1}$, $Q=f(x^\alpha+y^\alpha)y^{\alpha-1}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f'(t)\,\alpha y^{\alpha-1}x^{\alpha-1}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\therefore\quad \int_C P\,dx+Q\,dy=\int_C f(x^\alpha+y^\alpha)(x^{\alpha-1}\,dx+y^{\alpha-1}\,dy)=0.$$

1413. 下列微分表达式何者是全微分，并求其原函数：

(1) $e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy$;

(2) $(4x^3y^3-3y^2+5)dx+(3x^4y^2-6xy-4)dy$;

(3) $(2x^3y+e^y)dx+(3xy^4-e^{xy})dy$.

［解］ (1) 设 $P=e^x\cos y$, $Q=-e^x\sin y$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $P\,dx+Q\,dy$ 是全微分，其原函数 $u(x,y)$ 是

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y)\,dy+C$$

$$=\int_0^x e^x\,dx-\int_0^y e^x\sin y\,dy+C$$

$$=e^x+e^x\cos y-e^x+C=e^x\cos y+C.$$

(2) 设 $P=4x^3y^3-3y^2+5$, $Q=3x^4y^2-6xy-4$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12x^3y^2-6y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $P\,dx+Q\,dy$ 是全微分，其原函数 $u(x,y)$ 是

$$u(x,\ y)=\int_0^x P(x,\ 0)\,dx+\int_0^y Q(x,\ y)\,dy+C$$

$$=\int_0^x 5\,dx+\int_0^y (3x^4y^2-6xy-4)\,dy+C$$

$$=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C.$$

(3) 设 $P=2x^3y+e^y$, $Q=3xy^4-e^{xy}$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x^3+e^y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3y^4-ye^{xy},\quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $P\,dx+Q\,dy$ 不是全微分.

1414. 计算 $\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, 其中 C 是任一不经过原点的逐段光滑的闭曲线.

［解］ 设 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, 因为当 $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ 时,

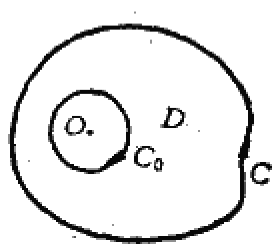
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

则有:

(1) 当 C 所围区域的内部不含有原点时

$$\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0.$$

(2) 当 C 所围区域的内部含有原点 O 时, 又若 C 按逆时针方向围绕点 O 一圈 (如图), 设 C_0 是以 O 为中心以某正数 a 为半径的圆周, 方向是顺时针, 区域 D 的边界由 C 和 C_0 组成. 则由格林公式有



$$\int_C P\,dx+Q\,dy+\int_{C_0} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

$$\therefore\quad \int_C P\,dx+Q\,dy=-\int_{C_0} P\,dx+Q\,dy.$$

利用参数方程, C_0 的方程是 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, t 从 2π 变到 0, 故

$$\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=-\int_{C_0} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=-\int_{2\pi}^0 \frac{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}{a^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} dt=2\pi.$$

由此可知，当 C 所围区域内部含有原点 O，C 按逆时针方向绕原点 n_1 圈，按顺时针方向绕原点 n_2 圈，那么

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2n_1\pi - 2n_2\pi = 2(n_1 - n_2)\pi.$$

1415. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是连续可微的向量场，φ 是连续可微的数量场，求：

(1) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})$（即 $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})$）；(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（即 $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$）；

(3) $\nabla\cdot(\nabla\varphi)$（即 $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$）。

［解］ (1) 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) &= \nabla\cdot(\varphi a_1\boldsymbol{i}+\varphi a_2\boldsymbol{j}+\varphi a_3\boldsymbol{k})\\ &= \frac{\partial(\varphi a_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi a_2)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi a_3)}{\partial z}\\ &= \varphi\frac{\partial a_1}{\partial x}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial a_2}{\partial y}+a_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial a_3}{\partial z}+a_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ &= \varphi\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_3\\ &= \varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{a}$ 同(1)，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_2b_3-a_3b_2)+\frac{\partial}{\partial y}(a_3b_1-a_1b_3)+\frac{\partial}{\partial z}(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= b_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)+b_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+b_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\\ &\quad +a_2\left(\frac{\partial b_3}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)+a_3\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)\\ &\quad +a_1\left(\frac{\partial b_2}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial y}\right)\\ &= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\\ &= \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

(3) $\because \quad \nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$$\therefore \quad \nabla\cdot(\nabla\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

1416. (1) 对任何二阶连续可微的向量场 $\boldsymbol{a}$, 求:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})\ (\text{即}\ \mathrm{div\,curl}\,\boldsymbol{a});$$

(2) 对任何二阶连续可微的数量场 φ, 求 $\nabla\times(\nabla\varphi)$ (即 curl grad φ).

[解] 设 $\boldsymbol{a}=a_1(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_2(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$, 则

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

$$\therefore \quad \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial y}$$

$$=0.$$

(2) $\because \quad \nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$

$$\therefore \quad \nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\boldsymbol{k}=0.$$

1417. 设 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$是二阶连续可微的向量场, 证明:

$$\nabla\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{a})\quad\left(\text{即}\,\mathrm{curl}\,\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a}\right).$$

［证］ 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}=\frac{\partial a_1}{\partial t}\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\boldsymbol{k},$$

$$\therefore\quad \nabla\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial a_1}{\partial t} & \frac{\partial a_2}{\partial t} & \frac{\partial a_3}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 a_3}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2 a_2}{\partial z\partial t}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial z\partial t}-\frac{\partial^2 a_3}{\partial x\partial t}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 a_2}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial y\partial t}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{a}).$$

第九章 常微分方程

1. 一阶常微分方程

(1) 基本概念 若一个方程中含有未知函数及其导数，则称此方程为微分方程；若方程中未知函数仅是一个自变量的函数，则称此方程为常微分方程.

当微分方程中最高阶导数是 n 阶时，称此方程为 n 阶微分方程. 设 $y=\varphi(x)$ 连同其直到 n 阶导数都在区间 (a, b) 有定义，若把它们代入一个 n 阶微分方程中去时，能使方程变为恒等式，则称 $y=\varphi(x)$ 为此 n 阶微分方程在区间 (a, b) 的解. 其对应的在 xOy 平面上的图象称为此方程的积分曲线.

微分方程的含有任意常数的解称为通解，不含有任意常数的解称为特解. 微分方程关于未知函数及其导数是线性时，称此方程是线性微分方程，否则称为非线性方程. 若一个微分方程中只含有未知函数及其导数的项，则称为齐次方程，否则称为非齐次方程.

求 n 阶微分方程的一个解，使它满足预先给定的初始条件

$$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

称这样的问题为微分方程的初值问题或柯西问题.

(2) 变量可分离的方程 形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 的方程称为变量可分离的方程. 其通解为

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

若存在 y_0 使 $g(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是原方程的解.

(3) 齐次型方程　若 $f(x, y)$ 是 x, y 的零次齐次函数，则称微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ 是关于 x, y 的齐次型方程. 此方程可以引入变量 $u=\frac{y}{x}$，将方程化为 $\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$. 然后积分便得到原方程的通解，当 $g(u)-u=0$ 的根为 u_0 时，$y=u_0x$ 是原方程的特解.

(4) 线性微分方程　形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的一阶线性微分方程，其通解为

$$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right].$$

若满足初值条件 $y(x_0)=y_0$，则解为

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left[\int_{x_0}^{x}Q(x_1)e^{\int_{x_0}^{x_1}P(t)dt}dx_1+y_0\right].$$

作 $z=y^{1-\alpha}$ 的变换，则可将贝努里方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$ 化为一阶线性方程求解.

(5) 恰当微分方程　若微分方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

的左边是某个函数 $v(x, y)$ 的全微分时，则称此方程为恰当微分方程. 此时通解为

$$\int_{x_0}^{x}M(x, y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0, y)dy=C.$$

微分方程 $M\,dx+N\,dy=0$ 是恰当微分方程的充要条件是 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. 当此条件不满足时，若存在函数 $\mu(x, y)$ 使

$$\mu M\,dx+\mu N\,dy=0$$

是恰当微分方程，则称 $\mu(x, y)$ 是该方程的积分因子. 常见的

积分因子形式有

若 $xM(x, y)+yN(x, y)=0$，则 $\mu(x, y)=\dfrac{1}{xM-yN}$；

若 $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$，则 $\mu(x, y)=e^{\int f(x)dx}$；

若 $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)=g(y)$，则 $\mu(x, y)=e^{\int g(y)dy}$；

2. 高阶微分方程

(1) 几种可降阶的高阶微分方程 对形如 $y^{(n)}(x)=f(x)$ 的高阶方程，只需积分 n 次，便得到方程的通解

$$y(x)=\underbrace{\int\cdots\int}_{(n\text{次})} f(x)dx\cdots dx+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n.$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 n 个任意常数.

对不包含未知函数 y 及其直到 $k-1$ 阶导数的方程

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)})=0$$

可以令 $y^{(k)}(x)=p(x)$，可把方程降低 k 阶，然后求解. 特别对形如

$$F(x, y', y'')=0$$

的二阶方程，令 $y'(x)=p(x)$. 则方程化为 $F(x, p, p')=0$，是一阶方程.

对于不包含自变量的方程

$$F(y, y', \cdots, y^{(n)})=0,$$

令 $y'(x)=p(y)$，并把 $p=p(y)$ 看作新的未知函数，则 $y'=p$，$y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，$y'''=p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}+p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2$，…，于是可以把原方程降低一阶. 特别是二阶情况 $F(y, y', y'')=0$，则令 $y'=p$ 后有 $F\left(y, p, p\dfrac{dp}{dy}\right)=0$，变为一阶方程. 若求得 $p(y)$ 后

则$\frac{dy}{dx}=p(y)$可用分离变量法求解.

(2) 二阶线性方程　对于二阶线性齐次方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=0$$

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是方程的通解，其中 C_1、C_2 是任意常数.

若 $y_1(x)$ 是该线性方程的一个解．则

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{1}{y_1^2(x)}\ e^{-\int p_1(x)dx}dx$$

是方程的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解．此公式称为刘维尔公式.

对于二阶线性非齐次方程 $y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q(x)$. 有性质:

a．若 $y_0(x)$ 是非齐次方程的一个特解，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的通解，则

$$y(x)=y_0(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是非齐次方程的通解.

b．设 $y(x)=y_1(x)\pm iy_2(x)$是方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q_1(x)\pm iQ_2(x)$$

的解，则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q_1(x)$$

及　$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q_2(x)$$的解.

c．若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是非齐次方程的两个特解，则 y_2-y_1 是该方程对应的齐次方程的一个特解.

若 $y_1(x)$及 $y_2(x)$是非齐次方程 $y''+P_1y'+P_2y=Q$ 所对应的齐次方程的两个线性无关解，则可以用常数变易法得到非齐次

方程的一个特解.

令 $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$，其中 $C_1(x)$和 $C_2(x)$ 是待定函数,然后由方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=Q(x) \end{cases}$$

解得 $C_1(x)$ 及 $C_2(x)$，代入到解的表达式即是

(3) 常系数高阶方程 形如

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数,称为常系数高阶微分方程.

齐次情况,即 $f(x)\equiv0$，此时有性质:

若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是齐次线性方程的 n 个线性无关解，则其通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

若齐次线性方程的特征方程 $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是互异的实数根，其重数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，而 $\alpha_1\pm i\beta_1, \alpha_2\pm i\beta_2, \cdots, \alpha_s\pm i\beta_s$ 为互异的复特征根，其重数分别为 $m_1, \cdots, m_s$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_r+2m_1+\cdots+2m_s=n$，则如下 n 个函数

$$e^{\lambda_ix},\ xe^{\lambda_ix},\ \cdots,\ x^{k_i-1}e^{\lambda_ix},\ \cdots,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r),$$

$$e^{\alpha_jx}\cos\beta_jx,\ xe^{\alpha_jx}\cos\beta_jx,\ \cdots,\ x^{m_j-1}e^{\alpha_jx}\cos\beta_jx,$$

$$e^{\alpha_jx}\sin\beta_jx,\ xe^{\alpha_jx}\sin\beta_jx,\ \cdots,\ x^{m_j-1}e^{\alpha_jx}\sin\beta_jx$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

是方程组的一个基本解组.

非齐次情况,即 $f(x)\neq0$ 时,则非齐次线性方程的通解等于对应齐次方程的通解和这个非齐次线性方程的任何一个特解之和.

对于非齐次方程的特解，可以采用常数变易法来解得，或采用算子法或拉普拉斯变换法来计算，在自由项比较特殊时，采用待定系数法求得.

用待定系数法时，通常按下表形式确定待定解的形式：

	方程右端 $f(x)$	特征根	解的形式
I	$P_n(x)$	0 不是特征根 0 是 s 重特征根	$Q_m(x)$, $x^sQ_m(x)$,
II	$P_n(x)e^{\alpha x}$	α 不是特征根 α 是 s 重特征根	$Q_m(x)e^{\alpha x}$, $x^sQ_m(x)e^{\alpha x}$,
III	$P_n(x)\cos\beta x$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	$\pm i\beta$ 不是特征根 $\pm i\beta$ 是 s 重特征根	$R_k(x)\cos\beta x$ $+T_k(x)\sin\beta x$ $x^s[R_k(x)\cos\beta x$ $+T_k(x)\sin\beta x]$
IV	$e^{\alpha x}[P^n(x)\cos\beta x$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	$\alpha\pm i\beta$ 不是特征根 $\alpha\pm i\beta$ 是 s 重特征根	$[R_k(x)\cos\beta x$ $+T_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$ $x^s[R_k(x)\cos\beta$ $x+T_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$

其中 $P_n(x)$, $Q_m(x)$, $R_k(x)$, $T_k(x)$ 分别是 n, m 及 k 次多项式，$k=\max\{m, n\}$.

(4) 欧拉方程

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0,$$

其中 a_i 是常数，利用变换 $x=e^t$，可将这类方程化为常系数的高阶线性方程求解.

3. 二阶变系数方程的幂级数解法

称方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 为二阶变系数线性方程，通常可以用幂级数方法求解.

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的某个邻域内可以展成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 解析，或说 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的一个解析点.

若 $p(x)$、$q(x)$ 在 $x=x_0$ 是解析的，则 $x=x_0$ 是二阶变系数线性方程的常点，不然称为二阶线性方程的奇点. 若 $x=x_0$ 是二阶线性方程的奇点，但 $(x-x_0)p(x)$ 及 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 $x=x_0$ 点解析，则称 $x=x_0$ 是二阶线性方程的正则奇点.

对于二阶齐次线性方程，$x=x_0$ 是常点，$p(x)$ 和 $q(x)$ 分别在点 $x=x_0$ 可以展成幂级数，收敛半径分别是 R_1 和 R_2，则在区间 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 中必存在方程的两个线性无关的幂级数解

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n,$$

其中 $R=\min\{R_1,\ R_2\}$.

若 $x=x_0$ 是二阶齐次线性方程的正则奇点，

$$p(x)=\frac{1}{(x-x_0)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

$$q(x)=\frac{1}{(x-x_0)^2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k,$$

a_0, b_0, b_1 不同时为零，称方程

$$r(r-1)+ra_0+b_0=0$$

为指示方程，其根记为 r_1 和 r_2，则当 r_1-r_2 不是整数时，则方程有二个线性无关解

$$y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n.$$

当 $r_1=r_2=r$ 时，则方程有如下形式的两个线性无关解

$$y_1(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{r+1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n+y_1(x)\ln(x-x_0).$$

当 r_1-r_2 是整数时，设 $r_1>r_2$，则方程有如下形式的两个线性无关解

$$y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n+Cy_1(x)\cdot\ln(x-x_0).$$

4. 微分方程组

(1) 基本概念 常微分方程组的一般形式为

$$F_i(x,\ y_1,\ \cdots y_1^{(k_1)},\ y_2,\ \cdots,\ y_2^{(k_2)},\ \cdots,\ y_n,\ \cdots,\ y_n^{(k_n)})=0$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n);$$

整数 $p=\max\limits_i k_i$ 称为方程组的阶数. 最高阶导数已解出的方程组称为正规型常微分方程组. 而下述形式的方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

称为标准型常微分方程组.

若一组已知函数代替方程中的未知函数，使方程组的每个方程均变为恒等式，则称这组函数是该方程组的一组解.

求标准型方程组满足初始条件

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0,\ \cdots,\ y_n(x_0)=y_n^0$$

的解的问题，称为该方程组的柯西问题.

若在点 $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \cdots,\ y_n^0)$ 的某邻域内，标准型方程组的右端函数 $f_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 连续，且关于 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 的偏导数有界，则在 x_0 的某个邻域内，标准型方程组有且只有一个满足初始条件

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0,\ \cdots,\ y_n(x_0)=y_n^0$$

的解 $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, $\cdots$, $y_n=y_n(x)$.

设函数 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$ 及其偏导数 $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y_2}$, $\cdots$, $\frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ 都在 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 空间中某区域 D 内连续，若对标准型方程组的任意一解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 都有

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))\equiv C,$$

则称 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$ 为标准型微分方程组的一个积分，这里常数 C 与 x 无关，与解 $y_1(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 有关.

若函数 $\psi(x, y_1, \cdots, y_n)$ 是标准型方程组的一个积分，则称带任意常数 C 的关系式 $\psi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=C$ 为该方程组的一个首次积分.

若标准型方程组的积分 ψ_1, ψ_2, $\cdots$, ψ_m 之间不存在形如

$$F(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)\equiv 0$$

的关系，则称 ψ_1, ψ_2, $\cdots$, ψ_m 关于未知函数 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 是独立的，简称独立.

一般说来，标准型方程组的独立的首次积分有且只有 n 个.

(2) 常系数齐次线性方程组的解法　下述方程为常系数齐次线性方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

或记为矩阵形式

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X=[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T,$$

如果系数矩阵 A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 彼此相异，则向量函数

$$c^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ c^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \ \cdots, \ c^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

便是方程组的一个基本解，其中 $c^{(m)}$ 是与 λ_m 相对应的特征向量. 当 λ_i 中有复根时，若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是实的，$\lambda_{r+m}, \bar{\lambda}_{r+m}\left(m=1, \cdots, \dfrac{n-r}{2}\right)$ 是相互共轭的复特征值. 则方程组的基本解组是

$$c^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \ \cdots, \ c^{(r)}e^{\lambda_r t}; \ \operatorname{Re} c^{(r+m)}e^{\lambda_{r+m}t}, \ \operatorname{Im} c^{(r+m)}e^{\lambda_{r+m}t}$$

$$\left(m=1, \ 2, \ \cdots, \ \frac{n-r}{2}\right).$$

如果系数阵 A 有多重特征根，若特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 的重数分别是 $n_1, n_2, \cdots, n_r$, 则对每个 λ_i 方程组有如下形式的线性无关解组

$$x_i=P_i^{(j)}(t)e^{\lambda_i t} \quad (j=1, \ 2, \ \cdots, \ n_i)$$

其中 $P_i^{(j)}(t)$ 是 n 维向量函数，其分量为 t 的次数不大于 n_i-1 的多项式. 这些线性无关解组的全体构成原方程组的一个基本解组.

(3) 常系数非齐次线性方程组的解法　常系数非齐次线性方程组的通解是对应的齐次方程组的通解加上该非齐次方程组的一个特解.

非齐次方程组的特解可采用待定系数法求解，其解的形式与高阶方程情况类同，也可采用常数变易法，或采用算子法.

(4) 算子法解微分方程组定义

$$\frac{dy(x)}{dx}=Dy(x), \quad \frac{d^2y(x)}{dx^2}=D^2y(x), \ \cdots$$

其余类推，称 $D, D^2, \cdots$ 为微分算子. 记

$$P(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

(a_i 均是常数)为微分算子 D 的多项式. 称 $\frac{1}{D^k}$ 是 D^k 的逆算子(k 是正整数)规定

$$\frac{1}{D^k}=\underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{个}}y(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{k\text{次}}$$

$P(D)$的逆算子为 $\frac{1}{P(D)}$, 对于逆算子有如下公式

(i) $\frac{1}{D-\lambda}f(x)=e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}f(x)dx$

(ii) 若 $P(D)=D^mP_1(D)$, $P_1(D)\neq 0$, $m\geqslant 0$, $f(x)$ 是 n 次多项式, 则

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=\frac{1}{D^m}(C_0+C_1D+\cdots+C_nD^n)f(x)\quad(m\geqslant 0),$$

括号内是 $\frac{1}{P_1(D)}$ 的展开式中前 n 次多项式.

(iii) $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)}$, λ 不是 $P(\lambda)=0$ 的根;

$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\frac{x^s\cdot e^{\lambda x}}{P^{(s)}(\lambda)}$, λ 是$P(\lambda)=0$ 的 s 重根.

(iv) $\frac{1}{P(D)}[e^{\lambda x}f(x)]=e^{\lambda x}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(x)$.

5. 常微分方程的数值解

(1) 欧拉方法 求解一阶方程的初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,\ y),\\ y|_{x=x_0}=y_0.\end{cases}$$

作
$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,\ y(x_i))$$

其中 h 是步长. i 从 0 开始, 然后逐点延伸, 求得 y_1, y_2, y_3, $\cdots$. 其误差 $|e_i|=|y-y_i|$ 估计如下:

$$|e_i|\leqslant\frac{1}{2}M\cdot h^2,\quad 其中\quad M=\max\left|\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

(2) 改进的欧拉方法 求解一阶方程的初值问题.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

设步长为 h, 则可以令 $x_0 = x_0$, $y_0 = y_0$, 并逐次延伸:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

其中

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

$$k_2 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})).$$

(3) 龙格-库塔法 求解一阶方程的初值问题.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$$

设步长为 h, 记 $x_0 = x_0$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \cdots$, $y_0 = y_0$.

则有

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$

其中

$$k_{i1} = f(x_i, y_i),$$

$$k_{i2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{i1}}{2} h\right),$$

$$k_{i3} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_{i2}}{2} h\right),$$

$$k_{i4} = f(x_i + h, y_i + k_{i3} h).$$

6. 拉普拉斯变换法

定义 设 $f(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上有定义, 且存在某个 a, 使 $|f(t)| \leqslant e^{at}$ 成立. 则称

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换象函数, 记为 $\mathscr{L}[f] = F(p)$

用拉普拉斯变换来解线性系统的初值问题是十分有效的. 其方法是用拉普拉斯变换将线性常系数微分方程变为象函数的代

数方程，然后解出象函数，再取逆变换来求得原线性常系数微分方程的解.

拉普拉斯变换的主要性质有：

a. 线性性质

$$\mathscr{L}[af+bg]=a\mathscr{L}[f]+b\mathscr{L}[g]$$

b. 若 $f(t)$ 及其直到 n 阶导数的拉普拉斯变换都存在，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^n\mathscr{L}[f]-\sum_{k=1}^{n}f^{(k-1)}(0)\cdot p^{n-k}.$$

$$\mathscr{L}[t^nf(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\mathscr{L}[f].$$

c. 若 $f(t)$ 可进行拉普拉斯变换，则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{p}\mathscr{L}[f(t)].$$

d. 位移定理　若

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p),$$

则

$$\mathscr{L}[e^{p_0t}f(t)]=F(p-p_0).$$

e. 延迟定理　若

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p),$$

且 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对一切实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau p}\cdot F(p).$$

f. 卷积定理　若

$$\mathscr{L}[f_1]=F_1(p),\ \mathscr{L}[f_2]=F_2(p)$$

则

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(p)\cdot F_2(p).$$

其中 $f_1*f_2=\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$. 称为 f_1 和 f_2 的卷积.

拉普拉斯变换函数简表

$f(t)$	$F(p)$
$H(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
t^n (n 为整数)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
t^α $(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
$\sin(\omega t+\alpha)$	$\frac{p\sin\alpha+\omega\cos\alpha}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\beta)$	$\frac{p\cos\beta-\omega\sin\beta}{p^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1
$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
$\frac{1}{t}\sin at$	$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{p}$

§1. 一般概念和一阶常微分方程

1418. 试说明 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$，对一切常数 C_1 和 C_2，都是齐次方程

$$y''-y'-2y=0$$

的解.

［解］ 由 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 得 $y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}$，$y''=C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}$，代入原方程的左边

$$\begin{aligned}y''-y'-2y&=(C_1e^{-x}+4C_2e^{2x})-(-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x})-2(C_1e^{-x}+C_2e^{2x})\\&=C_1(e^{-x}+e^{-x}-2e^{-x})+C_2(4e^{2x}-2e^{2x}-2e^{2x})\\&=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0.\end{aligned}$$

因此对一切 C_1 和 C_2，$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 都是方程 $y''-y'-2y=0$ 的解.

1419. 试证：$y_1=e^{-x}$ 和 $y_2=e^{2x}$ 都是 $yy''-(y')^2=0$ 的解，并证明 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 是方程 $yy''-(y')^2=0$ 的解的充要条件是 $C_1=0$ 或 $C_2=0$.

［证］ $y_1(x)=e^{-x}$，$y_1'(x)=-e^{-x}$　$y_1''(x)=e^{-x}$. 代入方程,

$$yy''-(y')^2=(e^{-x})(e^{-x})-(-e^{-x})^2=0$$

成立. 于是知 $y_1=e^{-x}$ 是方程的解. 同理，以 $y_2(x)=e^{2x}$ 代入得

$$yy''-(y')^2=(e^{2x})(4e^{2x})-(2e^{2x})^2=0$$

成立. 因此 $y_2=e^{2x}$ 也是方程的解. 但是对于 $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 则

$$\begin{aligned}yy''-(y')^2&=(C_1e^{-x}+C_2e^{2x})(C_1e^{-x}+4C_2e^{2x})-(-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x})^2\\&=(C_1^2e^{-2x}+5C_1C_2e^{x}+4C_2^2e^{4x})-(C_1^2e^{-2x}-4C_1C_2e^{x}+4C_2^2e^{4x})\\&=9C_1C_2e^{x}.\end{aligned}$$

因此要使 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 是方程的解，充要条件是 $C_1=0$ 或 $C_2=0$.

1420. 若 a 和 b 是任意常数，试构造一个二阶常微分方程，其通解为

$$y=ae^{x}+b\cos x \qquad \cdots ①.$$

[解]

$$y'=ae^x-b\sin x \quad \cdots②,$$

$$y''=ae^x-b\cos x \quad \cdots③.$$

解①、③，得

$$\begin{cases} a=\dfrac{y+y''}{2e^x} \\ b=\dfrac{y-y''}{2\cos x} \end{cases}$$

代入到②得 $$y'=\frac{y+y''}{2e^x}e^x-\frac{y-y''}{2\cos x}\sin x.$$

或化为 $$(1+\operatorname{tg}x)y''-2y'+(1-\operatorname{tg}x)y=0.$$

1421. 试说明 $y_1(x)=a(x-1)^2$ 及 $y_2(x)=b(x+1)^2$ 都是方程

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0 \quad 和 \quad 2yy''-(y')^2=0$$

的解，但是 $y=a(x-1)^2+b(x+1)^2$ 仅是第一个方程的解.

[解] 以 $y_1(x)=a(x-1)^2$ 代入第一个方程.

$$(x^2-1)y_1''-2xy_1'+2y_1=(x^2-1)2a-2x2a(x-1)+2a(x-1)^2$$
$$=(x-1)[2ax+2a-4ax+2ax-2a]=0.$$

代入第二个方程

$$2y_1y_1''-(y_1')^2=2a(x-1)^2 2a-[2a(x-1)]^2=0.$$

因此 $y_1(x)$ 是第一、第二个方程的解.

以 $y_2(x)=b(x+1)^2$ 代入第一、二两个方程得:

$$(x^2-1)y_2''-2xy_2'+2y_2=(x^2-1)2b-2x2b(x+1)+2b(x+1)^2$$
$$=(x+1)[2bx-2b-4bx+2bx+2b]=0.$$

$$2y_2y_2''-(y_2')^2=2b(x+1)^2\cdot 2b-[2b(x+1)]^2=0.$$

因此 $y_2(x)$ 也是第一、二两个方程的解.

但 $y_3=y_1(x)+y_2(x)=a(x-1)^2+b(x+1)^2$ 代入第一个方程有

$$(x^2-1)y_3''-2xy_3'+2y_3=(x^2-1)\cdot 2a+(x^2+1)2b-2x2a(x-1)$$
$$-2x2b(x+1)+2a(x-1)^2+2b(x+1)^2=0.$$

代入第二个方程

$$
\begin{aligned}
2y_3y_3''-(y_3')^2&=2(a(x-1)^2+b(x+1)^2)(2a+2b)\\
&\quad-[2a(x-1)+2b(x+1)]^2\\
&=4[a^2(x-1)^2+ab(x-1)^2+ab(x+1)+b^2(x+1)^2]\\
&\quad-4[a(x-1)+b(x+1)]^2\\
&=4ab(x^2+3)\neq 0
\end{aligned}
$$

因此 $y_3=a(x-1)^2+b(x+1)^2$ 不是第二个方程的解.

［说明］ 第一个方程是线性方程. 因此有此性质,而第二个方程不是线性方程,所以无此性质.

1422. 试证对于任意的常数 C_1, C_2, 函数

$$y(x)=\begin{cases}C_1x^2, & x\leqslant 0\\ C_2x^2, & x>0\end{cases}$$

都是方程 $xy'=2y$ 的解.

［证］ 对于 $x\neq 0$ 的点,则易证 $y=Cx^2$ 满足方程

$$xy'-2y=x\cdot 2Cx-2Cx^2=0$$

而对 $x=0$ 点.我们从函数 $y(x)$ 表达式知此时不论C_1、C_2是任何值,$y(0)=0$, 且 $y'(0)=0$ 满足方程,因此 $y(x)$ 是方程 $xy'=2y$ 的解.

［说明］ 由此例知,对于方程 $xy'=2y$过原点的积分曲线有无穷条.其原因是 $y'=\dfrac{2y}{x}$ 中 $f(x, y)=\dfrac{2y}{x}$, 在 $x=0$ 的邻域函数无界. 且 $f_y'=-\dfrac{y}{x^2}$ 亦无界,不满足解的存在唯一性条件.

1423. 试求方程 $\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos^2 x$ 的全部解.

［解］ $\because f(t, x)=e^t\cos^2 x$ 在变量 t, x 的全平面上连续可微,所以过平面上每一点有且只有方程的一条积分曲线. 易证函数

$$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\quad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)\text{ 是方程的解.}$$

当 $x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时, 例在 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 中, 方程的解由

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int e^t\,dt+C$$

确定，即

$$\operatorname{tg} x = e^t + C$$

$$\therefore \quad x = \operatorname{arc\,tg}(e^t + C) \quad (-\infty < t < \infty).$$

1424. 试求方程 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ 的全部解.

[解] $\because f(t, x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ 只依赖于变量 x，且在平面 t, x 上连续可微，因此初值问题的解的存在唯一性定理对方程成立. 将变量分离并积分得

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int dt = t + C' \quad \text{或} \quad \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = t + C,$$

在区域 $-\infty < x < -1$ 及 $1 < x < +\infty$ 中. 上面的函数是

$$\frac{x-1}{x+1} = C_1 e^t, \ e^C = C_1 > 0$$

所以方程的解是

$$x = \frac{1 + C_1 e^t}{1 - C_1 e^t}$$

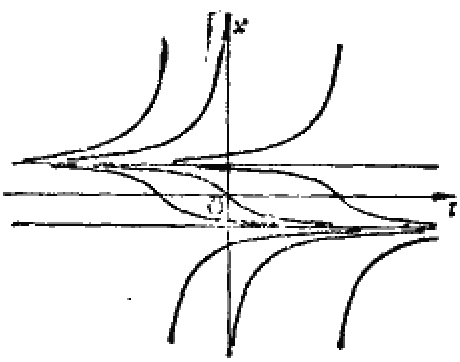
在区域 $-1 < x < 1$，方程的解是

$$\frac{x-1}{x+1} = C_2 e^t \quad (C_2 < 0)$$

所以，可以统一写为

$$x = \frac{1 + Ce^t}{1 - Ce^t} \quad (C \neq 0) \quad \cdots (*).$$

又函数 $x^2 = 1$ 得 $x = 1$ 及 $x = -1$ 都是方程的解，前者可以在上式中令 $C = 0$ 得到，后者可以令 $C \to \infty$ 得到. 因此 (*) 式中 C 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化可得全部解.



在 $t-x$ 平面上积分曲线如图所示

1425. 求初值问题 $y' = y - y^2$, $\quad y(0) = y_0$ 的解.

[解] 若 $y_0 = 0$，则 $y(t) \equiv 0$；若 $y_0 = 1$，则 $y(t) \equiv 1$，当 $y_0 \neq 0, 1$ 时，分离变量后积分.

$$\because \quad \int \frac{dy}{y - y^2} = \ln|y| - \ln|1 - y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|$$

$\therefore$ 方程的解是 $\ln\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|=\ln\left|\frac{y_0}{1-y_0}\right|+t$

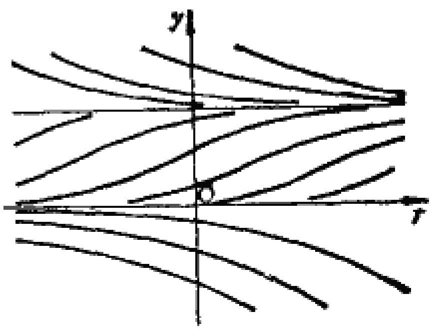
或者
$$\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|=\left|\frac{y_0}{1-y_0}\right|e^t.$$

因为 $y(t)\neq 0,\ 1$，因此易验证 $\frac{y(t)}{(1-y(t))}$ 和 $\frac{y_0}{(1-y_0)}$ 取相同的符号。

于是
$$\frac{y(t)}{1-y(t)}=\frac{y_0}{1-y_0}e^t$$

或整理为
$$y(t)=\frac{y_0e^t}{(1-y_0)+y_0e^t}.$$

只要 $y_0\neq 0,\ 1$ 且 $y_0e^t\neq y_0-1$，如果 $0\leqslant y_0\leqslant 1$ 则 y_0 是对一切 $t\in(-\infty,+\infty)$ 有定义，但若 $y_0>1$，则 $y(t)$ 只存在 $t>\ln[(y_0-1)/y_0]$，且若 $y_0<0$ 则 $y(t)$ 仅对 $t<\ln[(y_0-1)/y_0]$ 有值。且注意到若 $0<y_0<1$ 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=1$，$\lim\limits_{t\to-\infty}y(t)=0$。而 $y(t)=1$ 及 0 前已述，是解。曲线如图所示。



1426．求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ 的通解。

［解］ 这是一个齐次型方程。令 $u=\frac{y}{x}$，$\therefore y=x\cdot u$，$\therefore y'=u+xu'$ 代入方程得
$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u},\quad \therefore\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

分离变量得
$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},$$

两边积分有
$$\operatorname{arc\,tg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C.$$

代回原变量，整理后有
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.$$

1427．求方程 $(3x-7t+7)dt+(7x-3t+3)dx=0$ 的通解。

［解］ 此方程可以写为 $\frac{dx}{dt}=\frac{3x-7t+7}{-7x+3t-3}$ 是齐次型方程。

先解 $\begin{cases}3\alpha-7\beta+7=0\\-7\alpha+3\beta-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=1.\end{cases}$ 于是令 $\begin{cases}x=\xi\\t=\eta+1.\end{cases}$

原方程化为
$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{3\xi-7\eta}{-7\xi+3\eta}$$

令
$$u=\frac{\xi}{\eta}. \quad \frac{d\xi}{d\eta}=\frac{du}{d\eta}\cdot\eta+u$$

$$u+\eta\frac{du}{d\eta}=\frac{3u-7}{-7u+3}, \quad \eta\frac{du}{d\eta}=\frac{7(u^2-1)}{-7u+3},$$

$$\frac{-7u+3}{7(u^2-1)}du=\frac{d\eta}{\eta},$$

积分得
$$\frac{1}{7}[-2\ln(u-1)-5\ln(u+1)]=\ln\eta-C_1$$

$$2\ln(u-1)+5\ln(u+1)+7\ln\eta=C_1$$

$$(u-1)^2(u+1)^5\eta^7=C,$$

化简后得
$$(x-t+1)^2(x+t-1)^5=C.$$

1428. 求初值问题

$$\begin{cases}y'=\frac{1}{x}y+1+x\\y|_{x=2}=-4.\end{cases}$$

［解］ 这是一阶线性方程. ∵ $-\int\frac{1}{x}dx=-\ln x$, 及 $e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$, 知此方程的通解

$$y(x)=e^{\ln x}\left(\int(1+x)e^{-\ln x}dx+C\right)=x\cdot\left(\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+C\right)$$
$$=Cx+x^2+x\cdot\ln x.$$

代入初值条件. $-4=C\cdot2+2^2+2\cdot\ln2$. ∴ $C=-4-\ln2$ 所以初值问题的解是

$$y(x)=-(4+\ln2)x+x\ln x+x^2.$$

1429. 求方程 $\frac{dy}{dt}-\operatorname{tg}ty=\sec^3t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 的通解.

［解］ $P(t)=-\operatorname{tg}t$, $\int P(t)dt=-\int\operatorname{tg}t\,dt=\ln\cos t$, 于是其通解为

$$y(t)=e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C\right)$$

$$=e^{-\ln\cos t}\left(\int\frac{1}{\cos^3 t}\cdot e^{\ln\cos t}dt+C\right)$$

$$=\frac{1}{\cos t}\left(\int\frac{dt}{\cos^2 t}+C\right)=\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{C}{\cos t}.$$

1430. 若 $T>0$, 且 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续函数, 且有周期 T: $a(t+T)\equiv a(t)$, $b(t+T)\equiv b(t)$, $\forall t\in(-\infty,\infty)$. 考虑方程

$$y'=a(t)y+b(t) \qquad \cdots(*)$$

(a) 证明　若 y 是 $(*)$ 的解, $\bar{y}(t)\equiv y(t+T)$, 则 $\bar{y}(t)$ 也是 $(*)$ 的解.

(b) 证明　$y(t)$ 是 $(*)$ 的周期解的充要条件是 $y(0)=y(T)$.

(c) 证明　当 $b(t)\equiv 0$ 且 $\int_0^T a(s)ds=0$, 则 $(*)$ 的每一个解有 T 周期.

(d) 证明　若 $b(t)\equiv 0$ 且 $\int_0^T a(s)ds<0$, 则 $(*)$ 的每一个解 $y(t)$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.

(e) 证明　若 $\int_0^T a(s)ds\neq 0$, 则方程 $(*)$ 巧恰有一个周期为 T 的解.

[证] (a) $\because$ $y(t)$ 是 $(*)$ 的解, $\therefore$ $y'(t)=a(t)y(t)+b(t)$. 以 $t+T$ 代 t

$$y'(t+T)=a(t+T)y(t+T)+b(t+T)$$

$$\because\quad a(t+T)\equiv a(t),\ b(t+T)\equiv b(t),$$

于是
$$y'(t+T)=a(t)y(t+T)+b(t),$$

即
$$\bar{y}'(t)=a(t)\bar{y}(t)+b(t)$$

$\therefore$ $\bar{y}(t)$ 是 (t) 的解

(b) 先证必要性. 若 $y(t)$ 是 $(*)$ 的周期为 T 的解, 则 $y(t+T)=y(t)$

于是当 $t=0$ 时 $y(T)=y(0)$ 成立

再证充分性. 由 (a) 知若 $y(t)$ 是 (*) 的解. 则 $\bar{y}(t+T)$ 也是 (*) 的解. 而 $\bar{y}(0)=\bar{y}(0+T)=y(T)$, 因此 $y(t)$ 的初值和 $y(t)$ 的初值相等. 按解的存在唯一性知 $\bar{y}(t)\equiv y(t)$. 即 $y(t+T)\equiv y(t)$. 即 $y(t)$ 是周期函数.

(c) 由解的表达式, 当 $b(t)\equiv 0$ 时方程 (*) 的解为

$$y(t)=y(0)\cdot e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

于是
$$y(t+T)=y(0)e^{\int_0^{t+T}a(\tau)d\tau}=y(0)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}\cdot e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}$$

$$\because\ \int_0^T a(\tau)d\tau=0,\quad \therefore\ y(t+T)=y(0)\,e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}=y(t).$$

(d) 当 $b(t)\equiv 0$ 时,

$$y(t)=y(0)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

对充分大的 t 总有 $t=t_1+nT$. 其中 $0<t_1<T$, 于是 $t\to\infty$ 时相当于 $n\to\infty$ 这时

$$y(t)=y(0)\cdot e^{\int_0^{nT}a(\tau)d\tau+\int_{nT}^{nT+t_1}a(\tau)d\tau}$$

$$=y(0)\,e^{\int_0^{t_1}a(\tau)d\tau}\cdot e^{n\int_0^T a(t)dt}$$

而由于 $0<t_1\leqslant T$ 则

$$\left|e^{\int_0^{t_1}a(\tau)d\tau}\right|\leqslant M_1,\quad 记\ \int_0^T a(\tau)d\tau=\alpha<0.$$

则
$$|y(t)|=|y(0)|\cdot e^{\int_0^{t_1}a(\tau)d\tau}\cdot e^{n\alpha}<M\cdot|y(0)|\cdot e^{n\alpha}$$

当 $t\to\infty$ 时, $n\to\infty$, $e^{n\alpha}\to 0$ 于是

$$|y(t)|\to 0\quad (t\to\infty)$$

(e) 先证存在一个周期为 T 的解. 为此, 我们取

$$y(0)=y_0=\int_0^T b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)d\tau+\int_0^T a(\tau)d\tau}ds\Big/\left(1-e^{\int_0^T a(\tau)d\tau}\right)$$

方程 (*) 和上述初值的初值问题存在唯一解, 由于 $\int_0^T a(\tau)d\tau\neq 0$. 则

$$(1-e^{\int_0^T a(r)dr})\neq 0$$

因此上述初值是合理的. 此时初值问题的解为:

$$y(t)=e^{\int_0^t a(r)dr}\left[\int_0^t a(s)e^{-\int_0^s a(r)dr}ds+y_0\right]$$

$$\therefore\quad y(T)=e^{\int_0^T a(r)dr}\left[\int_0^T b(s)e^{-\int_0^s a(r)dr}ds+y_0\right]$$

$$=\int_0^T b(s)e^{-\int_0^s a(a)dr+\int_0^T a(r)dr}ds+y_0e^{\int_0^T a(r)dr}$$

$$=(1-e^{\int_0^T a(a)\,dr})\cdot y_0+y_0\cdot e^{\int_0^T a(r)dr}=y_0=y(0)$$

于是由本题(b)知,存在周期为 T 的解 $\bar{y}(t)$.

再证解是唯一的. 若存在另一个解 $\bar{y}(t)$. 它满足方程(*), 且有周期T, 则 $\bar{y}(t)$ 有 $\bar{y}(0)=\bar{y}_0$, 并有解

$$\bar{y}(t)=e^{\int_0^t a(r)dr}\left[\int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(r)dr}ds+\bar{y}_0\right]$$

由于 $\bar{y}(t)$ 有周期 T, 于是 $\bar{y}(T)=\bar{y}(0)$, 即

$$\bar{y}(T)=e^{\int_0^T a(r)dr}\left[\int_0^T b(s)e^{-\int_0^s a(r)dr}ds+\bar{y}(0)\right]=\bar{y}(0)$$

解上述方程,便得到

$$\bar{y}(0)=\int_0^T b(s)e^{-\int_0^s a(r)dr+\int_0^T a(r)dr}ds/(1-e^{\int_0^T a(r)dr})$$

因此 $\bar{y}(0)=y(0)$, 由线性方程解的存在唯一性知. $\bar{y}(t)\equiv y(t)$ 成立.

1431. 解方程 $y'-\dfrac{y}{x}=x\sqrt{y}$.

[解] 此方程是贝努利型方程, $\alpha=\dfrac{1}{2}$. 令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$. 原方程化为 $z'-\dfrac{z}{2x}=\dfrac{x}{2}$, 这是线性方程, $P(x)=-\dfrac{1}{2x}$, $Q(x)=\dfrac{x}{2}$. 得解

$$z(x)=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{x}{2}e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]=x^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\right]=\frac{1}{3}x^2+Cx^{\frac{1}{2}},$$

即
$$y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}x^2+Cx^{\frac{1}{2}},\quad 或\quad y=\left(\frac{1}{3}x^2+Cx^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

是此方程的通解.

1432. 求方程 $y'+\dfrac{1}{t}y=\dfrac{1}{t^2}y^3$ 带初值条件 $y(1)=2$ 的解.

［解］ 此是贝努利方程．用常数变易法求解．首先求 $y'+\frac{1}{t}y=0$ 的通解．其通解为 $y=\frac{C}{t}$．设贝努利方程的通解表达式为 $y(t)=\frac{u(t)}{t}$．代入原方程化简得 $u'(t)=\frac{u^3(t)}{t^4}$，分离变量得

$$\frac{du}{u^3}=\frac{dt}{t^4}.\quad 积分得\quad \frac{1}{2u^2}=\frac{1}{3t^3}+C.$$

于是得到

$$u^2(t)=\frac{1}{\frac{2}{3t^3}+2C}\quad 或\quad u(t)=\pm\sqrt{\frac{3t^3}{2+6Ct^3}},$$

$$y(t)=u(t)\cdot\frac{1}{t}=\pm\sqrt{\frac{3t}{2+6Ct^3}}.$$

代入初值，知应取正号．且

$$2=\sqrt{\frac{3}{2+6C}}\quad C=-\frac{5}{24}.$$

于是

$$y(t)=\sqrt{\frac{3t}{2-\frac{5}{4}t^3}}\quad (0<t<2/\sqrt[3]{5}).$$

1433．求方程 $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$ 的通积分．

［解］ $M(x,y)=e^x+y+\sin y$，$N(x,y)=e^y+x+x\cos y$，于是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+\cos y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1+\cos y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y},$$

所以是恰当型方程．设积分是 $u(x,y)=C$

由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y,$$

对前一式关于 x 积分

$$u=\int(e^x+y+\sin y)dx+\varphi(y)=e^x+xy+x\sin y+\varphi(y)$$

再关于 y 微分

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+\varphi'(y)=x+x\cos y+e^y.$$

因此 $\varphi'(y)=e^y$ 即 $\varphi(y)=e^y$，因此原方程的通积分为

$$e^x+xy+x\sin y+e^y=C.$$

1434. 试求 $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$ 的全部解.

［解］ $M(x, y)=e^{-y}$, $N(x, y)=(1-xe^{-y})$, 满足

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-e^{-y},$$

即 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 是恰当方程. 由方程知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=1-xe^{-y},$$

由第一式对 x 求积分

$$u(x, y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)=xe^{-y}+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-xe^{-y}+\varphi'(y)=1-xe^{-y}.$$

于是 $\varphi'(y)=1$ 即 $\varphi(y)=y+C$. 因此方程的积分是

$$xe^{-y}+y+C=0$$

此即是方程的全部解.

1435. 试求微分方程 $2xe^{-y}dx-(1+x^2)e^y dy=0$ 的通解.

［解］ 此方程 $M(x,y)=2xe^{-y}$, $N(x,y)=-(1+x^2)e^y$, 但 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, 因此不是恰当微分方程, 我们需求积分因子 $\mu(x, y)$. 但因 $M(x, y)=M_1(x)M_2(y)$. 其中 $M_1=2x$, $M_2=e^{-y}$, $N(x, y)=N_1(x)\cdot N_2(y)$, 其中 $N_1=-(1+x^2)$, $N_2(y)=e^{y}$. 则我们可以取积分因子

$$\mu(x, y)=\frac{1}{M_2(y)}\cdot\frac{1}{N_1(x)}=\frac{1}{-(1+x^2)\cdot e^{-y}}.$$

原方程化为

$$\frac{2x}{1+x^2}dx-e^{2y}dy=0$$

积分
$$u(x, y)=\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}e^{2y}=C$$

便是所求的通解.

1436. 求方程 $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$ 的全部解.

［解］ $M(x, y)=2xy^2-y$, $N(x, y)=y^2+x+y$, 而 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ 不是恰当微分方程，但

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{2xy^2-y}(4xy-1-1)=\frac{2}{y}.$$

仅依赖于 y，因此有仅含 y 的积分因子

$$\mu(y)=\exp\left[-\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\right]=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}$$

方程的两边乘积分因子 $\frac{1}{y^2}$. 得

$$\frac{2xy-1}{y}dx+\frac{y^2+x+y}{y^2}dy.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy-1}{y}\right)=\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2+x+y}{y^2}\right).$$

成为恰当微分方程. 积分得:

$$x^2-\frac{x}{y}+y+\ln|y|=C$$

另一方面，在前面运算中均假设 $y\neq 0$，若 $y=0$，易验证，也是方程的积分.

1437. 求齐次型方程 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 的积分因子，其中 $M(x, y)$ 及 $N(x, y)$ 均是 m 次齐次函数.

［解］ 令 $y=ux$，于是原方程化为

$$M(x, ux)dx+N(x, ux)(udx+xdu)=0.$$

由于 M 和 N 是 m 次齐次函数，于是

$$(x^mM(1, u)+x^mN(1, u)u)dx+x^{m+1}N(1, u)du \qquad \cdots(*).$$

即
$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1, u)}{M(1, u)+uN(1, u)}du=0,$$

这已是恰当微分方程了. 因此方程(*)有积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^{m+1}[M(1, u)+u\cdot N(1, u)]}$$

代回原方程的变量有

$$\mu=\frac{1}{\left[M(x, y)+N(x, y)\frac{y}{x}\right]x}=\frac{1}{xM(x, y)+yN(x, y)}.$$

1438. 求方程 $y'=\operatorname{tg} y+x\sec y$ 初值问题 $y(0)=0$ 的解.

［解］ 由原方程得到 $y'=\dfrac{\sin y+x}{\cos y}$, $y(0)=0$. 令 $v(y)=\sin y$, 则

$$v'=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=\cos y\cdot y'$$

于是上面的方程变为

$$v'=v+x \quad 及 \quad v(0)=\sin 0=0.$$

这个方程的解是 $v(x)=Ce^x-x-1$ 代入初值得 $v(x)=e^x-x-1$, ∴ 当 $|e^t-t-1|<1$ 时, 得到: $y(x)=\arcsin(e^x-x-1)$.

［说明］ 对于 $y'=\dfrac{a(x)g(y)+b(x)}{g'(y)}$ 形式的微分方程, 其中 $g(y)$ 是连续可微函数, 都可以作变换 $g(y)=v(y)$. 使原方程变为 $v'=a(x)v+b(x)$ 形式的线性方程, 然后可以解得 $v(x)$, 再解得 $y(x)$.

1439. 求方程 $y'=\cos(x+y)$ 的通解.

［解］ 令 $u(x)=x+y(x)$, 于是 $y'=u'-1$. 原方程变为 $u'=1+\cos u$. 分离变量, 得

$$\frac{du}{1+\cos u}=dx, \quad 积分得 \quad \operatorname{tg}\frac{u}{2}=x+C,$$

代入原变量得

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=x+C.$$

1440. 求方程 $y=xy'^2+y'^2$ 的通解.

［解］ 令 $y'=p$, 于是有 $y=xp^2+p^2$. 两边微分得

$$dy=p^2\,dx+2px\,dp+2p\,dp$$

再代到 $dy=p\,dx$, 得到 $p\,dx=p^2\,dx+2px\,dp+2\,p\,dp$, 由此整理得到

$$(1-p)dx=2(x+1)dp \quad 即 \quad \frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p}$$

积分得到

$$\ln(x+1)=-2\ln|1-p|+\ln C, \quad \therefore x+1=\frac{C}{(p-1)^2}$$

利用 $y=p^2(x+1)$ 得到

$$\begin{cases} y=\dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}, \\ x=\dfrac{C}{(p-1)^2}-1. \end{cases}$$

［说明］ 类似 $y=xf(p)+\varphi(p)$ 的方程都可以用上述方法来解.

1441. 解方程 $x=y'\sin y'+\cos y'$.

［解］ 令 $y'=p$ 则 $x=p\sin p+\cos p$, 两边微分得

$$dx=(\sin p+p\cos p-\sin p)dp=p\cos p\,dp$$

代入到 $dy=p\,dx$, 得到 $dy=p^2\cos p\,dp$, 两边积分得

$$y=\int p^2\cos p\,dp=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C$$

于是原方程的解可写为参数形式

$$\begin{cases} x=p\sin p+\cos p, \\ y=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C. \end{cases}$$

［说明］ 类似 $x=\varphi(y')$ 或 $y=\varphi(y')$ 形式的微分方程均可以用此方法求解.

1442. 求方程 $yy'^2+2xy'-y=0$ 的通解.

［解］ 作变换 $y^2=r^2-x^2$, 把未知函数 y 变作 r, 两边求导得

$$yy'=rr'-x.$$

再对方程的两边都乘上 y, 得

$$(yy')^2+2x(yy')-y^2=0.$$

将变换代入,得 $(rr'-x)^2+2x(rr'-x)-(r^2-x^2)=0$, 展开并化简. 方程变为 $r^2(r'^2-1)=0$. 当 $r=0$, 得 $y=x$, $y=-x$, 均不适合方程,舍去;当 $r'^2=1$, 即 $r'=\pm1$, $r=\pm x+C$. 以 $y^2=r^2-x^2$ 代入得 $y^2=C^2\pm2Cx$, 其中 C 是任意常数,或简写为

$$y^2=C^2+2Cx.$$

1443. 一个 60 升的水箱,开始时里面存有 30 升纯水. 注入每升 1/6 克的浓度的盐水,注入后立即搅混均匀,然后从一个排水孔排出, 假定注入盐水的速度是 3 升/分, 流出的水的速度是 2 升/分. 问水箱内盐分随时间的变化率.

［解］ 设 $Q(t)$ 表示水箱内盐的含量，是时间的函数，$V(t)$ 表示盐水的体积．于是 $V(0)=30$，$V'(t)=3-2=1$，于是 $V(t)=30+t$．由题意，含盐量的变化＝流入量－流出量．即

$$Q'\cdot\Delta t=3\cdot\frac{1}{6}\Delta t-\frac{Q(t)}{30+t}\cdot 2\cdot\Delta t,$$

即
$$Q'+\frac{2}{30+t}Q=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad Q(t)=\frac{1}{6}(30+t)-\frac{4500}{(30+t)^2}\quad(0\leqslant t\leqslant 30).$$

1444．若镭放射衰变为氡，氡又衰变为元素钋，若在初始时刻是纯镭．问在时间 t 有多少氡？ 假定在 $t=0$ 时镭的原子数为 N_0，镭的衰变系数为 λ_1，氡的衰变系数为 $\lambda_2(\lambda_1>\lambda_2)$．

［解］ 放射衰变过程中，衰变速度正比于所剩的镭原子数，于是有

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1N_1,\ \ N_1(t)|_{t=0}=N_0,$$

其中 $N_1(t)$表示在时刻 t 镭原子数．解之得 $N_1(t)=N_0e^{-\lambda_1 t}$．氡原子的增加率是镭衰变率 λ_1N_1，或 $\lambda_1N_0e^{-\lambda_1 t}$．但氡本身也在衰变，于是有

$$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1N_1-\lambda_2N_2\quad 即\quad \frac{dN_2}{dt}+\lambda_2N_2=\lambda_1N_0e^{-\lambda_1 t}$$

得
$$N_2(t)=\left(\frac{\lambda_1N_0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}+C\right)e^{-\lambda_2 t}$$

$\because\ \lambda_1\neq\lambda_2$，$t=0$ 时 $N_2(0)=0$　于是

$$0=\frac{\lambda_1N_0}{\lambda_2-\lambda_1}+C\quad\therefore\quad C=-\frac{\lambda_1N_0}{\lambda_2-\lambda_1}$$

最后有
$$N_2(t)=\frac{\lambda_1N_0}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}).$$

1445．假定物体离地面的距离为 x，则按万有引力知，它所受到的地球引力为 $\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}$．其中 $R=6400\,\text{km}$ 是地球半径，$g=9.81\,\text{m/s}^2$，m 是质量．试求在不计空气阻力的情况下，物体脱离地球的逃逸速度．．

［解］ 设物体发射的初速为 v_0，按题意有初值问题

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}, \\ v|_{t=0}=v_0. \end{cases}$$

$$\because \quad \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

若是从地面发射，于是 $v|_{x=0}=v_0$，原初值问题变为

$$\begin{cases} v\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2} \\ v|_{x=0}=v_0 \end{cases}$$

用分离变量法解得

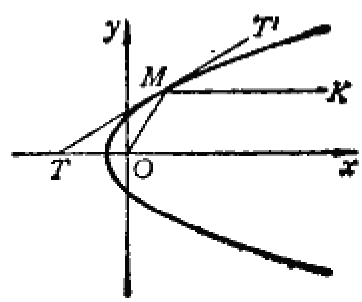
$$\frac{1}{2}v^2=\frac{gR^2}{x+R}+C。\quad 代入初值得 \quad C=\frac{1}{2}v_0^2-gR.$$

$$\therefore \quad v^2=v_0^2-2gR+\frac{2gR^2}{x+R}.$$

本题要求逃逸速度，则要求对一切 x 值，v 要大于零．即当 $x\to\infty$ 时 $v\geqslant0$，上式令 $x\to\infty$ 得 $v^2=v_0^2-2gR\geqslant0$．特别当无穷远的速度为零时的初速即是逃逸速度 v_e:

$$0=v_e^2-2gR, \quad \therefore \quad v_e=\sqrt{2gR}\approx11.2\,\text{km/s}.$$

1446．求集中平行光线于一点的曲面镜的方程．



［解］ 设曲线将平行于 x 轴的光线汇集于原点．TT' 是过 M 点的曲线之切线，光线 KM 经曲面反射经 MO 射到原点，由入射角等于反射角，因此有 $OM=OT$，设 M 点坐标为 (x,y)，则 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$，而切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$ 当 $Y=0$ 时 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，于是

$$|OT|=|X|=-X=-x+\frac{y}{y'}$$

由 $|OT|=|OM|$ 得

$$\sqrt{x^2+y^2}=-x+\frac{y}{y'} \quad 或 \quad (x+\sqrt{x^2+y^2})dy=ydx.$$

这是一个齐次型方程，令 $x=ty$．则方程变为 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$，得到积分式

$$\ln y = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + \ln C.$$

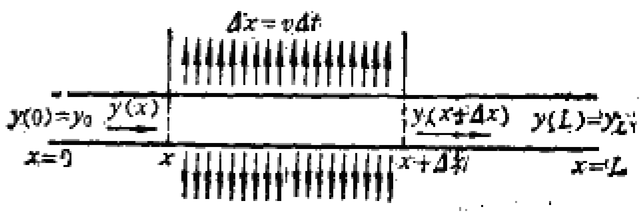
因此$y=C(t+\sqrt{1+t^2})$以$t=\frac{x}{y}$代入得$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C}$. 或化简为

$$y^2=2C\left(x+\frac{c}{2}\right).$$

［说明］ 若运用$\angle MOx=2\angle T'MK$则$\operatorname{tg}\angle MOx=\frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\angle T'MK=y'$. 再运用倍角公式有$\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-y'^2}$得到方程为$yy'^2+2xy'-y=0$, 该方程的解见第1442题.

1447. 考察人体中药物在血液中扩散到体内的过程. 若假定血管是圆柱形的, 半径为r, 长度为L, 血流速度为常值v, 设血液中某药物浓度为$y(x)$, 在血管始端为$y(0)=y_0$, 在终端为$y(L)=y_L(y_L<y_0)$. 血液流动时, 血液中药物通过血管壁渗透到体内, 渗透的规律是渗透率正比于渗透面积, 并正比于壁内外的浓度差. 设体内此药物的浓度为C. 试求血液中此药物浓度的分布规律$y(x)$.

［解］ 设在x处, 考察一微段血管$(x, x+\Delta x)$, 如图所示.



在x处浓度为$y(x)$, 在$x+\Delta x$处浓度为$y(x+\Delta x)$, 若血液流经此段需时间Δt, 于是在Δt时间内这一小段血内药物渗透到体内的量为

$$-y(x+\Delta x)\cdot\pi r^2\Delta x+y(x)\pi r^2\Delta x=-[y(x+\Delta x)-y(x)]\pi r^2\Delta x,$$

按渗透定律此量恰等于 渗透率 × 时间 即

$$k(2\pi r\cdot\Delta x)[y(x+\theta\Delta x)-C]\Delta t$$

式中$0<\theta<1$, k是比例系数. 因此得

$$[y(x)-y(x+\Delta x)]\pi r^2\Delta x=k(2\pi r\Delta x)[y(x+\theta\Delta x)-C]\Delta t,$$

又因$\Delta x=v\cdot\Delta t$, 代入得

$$-\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{2k}{rv}[y(x+\theta\Delta x)-C]$$

令 $\Delta x\to 0$ 得

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{2k}{rv}(y(x)-C)$$

分离变量积分后有

$$\frac{dy}{y-C}=-\frac{2k}{rv}dx,\quad \ln(y-C)=-\frac{2k}{rv}x+\ln B.$$

以 $x=0$, $y=y_0$ 代入得 $\ln B=\ln(y_0-C)$，所以

$$\ln\frac{y-C}{y_0-C}=-\frac{2k}{rv}x \quad 或得 \quad y=C+(y_0-C)e^{-2kx/(rv)}$$

以 $x=L$, $y=y_L$ 代入，则 $\ln\frac{y_L-C}{y_0-C}=-\frac{2k}{rv}L$，于是得到 k 值，代回原来的解的表达式就有

$$\frac{\ln[(y-C)/(y_0-C)]}{\ln[(y_L-C)/(y_0-C)]}=\frac{x}{L} \quad 或 \quad y=C+(y_0-C)\left(\frac{y_L-C}{y_0-C}\right)^{\frac{x}{L}}.$$

§ 2. 二阶常微分方程

1448. 求 $y''+\frac{1}{y^3}=0$ 的通解.

［解］ 令 $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ 于是原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{y^3}=0.$$

分离变量后得

$$p\,dp=-\frac{dy}{y^3}.$$

积分得

$$p^2=\frac{1}{y^2}+C_1,\quad 即 \quad p=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2+1}}{y}$$

即 $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2+1}}{y}$ 再分离变量，得

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1y^2+1}}=\pm dx \quad 积分得 \quad \sqrt{C_1y^2+1}=\pm C_1x+C_2$$

或

$$C_1y^2+1=C_1^2x^2\pm 2C_1C_2x+C_2^2.$$

1449. 解微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} y''=2yy', \\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2. \end{cases}$$

〔解〕 先求方程的通解. 令 $p=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$. 于是原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=2yp,\quad \frac{dp}{dy}=2y,\quad 及\quad p=0.$$

而 $p=0$ 得 $\frac{dy}{dx}=0$, $y=$常数,不符合初值条件. 由 $\frac{dp}{dy}=2y$, 解之得

$$\frac{dy}{dx}=p=y^2+C.$$

代入初值当 $x=0$ 时 $y=1$ 及 $y'=2$, 得 $C=1$, 再由

$$\frac{dy}{dx}=y^2+1.$$

分离变量 $\frac{dy}{1+y^2}=dx$, 积分得 $\operatorname{arc\,tg} y=x+C$ 或 $y=\operatorname{tg}(x+C)$.

代入初值 $x=0$, $y=1$, 则得 $C=\frac{\pi}{4}$ 于是原方程的解是

$$y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

1450. 设粘性液体在流动中, 液体层之间的摩擦力符合定律 $F=\mu\cdot S\frac{dv}{dn}$, 式中 F 表示摩擦力, μ 是粘性系数, S 是接触面积, v 表示速度, n 是接触面的法向方向. 若一管道两端压差为 p_2-p_1, 试求在圆形管道中速度的径向分布. 设管的长度为 l.

〔解〕 由于管道是圆形的, 其速度分布是轴对称的, 即速度 v 仅是 r 的函数. r 表示所考察的点到轴心的距离. 考虑在一同心圆柱层上的流体所受的力: 内外两层流动液体对其的摩擦力 f 为

$$f=F(r)+[-(F(r)+dF(r))]=-dF(r)=-d\left(\mu\cdot S\frac{dv}{dr}\right).$$

由于管长为 l, 则接触面积 $S=2\pi r\cdot l$ 代入上式得

$$f=-2\pi l\mu d\left(r\frac{dv}{dr}\right).$$

另一方面，液体流动是由两端压差造成，压力差为$(p_2-p_1)\cdot 2\pi r\cdot dr$于是

$$-2\pi l\mu d\left(r\frac{dv}{dr}\right)=(p_2-p_1)2\pi r\cdot dr.$$

即
$$l\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{l}{r}\frac{dv}{dr}=-\frac{p_2-p_1}{\mu}$$

记$\alpha=\frac{p_2-p_1}{\mu}$. 则上式变为:

$$\frac{d}{dr}\left(l\frac{dv}{dr}\right)+\frac{1}{r}\left(l\frac{dv}{dr}\right)=-\alpha,$$

这是线性方程．通解为

$$l\frac{dv}{dr}=\frac{C_1}{r}-\frac{\alpha}{2}r$$

解得
$$v(r)=\frac{C_1}{l}\ln r-\frac{\alpha}{4l}r^2+C_2.$$

由于流速是有限的$r\to 0$时$v(r)$有界．所以$C_1=0$．而在管壁处$r=R$，流速应为零．于是

$$0=-\frac{\alpha}{4l}R^2+C_2\quad\therefore\quad C_2=\frac{\alpha}{4l}R^2.$$

最后有
$$v(r)=\frac{\alpha}{4l}(R^2-r^2)=\frac{(p_2-p_1)(R^2-r^2)}{4l\mu}$$

1451. 若$y_1(x)$和$y_2(x)$是微分方程$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$的两个特解，则它们的朗斯基行列式必为：

$$W(y_1,\ y_2)=k\cdot e^{-\int p_1(x)dx}.$$

［证］ 由于$y_1(x)$及$y_2(x)$是齐次方程的解，于是

$$y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)y_1=0\qquad\cdots①$$

及
$$y_2''+p_1(x)y_2'+p_2(x)y_2=0\qquad\cdots②.$$

①式两边乘$y_2(x)$，②式两边乘$y_1(x)$得

$$y_2y_1''+p_1(x)y_2y_1'+p_2(x)y_1y_2=0$$

及
$$y_1y_2''+p_1(x)y_1y_2'+p_2(x)y_1y_2=0$$

两式相减得

$$y_1y_2''-y_2y_1''+p_1(x)(y_1y_2'-y_2y_1')=0$$

$$\because\quad W(y_1,\ y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$$

$$\therefore\quad W'(y_1,\ y_2)=y_1y_2''-y_2y_1'',$$

于是上式变为　　　　$$W'+p_1(x)W=0$$

$$\therefore\quad W(y_1,\ y_2)=k\cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$

成立.

1452. 若已知方程 $2x^2y''-xy'+y=0$ 有一解 $y=x$, 试用降阶法求其另外一个解. 并写出通解表达式.

［解］ 设另一个解为 $y(x)=A(x)\cdot x$, 则 $y'=A'x+A$, $y''=A''x+2A'$. 代入方程.

$$(2x^3A''+4x^2A')-(x^2A'+xA)+xA=0.$$

因此 $2x^3A''+3x^2A'=0$. 每边除以 $3x^3$, 则得 $A''+\frac{3}{2}x^{-1}A'=0$.

则积分 $A'=Cx^{-\frac{3}{2}}$; 再积分 $A(x)=C_1x^{-\frac{1}{2}}+C_2$. 由于是求线性无关的解, 因此可设 $C_1=1$, $C_2=0$, 于是 $A(x)$ 取为 $x^{-\frac{1}{2}}$. 最后有方程的另一个线性无关解为 $y(x)=x^{-\frac{1}{2}}\cdot x=x^{\frac{1}{2}}$. 于是通解表达式为

$$y=C_1x^{\frac{1}{2}}+C_2x,\quad C_1,\ C_2\text{是任意常数}.$$

1453. 若方程 $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=xe^x\ (x>0)$ 的对应的齐次方程有解 $y_1=e^x$, 试求此方程的通解.

［解］ 采用降阶法来解. 设 $y(x)=A(x)\cdot e^x$, 其中 $A(x)$ 是待定函数. 则

$$y'(x)=A\cdot e^x+A'e^x,\ y''=Ae^x+2A'e^x+A''e^x.$$

代入方程得 $xe^xA''+e^xA'=xe^x$. 因此 $xA''+A'=x$, 把 A' 看作是未知函数. 则得线性方程 $(A')'+\frac{1}{x}(A')=1$. 解得

$$A'=\frac{1}{2}x+\frac{C_2}{x},$$

再积分得　　　　$$A=\frac{1}{4}x^2+C_2\ln x+C_1.$$

于是原方程的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^x\ln x+\frac{1}{4}x^2e^x.$$

［说明］ $y_2=e^x\ln x$ 是对应齐次方程的一个解，$y_1=e^x$ 及 $y_2=e^x\cdot\ln x$ 是两个线性无关解.

1454. 试求方程 $y''+2y'-8y=0$ 的通解.

［解］ 特征方程为 $r^2+2r-8=0$，$(r+4)(r-2)=0$，　$\therefore r_1=2$，$r_2=-4$. 于是方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x},\quad C_1,\ C_2 \text{ 是任意常数.}$$

1455. 求初值问题的解：

$$y''+2y'-3y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=1.$$

［解］ 特征方程为 $r^2+2r-3=0$，特征根为 $r_1=-3$，$r_2=1$，其通解

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$$

代入初值 $3=C_1e^0+C_2e^0$ 及 $1=-3C_1e^0+C_2e^0$. 得到方程组：

$$\begin{cases}C_1+C_2=3\\-3C_1+C_2=1\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}\\C_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

于是解为

$$y=\frac{1}{2}e^{-3x}+\frac{5}{2}e^x.$$

1456. 求方程 $y''-4y'+4y=0$ 在初值 $y(0)=2$，　$y'(0)=4$ 时的解.

［解］ 特征方程为　$r^2-4r+4=0$，特征根 $r_1=r_2=2$. 于是通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}\quad (C_1,\ C_2 \text{ 是任意常数}),$$

$$y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x},$$

代入初值　$2=(C_1+C_2\cdot 0)e^0$，　即　$C_1=2$，

$$4=C_2\cdot e^0+2(C_1+C_2\cdot 0)e^0\quad \text{即}\quad C_2+2C_1=4,\quad \therefore\quad C_2=0$$

此初值问题的解为

$$y=2e^{2x}.$$

1457. 求方程 $y''+2y'+3y=0$ 满足初始条件 $y(0)=2$，$y'(0)=-1$ 的解.

［解］ 先求通解. 特征方程为

$$r^2+2r+3=0,\ r_1=-1+i\sqrt{2},\ r_2=-1-i\sqrt{2},$$

于是通解的表达式为

$$y=C_1e^{-t}\cos\sqrt{2}t+C_2e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

代入初值
$$\begin{cases}2=C_1\\ -1=-C_1+\sqrt{2}C_2.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}C_1=2\\ C_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

于是所求问题的解为

$$y(t)=2e^{-t}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t.$$

1458. 设 η 是一实参数，试讨论下述方程 $y''+2\eta y'+\eta y=0$ 的解当 η 取什么值时有解在 $x\to\infty$ 时极限为零.

［解］ 方程的特征方程为 $r^2+2\eta r+\eta=0$，解为

$$r=-\eta\pm\sqrt{\eta^2-\eta}$$

为决定解的形式，我们要分别研究 $\eta^2-\eta>0$，$=0$，<0 三种情况。

当 $\eta^2-\eta>0$，$\therefore\ \eta(\eta-1)>0$，$\therefore\ \eta>1$ 或 $\eta<0$ 此时解为

$$y=C_1e^{(-\eta+\sqrt{\eta^2-\eta})x}+C_2e^{(-\eta-\sqrt{\eta^2-\eta})x}$$

当 $\eta>1$ 时．指数为负，解趋于零．当 $\eta^2-\eta=0$，即 $\eta=0$ 或 $\eta=1$，$\eta=0$ 时，解为 $y=C_1x+C_2$，不合题意舍去．$\eta=1$ 时，解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}\quad 符合题意.$$

当 $\eta^2-\eta<0$ 时，解为

$$y=e^{-\eta x}(C_1\sin\sqrt{\eta-\eta^2}x+C_2\cos\sqrt{\eta-\eta^2}x),$$

此时，由 $\eta^2-\eta<0$ 得 $0<\eta<1$，则 $-\eta<0$．于是解亦随 x 增大而趋于零。

总之，当 $\eta>0$ 时，其解满足要求.

1459. 设 $y(x)$ 是齐次方程 $ay''+by'+cy=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，证明 $y(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上零点的个数或是 0，或是 1，或是无穷个.

［证］ 由关于二阶常系数方程的解的形式知：(1)当特征方程有两相异实根 r_1，r_2 时，则 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$．若 $y=0$，则

$$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}=0,\quad e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}=-C_2/C_1.$$

于是当 $C_2/C_1>0$ 时，$y=0$ 无实根，当 $C_2/C_1<0$ 时，有一个实根

$$x=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln(-C_2/C_1);$$

(2) 当特征方程有两个相同实根时，$r_1=r_2=r$. 则解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}.$$

于是 $y=0$ 有唯一的一个零点. $x=-C_1/C_2(C_2\neq 0)$ 或无零点 $(C_2=0)$；

(3) 当特征方程有一对共轭复根 $r=\alpha\pm i\beta$ 时，解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)=e^{\alpha x}A\sin(\beta x+\varphi),$$

其中 $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{C_1}{C_2}$. 于是 $y=0$ 时有 $\sin(\beta x+\varphi)=0$ 得

$$\beta x+\varphi=k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots),$$

$$x=\frac{k}{\beta}\pi+\frac{\varphi}{\beta}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

有无穷多个解.

1460. 求二阶常系数微分方程 $y''+y=\operatorname{tg}x$ 的通解.

［解］ 先求对应齐次方程的通解. 特征方程为 $r^2+1=0$, $r_{1,2}=\pm i$, 于是通解表达式为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. 非齐次方程的特解，采用常数变易法. 设特解为

$$y_p(x)=u_1(x)\sin x+u_2(x)\cos x.$$

有 $$y_p'(x)=u_1'\sin x+u_2'\cos x+u_1\cos x-u_2\sin x.$$

令 $$u_1'\sin x+u_2'\cos x=0.$$

则 $$y_p''(x)=-u_1\sin x-u_2\cos x+u_1'\cos x-u_2'\sin x.$$

代入原方程得 $$\begin{cases}u_1'\cos x-u_2'\sin x=\operatorname{tg}x\\ u_1'\sin x+u_2'\cos x=0.\end{cases}$$

解出 $u_1'(x)$ 及 $u_2'(x)$ 为

$$u_1'(x)=\sin x,\quad u_2'(x)=\cos x-\frac{1}{\cos x}.$$

积分后得 $u_1(x)=-\cos x+C_1$, $u_2(x)=\sin x-\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right|+C_2$.

取 $C_1=C_2=0$. 得到非齐次方程的一个特解

$$y_p(x)=-\cos x\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|,$$

∴原二阶非齐次方程的通解表达式为:

$$y(x)=-\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C_1\sin x+C_2\cos x.$$

1461. 用待定系数法求方程 $y''+3y'+2y=x^3+2x^2+1$ 的通解.

[解] 对应齐次方程的解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$, 特征根不为零, 设非齐次方程的特解为 $y_p(x)=A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$, 代入非齐次方程,得

$$(6A_1x+2A_2)+3(3A_1x^2+2A_2x+A_3)+2(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4)$$
$$=x^3+2x^2+1$$

整理后得

$$(2A_1)x^3+(2A_2+9A_1)x^2+(2A_3+6A_2+6A_1)x+(2A_4+3A_3+2A_2)$$
$$=x^3+2x^2+1$$

于是得 $\begin{cases}2A_1=1\\2A_2+9A_1=2\\2A_3+6A_2+6A_1=0\\2A_4+3A_3+2A_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{2}\\A_2=-\dfrac{5}{4}\\A_3=\dfrac{9}{4}\\A_4=-\dfrac{13}{8}.\end{cases}$

于是非齐次方程的一个特解是

$$y_p(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{13}{8},$$

通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{13}{8}.$$

1462. 求方程 $y''+y'-2y=e^{2x}$ 的一个特解, 并写出通解表达式.

[解] 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$. 特征根为 $r_1=-2$, $r_2=1$. 设特解为 $y(x)=Ae^{2x}$, 其中 A 是待定系数. 以 $y=Ae^{2x}$ 代入方程得

$$4Ae^{2x}+2Ae^{2x}-2Ae^{2x}=e^{2x}.$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{4}.$$

于是非齐次方程的特解为 $y=\frac{1}{4}e^{2x}$. 通解表达式为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\frac{e^{2x}}{4}.$$

1463. 求方程 $y''+2y'+y=xe^{-x}$ 的通解.

[解] 特征方程 $r^2+2r+1=0$, $r_1=r_2=-1$. 对应齐次方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}.$$

而右端的指数 $\alpha=-1$, 和特征根相同,因此设非齐次方程的特解为

$$y_p(x)=(Ax+B)x^2e^{-x}=(Ax^3+Bx^2)e^{-x}$$

代入原方程得$(6Ax+2B)e^{-x}=xe^{-x}$, 比较两边系数

$$\begin{cases}6A=1\\2B=0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}A=\frac{1}{6}\\B=0.\end{cases}$$

于是非齐次方程的特解为 $y_p(x)=\frac{1}{6}x^3e^{-x}$.

非齐次方程通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

1464. 求方程 $y''-2y'-3y=\operatorname{ch}3x$ 的通解.

[解] 特征方程为 $r^2-2r-3=0$, $r_1=-1$, $r_2=3$, 对应的齐次方程的通解是 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. 又

$$\operatorname{ch}3x=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^{-3x}).$$

分别求 $y_1''-2y_1'-3y_1=\frac{1}{2}e^{3x}$ 和 $y_2''-2y_2'-3y_2=\frac{1}{2}e^{-3x}$ 的特解.

先计算 $y_1''-2y_1'-3y_1=\frac{1}{2}e^{3x}$ 的特解. 设 $y_{1p}(x)=x\cdot Be^{3x}$ 代入方程. 得 $6B+9Bx-2B-6Bx-3Bx=\frac{1}{2}$, 解得 $B=\frac{1}{8}$,即

$$y_{1p}(x)=\frac{1}{8}xe^{3x}.$$

再计算 $y_2''-2y_2'-3y_2=\frac{1}{2}e^{-3x}$ 的特解, 设 $y_{2p}(x)=De^{-3x}$. 将此代入方程得到 $9D+6D-3D=\frac{1}{2}$, 解得 $D=\frac{1}{24}$. 于是 $y_{2p}(x)=\frac{1}{24}e^{-3x}$, ∴原非

齐次方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{x}{8}e^{3x}+\frac{1}{24}e^{-3x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

1465. 求方程 $y''+4y=4x\sin 2x$ 的特解.

［解］ 特征方程为 $r^2+4=0$. 特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$. 于是知 $\alpha=0$, $\beta=2$, 而右端函数 $4x\sin 2x$ 相当于 $\beta=2$, 设特解为

$$y(x)=(A_1x^2+B_1x)\cos 2x+(A_2x^2+B_2x)\sin 2x.$$

分别计算 $y'(x)$ 及 $y''(x)$. 然后代入方程得到

$$(8A_2x+4B_2+2A_1)\cos 2x+(2A_2-4B_1-8A_1x)\sin 2x$$
$$=4x\sin 2x.$$

比较 $\sin 2x$, $\cos 2x$ 的系数,使同次幂系数相同,得

$$\begin{cases}8A_2=0\\4B_2+2A_1=0\\-8A_1=4\\2A_2-4B_1=0\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}A_1=-\dfrac{1}{2}\\B_1=0\\A_2=0\\B_2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

∴ 方程的特解是

$$y(x)=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

1466. 求方程 $y''+4y=\sin^2 x$ 的通解.

［解］ 特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$. 对应的齐次方程的通解为

$$y(x)=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

而非齐次方程的自由项为 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 而 $\beta=2$ 和特征根 $r=2i$ 的 β 相同,设特解为

$$y_r(x)=A+Bx\sin 2x+Cx\cos 2x,$$

其中 A, B, C 为待定系数. 代入方程,得到

$$4B\cdot\cos 2x-4C\sin 2x+4A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

比较系数解得

$$A=\frac{1}{8},\quad B=-\frac{1}{8},\ C=0.$$

∴ 特解为 $$y_p(x)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}x\sin 2x,$$

通解为 $$y(x)=C_2\cos 2x+C_1\sin 2x-\frac{x}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}.$$

1467. 若二阶线性非齐次方程 $y''+\alpha y'=f(x)$ $(0<x<\infty)$ 中 α 是正实数，$f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 连续且 $\int_0^\infty |f(x)|dx$ 收敛，则此方程的解在 $[0,\infty)$ 内有界.

[证] 对应的齐次方程的解是 $y=C_1+C_2e^{-\alpha x}$，用常数变易法求非齐次方程的通解。令 $y_p(x)=u_1(x)+u_2(x)e^{-\alpha x}$，代入原方程，并令 $u_1'+u_2'e^{-\alpha x}=0$，得

$$\begin{cases}u_1'+u_2'e^{-\alpha x}=0\\ -\alpha u_2'e^{-\alpha x}=f(x)\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}u_1'=\dfrac{1}{\alpha}f(x)\\ u_2'=-\dfrac{1}{\alpha}f(x)e^{\alpha x}\end{cases}$$

积分后得
$$u_1(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)dt+C_1',$$
$$u_2(x)=\frac{-1}{\alpha}\int_0^x f(t)e^{\alpha t}dt+C_2'.$$

取 $C_1'=C_2'=0$，得

$$y_p(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)e^{\alpha t-\alpha x}dt.$$

于是 $y(x)=C_1+C_2e^{-\alpha x}+y_p(x)$.

而 $$|y(x)|\leqslant|C_1|+|C_2e^{-\alpha x}|+|y_p(x)|.$$

前两项是有界的。第三项有

$$|y_p(x)|=\frac{1}{\alpha}\left|\int_0^x f(t)e^{\alpha t-\alpha x}dt\right|\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_0^x|f(t)|\cdot e^{\alpha(t-x)}dt.$$

而由于 $0<t<x$，于是 $|e^{\alpha(t-x)}|\leqslant e^{\alpha\cdot 0}=1$，于是

$$|y_p(x)|\leqslant\frac{1}{\alpha}\int_0^x|f(t)|dt<\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty|f(t)|dt<M.$$

因此知 $y_p(x)$ 是有界的,即 $y(x)$ 是有界的.

1468. 求方程 $x^2y''-xy'-3y=\ln x(x>0)$ 的通解.

[解] 此方程是欧拉方程,作变换 $x=e^t$. 于是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}.$$

代入原方程 $$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=t.$$

特征根为 $r^2-2r-3=0$, $r_1=3$, $r_2=-1$, 齐次方程通解是

$$y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}.$$

用待定系数法,设 $y_p(t)=A_1+A_2t$ 是非齐次方程的特解,代入方程解得 $A_1=\frac{2}{9}$, $A_2=-\frac{1}{3}$. 于是特解为 $y_p=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}t$, 再以 $t=\ln x$代入解的表达式,最后得到原方程的通解为

$$y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\ln x.$$

1469. 求方程 $y''+(e^x-1)y'+e^{2x}y=e^{3x}$ 的通解.

[解] 作变量代换 $e^x=t$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^x\frac{dy}{dt}=t\frac{dy}{dt}.$$

而 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入原方程得

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t-1)t\frac{dy}{dt}+t^2y=t^3,$$

即 $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=t.$$

特征根是 $$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

齐次方程的通解为

$$y(t)=\left(C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

设非齐次方程的特解为 $y_p(t)=A_1+A_2t$，代入方程 $A_2+A_1+A_2t=t$. $A_1=-1$, $A_2=1$，于是特解为 $y_p(t)=-1+t$，原方程的通解为

$$y(x)=e^{-\frac{e^x}{2}}\left[C_1\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^x\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^x\right)\right]+e^x-1.$$

1470. **求方程 $x^4y''+2x^3y'-4y=0$ 的通解.**

［解］ 先作代换 $t=\frac{1}{x}$. 则原方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0.$$

通解为
$$y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$$

于是原方程的通解为

$$y(x)=C_1e^{\frac{2}{x}}+C_2e^{-\frac{2}{x}}.$$

1471. **求方程 $y''-4xy'+(4x^2-1)y=-3e^{x^2}\sin 2x$ 的通解.**

［解］ 设 $y=e^{x^2}\cdot z$，于是原方程变为 $z''+z=-3\sin 2x$，因此可解得

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin 2x,$$

代回原方程有

$$y(x)=(C_1\cos x+C_2\sin x+\sin 2x)e^{x^2}.$$

1472. **设方程 $y''-\frac{1}{x}y'+g(x)y=0$ 有两个特解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$. 且满足 $y_1(x)\cdot y_2(x)\equiv 1$. 试求此方程中的 $g(x)$，并写出其通解.**

［解］ 若 $y_1(x)\equiv c$，则 $y_2(x)\equiv\frac{1}{c}$ 代入方程后即知此时 $g(x)\equiv 0$. 因此方程变为 $y''-\frac{1}{x}y'=0$，因此有 $(y')'-\frac{1}{x}(y')=0$. 解之得 $y'=cx$，于是 $y=c_1x^2+c_2$ 是原方程的通解. 若 $y_1(x)\not\equiv c$，而 $y_2(x)=\frac{1}{y_1(x)}$ 则是与 $y_1(x)$ 线性无关的函数. 则按二阶方程的刘维尔公式

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx,$$

而 $y_2(x)=\frac{1}{y_1(x)}$，因此

$$\frac{1}{y_1^2(x)}=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx,$$

即
$$\frac{1}{y_1^2(x)}=\int\frac{x}{y_1^2(x)}dx$$

两边关于 x 求导，得

$$-\frac{2y_1'}{y_1^3}=\frac{x}{y_1^2}\quad 即\quad \frac{y_1'}{y_1}=\frac{1}{2}x,$$

积分解得 $y_1(x)=e^{\frac{1}{4}x^2}$，因此另一个解为 $y_2(x)=e^{-\frac{1}{4}x^2}$　因此原方程的通解为

$$y(x)=c_1e^{\frac{1}{4}x^2}+c_2e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

为确定 $g(x)$，对 $y_1(x)$ 求导，得

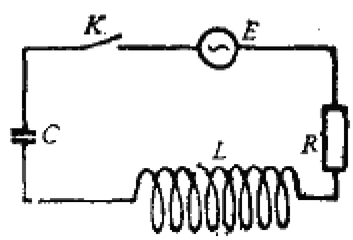
$$y_1'(x)=2\cdot\frac{1}{4}xe^{\frac{1}{4}x^2},\ y_1''(x)=4\left(\frac{1}{4}\right)^2x^2\cdot e^{\frac{1}{4}x^2}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x^2},$$

代入方程易得

$$g(x)=-\frac{1}{4}x^2.$$

1473．考虑如图所示的 RCL 电路，设 $R=4$ 欧姆，$C=\frac{1}{26}$ 法拉，$L=\frac{1}{2}$ 亨利，$E=13$ 伏特，在开关闭合前回路内无电流，试求开关闭合后，电流的变化情况　若 $E=16\cos 2t$ 伏特，则电流变化情况．

［解］ 若 $E=13$ 伏特；按已知条件及基尔霍夫定律，设 I 为电路中的电流，Q 为电量



$$\frac{1}{2}I'+4I+26Q=13.$$

且按 $I=Q'\left(即\ \frac{dQ}{dt}\right)$，于是

$$\begin{cases}\frac{Q''}{2}+4Q'+26Q=13,\\ Q(0)=0,\ Q'(0)=0.\end{cases}$$

此方程的解为

$$Q(t)=C_1e^{-4t}\cos 6t+C_2e^{-4t}\sin 6t+\frac{1}{2}.$$

代入初值得$C_1=-\frac{1}{2}, C_2=-\frac{1}{3}$.

$$\therefore\quad Q(t)=-\frac{1}{2}e^{4t}\cos 6t-\frac{1}{3}e^{-4t}\sin 6t+\frac{1}{2}.$$

由此解可看出，当 t 很大时仅剩下稳定解 $\frac{1}{2}$. 若 E 是 $16\cdot\cos 2t$ 伏特，则方程变为

$$\begin{cases}Q''+8Q'+52Q=32\cos 2t,\\ Q(0)=0,\ Q'(0)=0.\end{cases}$$

因此这是一个二阶非齐次方程. 设其非齐次方程的特解为

$$Q_p(t)=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t,$$

代入方程,比较两边系数得到 $A_1=\frac{3}{5}$, $A_2=\frac{1}{5}$.

于是原方程的通解为

$$Q(t)=C_1e^{-4t}\cos 6t+C_2e^{-4t}\sin 6t+\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t.$$

代入初始条件得到$C_1=-\frac{3}{5}$, $C_2=-\frac{7}{15}$. 因此得到

$$Q(t)=-\frac{1}{15}e^{-4t}(9\cos 6t+7\sin 6t)+\frac{1}{5}(3\cos 2t+\sin 2t).$$

§ 3. 常微分方程的幂级数解法

1474. 试用幂级数法解定解问题：$y''-y=0$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

［解］ 方程是常系数的,设解为

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

求导后代入方程得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

或化为
$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n-a_{n-2}]x^{n-2}=0,$$

因此
$$n(n-1)a_n-a_{n-2}=0\quad(n=2,\ 3,\ \cdots),$$

即
$$a_n=\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$
所以 a_0 及 a_1 是可以任意常数，但按初始条件 $a_0=y(0)=1$，$a_1=y'(0)=1$。于是
$$a_2=\frac{a_0}{2\cdot 1}=\frac{1}{2!},\quad a_3=\frac{a_1}{3\cdot 2}=\frac{1}{3!},\quad a_4=\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{1}{4!},\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}.$$
最后有解
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

1475. 用幂级数解法求方程 $y''-2xy'-2y=0$ 的通解。

［解］ 因为 $x_0=0$ 是常点，于是令解为
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$
将此式代入方程
$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$
化简后得
$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-2}]x^{n-2}=0,$$
于是得到系数的递推关系式
$$a_n=\frac{2}{n}a_{n-2}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots).$$
由此知 a_0 及 a_1 是两个任意常数。而递推关系中，由 a_0 可确定 a_2，a_4，$\cdots$ 由 a_1 可确定 a_3，a_5，$\cdots$ 代入后得
$$a_2=a_0,\ a_4=\frac{a_2}{2}=\frac{a_0}{2},\quad a_6=\frac{a_4}{3}=\frac{a_0}{3\cdot 2},\ \cdots,\ a_{2k}=\frac{a_0}{k!}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$
$$a_3=\frac{2}{3}a_1,\quad a_5=\frac{2}{5}a_3=\frac{2^2a_1}{5\cdot 3},\ \cdots,\ a_{2k+1}=\frac{2^ka_1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$
代入解的表达式
$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1}x^{2k+1}.$$

1476. 求解初值问题
$$x^2y''+2y'+(x-1)y=0,\ y(1)=2,\ y'(1)=3.$$

［解］ 由于解是在初值 $x=1$ 的条件下的，因此设解

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n.$$

而 $x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$，原方程化为

$$[(x-1)^2+2(x-1)+1]y''+2y'+(x-1)y=0.$$

代入方程解得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^n+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}\equiv 0$$

化为同次幂的形式

$$\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)(n-3)a_{n-2}(x-1)^{n-2}+2\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}(x-1)^{n-2}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}(x-1)^{n-2}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}(x-1)^{n-2}\equiv 0$$

比较各幂次项的系数得

$$(2a_1+2a_2)+(a_0+8a_2+6a_3)(x-1)+\sum_{n=4}^{\infty}[n(n-1)a_n$$

$$+2(n-1)^2a_{n-1}+(n-2)(n-3)a_{n-2}+a_{n-3}](x-1)^{n-2}\equiv 0,$$

于是
$$\begin{cases}2a_1+2a_2=0,\\ a_0+8a_2+6a_3=0,\\ a_n=-\dfrac{2(n-1)^2a_{n-1}+(n-2)(n-3)a_{n-2}+a_{n-3}}{n(n-1)}\quad(n=4,\ 5,\ \cdots).\end{cases}$$

代入初值条件知 $a_0=y(1)=2$，$a_1=y'(1)=3$，

$$\therefore\quad a_2=-a_1=-3,\quad a_3=-\frac{1}{6}(a_0+8a_2)=\frac{11}{3},$$

$$a_4=-\frac{18a_3+2a_2+a_1}{4\cdot 3}=-\frac{21}{4},\quad a_5=-\frac{32a_4+6a_3+a_2}{5\cdot 4}=\frac{149}{20},$$

因此初值问题的解的前几项为

$$y(x)=2+3(x-1)-3(x-1)^2+\frac{11}{3}(x-1)^3-\frac{21}{4}(x-1)^4$$

$$+\frac{149}{20}(x-1)^5+\cdots.$$

1477. 求方程 $2xy''+y'-2y=0$ 的通解.

[解] 取解为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sigma}$ 形式的级数，代入方程得

$$2xy''+y'-2y=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_nx^{n+\sigma-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_nx^{n+\sigma-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sigma}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\sigma)(n+\sigma-1)+(n+\sigma)]a_nx^{n+\sigma-1}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+\sigma-1}$$

$$=[2\sigma(\sigma-1)+\sigma]a_0x^{\sigma-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+\sigma)-1]$$

$$[n+\sigma]a_n-2a_{n-1}\}x^{n+\sigma-1}$$

指示方程是 $2\sigma(\sigma-1)+\sigma=0$，即 $(2\sigma-1)\sigma=0$，$\sigma_1=0$，$\sigma_2=\frac{1}{2}$. ∴ $\sigma_1-\sigma_2$ 不是整数. 对 $\sigma=0$.

$$a_n=\frac{2a_{n-1}}{(2n+2\sigma-1)(n+\sigma)}=\frac{4a_{n-1}}{(2n-1)(2n)},\quad n=1,2,\cdots$$

当取 a_0 为任意常数时，

$$a_1=\frac{4a_0}{2!},\quad a_2=\frac{4a_1}{3\cdot4}=\frac{4^2a_0}{4!},\quad a_3=\frac{4^3a_0}{6!},\ \cdots,\ a_n=\frac{4^na_0}{(2n)!},\ \cdots$$

于是其一个解是

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(2\sqrt{x})^{2n}$$

对于 $\sigma=\frac{1}{2}$，有

$$a_n=\frac{2a_{n-1}}{(2n+2\sigma-1)(n+\sigma)}=\frac{2a_{n-1}}{2n\left(n+\frac{1}{2}\right)}\quad(n=1,2,\cdots).$$

在假定 a_0 是任意常数情况下.

$$a_1=\frac{4a_0}{3!},\quad a_2=\frac{4a_1}{4\cdot5}=\frac{4^2}{5!}a_0,\quad a_3=\frac{4a_2}{6\cdot7}=\frac{4^3a_0}{7!},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{4^n a_0}{(2n+1)!}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

于是 $\quad y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!}x^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(2\sqrt{x})^{2n+1}$

是方程的另一个解. 从解的形式知解可以写成

$$y(x)=C_1\operatorname{ch}2\sqrt{x}+C_2\operatorname{sh}2\sqrt{x}\quad (x>0)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

1478. 求方程 $xy''+3y'-2y=0$ 的通解.

［解］ 用幂级数解法. 设 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sigma}$, 代入方程得

$$x^2y''+3xy'-2xy=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+\sigma)(n+\sigma-1)+3(n+\sigma)]a_nx^{n+\sigma}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sigma+1}$$

$$=[\sigma(\sigma-1)+3\sigma]a_0x^{\sigma}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+\sigma)(n+\sigma+2)a_n-2a_{n-1}]x^{n+\sigma}$$

指示方程为 $\sigma(\sigma-1)+3\sigma=0$. 解得 $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-2$. 因此 $\sigma_1-\sigma_2$ 是整数. 系数的递推关系式为

$$(n+\sigma)(n+\sigma+2)a_n-2a_{n-1}=0,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

令 $\sigma=0$, 得 $(n+2)na_n=2a_{n-1}$, $a_n=\frac{2}{(n+2)\cdot n}a_{n-1}$. 于是得

$$a_1=\frac{2a_0}{1\cdot 3}=\frac{2^2a_0}{3!},\quad a_2=\frac{2a_1}{2\cdot 4}=\frac{2^3a_0}{2!4!},\quad a_3=\frac{2a_2}{3\cdot 5}=\frac{2^4a_0}{3!5!},\ \cdots$$

$$a_n=\frac{2^{n+1}}{n!(n+2)!}a_0$$

因此其一个非平凡解为

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!(n+2)!}x^n$$

其另外一个线性无关解是

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-2}+y_1(x)\ln x,$$

其通解为 $\quad y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$

1479. 求方程 $x(x-1)y''+(7x-1)y'+5y=0$ 的通解形式.

［解］ 先将方程化为

$$x^2y''+x\cdot\frac{7x-1}{x-1}y'+\frac{5x}{x-1}y=0.$$

求 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sigma}$ 形式的解．于是其指示方程 $\sigma(\sigma-1)+\sigma\tilde{p}(0)+\tilde{q}(0)=0$ 推出 $\sigma(\sigma-1)+\sigma=0$ 即 $\sigma^2=0$，$\sigma_1=\sigma_2=0$．指示根是重根，令解为

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

形式，代入方程．

$$x(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(7x-1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

化简整理后得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}[7na_n-n(n+1)a_{n+1}]x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}[5a_n-(n+1)a_{n+1}]x^n=0.$$

于是 $$-a_1+5a_0=0,\ 5a_1-2a_2+7a_1-2a_2=0,$$

$$(n+1)(n+5)a_n-(n+1)^2a_{n+1}=0,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,$$

归纳得递推公式

$$a_n=\frac{n+4}{n}a_{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

a_0 是任意常数，或

$$a_n=\frac{(n+4)!}{4!n!}a_0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{4!n!}x^n.$$

另外一个线性无关解的形式为

$$y_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n+y_1(x)\cdot\ln x,$$

其中系数 b_n 待定．

1480．解贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$，其中 m 是正实数．

［解］ $x=0$ 是正则奇点． 指示方程为 $r(r-1)+r-m^2=0$，$r^2-m^2=0$．于是 $r=\pm m$．

令
$$y=x^m\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$
代入方程.
$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1}$$
$$+(x^2-m^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0$$
或记为
$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r}$$
$$-m^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r}=0.$$
比较系数：
$$[r(r-1)+r-m^2]a_0=0,$$
$$[(1+r)r+(r+1)-m^2]a_1=0,$$
$$[(2+r)(1+r)+(r+2)-m^2]a_2+a_0=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(r+k)^2-m^2]a_k+a_{k-2}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
于是对 $r=m$(m 不是整数)有
$$a_{2k}=\frac{(-1)^ka_0}{2^{2k}(m+1)(m+2)\cdots(m+k)\cdot k!},\quad a_{2k+1}=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$
其中 a_0 为任意常数，取 $a_0=\dfrac{1}{2^m\Gamma(m+1)}$ 时，$a_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{2^{2k+m}k!\,\Gamma(m+k+1)}$.
因此有
$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}.$$
同样在 $r=-m$ 时有
$$J_{-m}(x)=\sum_{k=p}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}.$$
通解是 $y(x)=C_1J_m(x)+C_2J_{-m}(x)$. 当 m 是整数时，其解第一个仍为 $J_m(x)$，而第二个 $J_{-m}(x)$ 是和 $J_m(x)$ 线性相关的，按方程幂级数解的理论应是
$$N_m(x)=\lim_{p\to m}\frac{J_p(x)\cdot\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$
通解是
$$y(x)=C_1J_m(x)+C_2N_m(x).$$

1481. 为研究一个系统经过较长时间后的性质，常常要研究在无穷远处的级数形式的解，即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 形式的解. 试求方程

$$x^4y''+(2x^3-x)y'+y=0$$

的形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的解.

［解］ 令 $\frac{1}{x}=s$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}=-s^2\frac{dy}{ds},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{ds}\right)=2s^3\frac{dy}{ds}+s^4\frac{d^2y}{ds^2}.$$

代入方程得到 $\frac{d^2y}{ds^2}+s\frac{dy}{ds}+y=0$ 于是 $s=0$ 是一个常点，即 $x=\infty$ 是原方程的常点. 设

$$y(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

代入方程得

$$\frac{d^2y}{ds^2}+s\frac{dy}{ds}+y(s)=\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-2)a_{n-2}+a_{n-2}]s^{n-2}=0$$

比较系数得 $a_n=-a_{n-2}/n$, $n=2, 3, \cdots$, 于是推得

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^k k!}a_0 \quad 及 \quad a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}a_1,\quad k=1, 2, 3, \cdots$$

因此解为

$$y(s)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}s^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}s^{2k+1}.$$

原方程的解为:

$$y(t)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\frac{1}{x}\right)^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2k+1}.$$

§4. 微分方程组

1482. 试将下列微分方程组化为标准形式的一阶微分方程组:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=2\dfrac{dx}{dt}+3\dfrac{dy}{dt}-y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dx}{dt}+x; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,\ x,\ y,\ \dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=g\left(t,\ x,\ y,\ \dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right), \\ t=0 \text{ 时 } x=x_0,\ y=y_0,\ \dfrac{dx}{dt}=u_0,\ \dfrac{dy}{dt}=v_0. \end{cases}$$

［解］ (1) 令 $u=\dfrac{dx}{dt}$，$v=\dfrac{dy}{dt}$ 于是上述方程组变为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=2u+3v-y, \\ \dfrac{dv}{dt}=u+x, \\ \dfrac{dx}{dt}=u, \\ \dfrac{dy}{dt}=v. \end{cases}$$

(2) 令 $u=\dfrac{dx}{dt}$，$v=\dfrac{dy}{dt}$，于是原方程化为下列定解问题。

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=f(t,\ x,\ y,\ u,\ v) \\ \dfrac{dv}{dt}=g(t,\ x,\ y,\ u,\ v), \\ \dfrac{dx}{dt}=u, \\ \dfrac{dy}{dt}=v, \end{cases} \qquad \text{初始条件：} \begin{cases} u|_{t=0}=u_0, \\ v|_{t=0}=v_0, \\ x|_{t=0}=x_0, \\ y|_{t=0}=y_0. \end{cases}$$

1483. 试用消元法求解方程组：

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}=-x+yt, \\ t^2\dfrac{dy}{dt}=-2x+yt. \end{cases}$$

［解］ 由第二个方程解得 $x=-\frac{1}{2}t^2\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}yt$，对 t 求导得

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{t}{2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y,$$

将 $\frac{dx}{dt}$ 及 x 的表达式代入第一个方程．化简后得 $t^3\frac{d^2y}{dt^2}+2t^2\frac{dy}{dt}=0$．当 $t\neq0$ 时有 $t\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}=0$．于是解得 $\frac{dy}{dt}=\frac{c_1}{t^2}$ 再积分 $y(t)=-c_1t^{-1}+c_2$．再代入到 $x(t)$ 的表达式有

$$x=-\frac{1}{2}t^2\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}yt=-\frac{1}{2}t^2\left(\frac{c_1}{t^2}\right)+\frac{t}{2}(-c_1t^{-1}+c_2)=-c_1+\frac{c_2}{2}t.$$

于是原方程的解为

$$\begin{cases}x(t)=-c_1+\frac{c_2}{2}t\\ y(t)=-c_1t^{-1}+c_2\end{cases}\quad(t\neq0).$$

［说明］ 此题亦可以先从第一个方程解出 y 的表达式，代入第二个方程，再求解关于 x 的微分方程．

1484．用首次积分法解如下方程组：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{y}{x-y}\\ \frac{dy}{dt}=\frac{x}{x-y}.\end{cases}$$

［解］ 两个方程相减得

$$\frac{d(x-y)}{dt}=\frac{y-x}{x-y}\quad 即\quad \frac{d(x-y)}{dt}=-1.$$

$\therefore x-y=-t+c_1$．第一个方程乘以 x 减去第二个方程乘以 y 得

$$x\frac{dx}{dt}-y\frac{dy}{dt}=\frac{xy}{x-y}-\frac{y-x}{x-y}=0\quad 于是\quad \frac{d(x^2-y^2)}{dt}=0,$$

$\therefore x^2-y^2=c_2$．这两个首次积分是相互独立的．因此此方程组的通解是

$$x^2-y^2=c_2\quad 及\quad x-y+t=c_1.$$

1485．求方程组 $\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$ 的首次积分．

［解］ 由后一方程得

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

从而得 $y=C_1z$. 再用 x 乘第一个分式的分子和分母，y 乘第二个，z 乘第三个，然后用比例定理，得到

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy}.$$

积分后得

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$$

最后得到方程组的解是

$$\begin{cases}y=C_1z,\\ x^2+y^2+z^2=C_2y.\end{cases}$$

1486. 试用首次积分法求初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\cos^2x\cos^2y+\sin^2x\sin^2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin 2y,\end{cases}\qquad \begin{cases}x(0)=0\\ y(0)=0.\end{cases}$$

［解］ ∵ $-\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin 2y=-2\sin x\sin y\cos x\cos y.$

于是两个方程相加，

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)^2,\quad 即\quad \frac{d(x+y)}{dt}=\cos^2(x+y).$$

积分后得

$$\operatorname{tg}(x+y)=t+C_1$$

两个方程相减得

$$\frac{d}{dt}(x-y)=(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2\quad 即\quad \frac{d(x-y)}{dt}=\cos^2(x-y).$$

积分后得 $\operatorname{tg}(x-y)=t+C_2$. 代入初值知 $C_1=C_2=0$. 于是问题的解为

$$\operatorname{tg}(x+y)=t,\ \operatorname{tg}(x-y)=t.$$

1487. 求微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=ny+mz\\ \dfrac{d^2z}{dx^2}=my+nz\end{cases}$ $(m>n>0)$ 的通解.

［解］ 将两式相加得

$$\frac{d^2(y+z)}{dx^2}=(m+n)(y+z).$$

于是 $$(y+z)=C_1e^{\sqrt{m+n}\,x}+C_2e^{-\sqrt{m+n}\,x}.$$

将两式相减，得

$$\frac{d^2(y-z)}{dx^2}=-(m-n)(y-z).$$

于是 $(y-z)=D_1\sin\sqrt{m-n}\,x+D_2\cos\sqrt{m-n}\,x$ 由上两个解式联立解得

$$y(x)=\frac{1}{2}(C_1e^{\sqrt{m+n}\,x}+C_2e^{-\sqrt{m+n}\,x}+D_1\sin\sqrt{m-n}\,x$$

$$+D_2\cos\sqrt{m-n}\,x),$$

$$z(x)=\frac{1}{2}(C_1e^{\sqrt{m+n}\,x}+C_2e^{-\sqrt{m+n}\,x}-D_1\sin\sqrt{m-n}\,x$$

$$-D_2\cos\sqrt{m-n}\,x).$$

1488. 求满足下列条件的两条平面曲线：(1) 在两条曲线上有相同横坐标的一对点处所引的切线相交于纵轴上，所引的法线相交于横轴上；(2) 一条曲线过点 (1, 1)，另一条曲线过点 (1, 2)。

［解］ 设两曲线的方程为 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$。于是过 x 点的两条曲线的切线方程为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$ 及 $Y-z(x)=z'(x)(X-x)$。这两切线相交于纵轴，即 $X=0$ 时 Y 值相同，于是$Y_1=y-y'x$, $Y_2=z-z'x$，因此

$$y-y'x=z-z'x.$$

同样，其法线分别为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \quad 及 \quad Y-z=-\frac{1}{z'}(X-x),$$

于是由已知条件当 $Y=0$ 时 X 有相同的值，即 $yy'=zz'$。因此所求的曲线化为定解问题：

$$\begin{cases}y-xy'=z-xz'\\ yy'=zz',\end{cases}\qquad\begin{cases}y(1)=1\\ z(1)=2.\end{cases}$$

由第一式得

$$x\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}\right)=y-z,\quad \therefore\quad \frac{d(y-z)}{y-z}=\frac{dx}{x},\quad y-z=C_1x$$

由第二式，$y^2-z^2=C_2$. 于是代入初值 $1-2=C_1$, $1-4=C_2$ 即 $C_1=-1$, $C_2=-3$. 于是得

$$\begin{cases}y-z=-x\\ y^2-z^2=-3\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}y=\dfrac{1}{2}\left(-x+\dfrac{3}{x}\right)\\ z=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\end{cases}$$

此即所求曲线.

1489. 证明函数 $H(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)=C$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_k}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial y_k}\\ \dfrac{dy_k}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_k}\end{cases}\quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

的首次积分.

[证] 在第一组方程的两边对应地乘以 $\dfrac{\partial H}{\partial x_k}$ 得

$$\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

在第二组方程的两边对应地乘以 $\dfrac{\partial H}{\partial y_k}$ 得

$$\frac{\partial H}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}\quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

然后两式相加得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt}=0,$$

或 $dH=0$. 因此 $H=C$ 是此方程组的一个首次积分.

1490. 试用逐次积分法求解二阶方程 $y''+y'-2y=e^x$.

[解] 用 D 表示微分算子 $\dfrac{d}{dx}$, 则上述方程可以写成

$$(D^2+D-2)y=e^x\quad 或写成\quad (D-1)(D+2)y=e^x$$

令 $(D+2)y=u$, 则化为 $(D-1)u=e^x$ 这是线性方程，用一阶方程公式来

解，得 $u(x)=xe^x+Ce^x$. 于是原方程为

$$(D+2)y=xe^x+Ce^x \quad 即 \quad y'+2y=xe^x+Ce^x$$

这仍是一个线性方程，可求解得

$$y(x)=\frac{1}{3}xe^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

1491. 试求方程 $(D^2-6D+10)y=e^{3x}$ 的通解.

［解］ 由于 $P(D)=D^2-6D+10$，且 $P(3)=1\neq0$. 于是非齐次方程的一个特解为

$$y_P=\frac{e^{3x}}{D^2-6D+10}=\frac{e^{3x}}{9-18+10}=e^{3x}.$$

再求对应的齐次方程的通解. 由特征根 $r_{1,2}=3\pm i$ 知，齐次方程的通解为

$$y_H=C_1e^{3x}\sin x+C_2e^{3x}\cos x$$

因此原方程的通解是

$$y(x)=C_1e^{3x}\sin x+C_2e^{3x}\cos x+e^{3x}.$$

1492. 解方程 $y''-y'-6y=10xe^{3x}$.

［解］ 原方程写为 $(D^2-D-6)y=10xe^{3x}$，两边同乘 e^{-3x}，于是利用关系式 $e^{\alpha x}P(D)y=P(D-\alpha)(e^{\alpha x}y)$. 得

$$e^{-3x}(D^2-D-6)y=[(D+3)^2-(D+3)-6](ye^{-3x})$$
$$=(D^2+5D)(ye^{-3x})=10x.$$

而记 $ye^{-3x}=u$ 得 $(D^2+5D)u=10x$，$D(D+5)u=10x$. 得特解为

$$(D+5)u=5x^2,\ u=x^2-\frac{2}{5}x. \quad 即 \quad ye^{-3x}=x^2-\frac{2}{5}x.$$

因此非齐次方程特解为

$$y_p(x)=\left(x^2-\frac{2}{5}x\right)e^{3x},$$

齐次方程的通解为

$$y_H(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x},$$

原方程通解为

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}+\left(x^2-\frac{2}{5}x\right)e^{3x}.$$

1493. 求 $y''-4y'+4y=x^2$ 的通解.

[解] 此方程对应的齐次方程特征根为 $r_1=r_2=2$，于是齐次方程的通解为 $y_H(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$ 非齐次方程的特解为 $y_P(x)$，$P(D)=D^2-4D+4$，$f(x)=x^2$。最高幂次是 2，

$$\because \quad \frac{1}{4-4D+D^2}=\frac{1}{4}+\frac{D}{4}+\frac{3}{16}D^2+\cdots$$

于是

$$y_P(x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{D}{4}+\frac{3}{16}D^2\right)\cdot f(x)$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{3}{16}\frac{d^2}{dx^2}(x^2)$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$$

于是原方程的通解为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}.$$

1494. 求方程 $y''+y=e^x\sin x$ 的通解.

[解] 对应的齐次方程的通解为 $y_H(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$. 对于特解，用算子方法 $P(D)=D^2+1$，$f(x)=e^x\sin x=\operatorname{Im}e^{x+ix}$ 于是有

$$y_P(x)=\operatorname{Im}\frac{1}{D^2+1}\cdot e^{(1+i)x}=\operatorname{Im}\frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2+1}$$

$$=\operatorname{Im}\frac{e^x}{1+2i}(\cos x+i\sin x)=\frac{e^x}{5}(\sin x-2\cos x)$$

于是原方程的通解为

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{5}(\sin x-2\cos x).$$

1495. 求解方程组 $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=3x-y,\end{cases}$ 初值 $\begin{cases}x(0)=3\\ y(0)=-5.\end{cases}$

[解] 先求方程组的通解. 由第一个方程得 $y=x'-x$，于是 $y'=x''-x'$ 代入到第二个方程有 $x''-x'=3x-(x'-x)$。于是有 $x''-4x=0$。于是通解为

$$x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$$

代入 $y(t)$ 的表达式有

$$y(t)=x'-x=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}-(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})=C_1e^{2t}-3C_2e^{-2t}$$

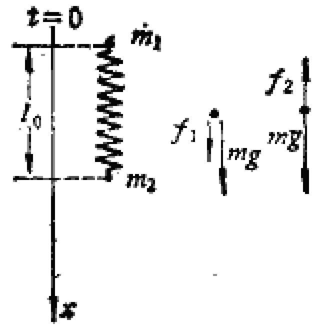
代入初始条件,得到

$$\begin{cases}C_1+C_2=3\\C_1-3C_2=-5.\end{cases}\quad 解得 \quad \begin{cases}C_1=1\\C_2=2.\end{cases}$$

原初值问题的解为

$$\begin{cases}x(t)=e^{2t}+2e^{-2t}\\y(t)=e^{2t}-6e^{-2t}.\end{cases}$$

1496. 质量为m的两个小球,由弹簧连接,弹簧未拉长时的长度为l_0,当它被拉长到l_1时,这两个小球开始降落,两小球位于同一条铅垂线上,经过T秒钟弹簧长度又缩到l_0,如不计阻力,试求这两个小球的运动.



[解] 如图建立坐标系. 质点坐标为x_1, x_2, 对于质点m_1, 受到重力mg及弹簧的作用力f_1, 质点m_2受到重力及弹簧的作用力f_2, f_1和f_2方向相反,大小相等.

$$|f_1|=|f_2|=k|x_2-x_1-l_0|$$

因此列出微分方程组

$$\begin{cases}m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=mg+k(x_2-x_1-l_0)\\[2ex] m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=mg-k(x_2-x_1-l_0),\end{cases}$$

初始条件$t=0$时, $x_2-x_1=l_1$, $x_1'(0)=x_2'(0)=0$.

$t=T$时, $x_2-x_1=l_0$.

令$x=x_2-x_1-l_0$, 将方程组两个方程相减得$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{2k}{m}x$.

$$\therefore\quad x=C_1\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t.$$

$\therefore$ 由初始条件得

$$x(0)=l_1-l_0,\ x'(0)=0\quad 及\quad x(T)=0.$$

$$\therefore\quad l_1-l_0=C_1,\ 0=-C_1\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin 0+C_2\sqrt{\frac{2k}{m}}\cos 0,$$

$$\therefore\quad C_2=0.$$

$$0=(l_1-l_0)\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,T,\quad\therefore\quad \sqrt{\frac{2k}{m}}\,T=\frac{\pi}{2},\ k=\frac{\pi^2m}{8T^2},$$

代回 x 的表达式得

$$x_2-x_1-l_0=(l_1-l_0)\cos\frac{\pi t}{2T},$$

即
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=mg+\dfrac{m\pi^2(l_1-l_0)}{8T^2}\cos\dfrac{\pi}{2T}t, \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=mg-\dfrac{m\pi^2(l_1-l_0)}{8T^2}\cos\dfrac{\pi}{2T}t, \end{cases}$$

积分后，再利用初值条件 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=l_1$ 得问题的解是：

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{1}{2}gt^2-\dfrac{l_1-l_0}{2}\cos\dfrac{\pi}{2T}t+\dfrac{l_1-l_0}{2}, \\ x_2(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+\dfrac{l_1-l_0}{2}\cos\dfrac{\pi}{2T}t+\dfrac{l_1+l_0}{2}. \end{cases}$$

1497. 求解微分方程组 $\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+f_1(t), \\ y'=a_2x+b_2y+f_2(t). \end{cases}$

［解］ 以 λ 乘第二式与第一式相加，得

$$(x+\lambda y)'=(a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+f_1(t)+\lambda f_2(t).$$

选择 λ，使得 $b_1+\lambda b_2=(a_1+\lambda a_2)\lambda$. 这时上式变为

$$(x+\lambda y)'=(a_1+\lambda a_2)(x+\lambda y)+[f_1(t)+\lambda f_2(t)].$$

以$(x+\lambda y)$作为新的变量. 解得

$$x+\lambda y=e^{(a_1+\lambda a_2)t}\left\{C+\int[f_1(t)+\lambda f_2(t)]e^{-(a_1+\lambda a_2)t}\,dt\right\}=F(t).$$

若 $b_1+\lambda b_2=(a_1+\lambda a_2)\lambda$ 有两个相异的根，则上面得到两个式子，从而可以解出 x 及 y 来.

即
$$\begin{cases} x+\lambda_1y=F_1(t), \\ x+\lambda_2y=F_2(t). \end{cases}$$

得到
$$\begin{cases} x=[\lambda_2F_1(t)-\lambda_1F_2(t)]/(\lambda_2-\lambda_1), \\ y=[F_1(t)-F_2(t)]/(\lambda_1-\lambda_2). \end{cases}$$

1498. 求解微分方程组 $\begin{cases} x'=5x+4y+e^t, \\ y'=4x+5y+1. \end{cases}$

［解］ 以 λ 乘第二式再与第一式相加. 得

$$(x+\lambda y)'=(5+4\lambda)x+(4+5\lambda)y+e^t+\lambda.$$

选择 λ，使 $4+5\lambda=\lambda(5+4\lambda)$. 解之得 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. 对应 $\lambda=1$ 时，

则有

$$(x+y)'=9(x+y)+e^t+1,$$

解之得

$$(x+y)=C_1e^{9t}-\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{9}.$$

对应 $\lambda=-1$ 时，则有

$$(x-y)'=(x-y)+e^t-1,\quad (x-y)=C_2e^t+te^t+1$$

联立解得

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(C_1e^{9t}+C_2e^t+te^t-\frac{1}{8}e^t+\frac{8}{9}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(C_1e^{9t}-C_2e^t-\frac{1}{8}e^t-te^t-\frac{10}{9}\right).\end{cases}$$

1499. 试求方程 $Y'=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}Y$ 的通解.

［解］　特征方程是

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=0,$$

特征根是 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$. 对应于 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$ 有

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}-2\xi_1+2\xi_2=0\\2\xi_1-2\xi_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\xi_1=C_1\\\xi_2=C_1.\end{cases}$$

取特征向量为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad 于是\quad \mathbf{Y}_1(t)\equiv e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$ 有

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}2\xi_1+2\xi_2=0\\2\xi_1+2\xi_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\xi_1=C_2\\\xi_2=-C_2.\end{cases}$$

取特征向量为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad 于是\quad \mathbf{Y}_2(t)\equiv e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

而由于

$$\det[\mathbf{Y}_1(0),\ \mathbf{Y}_2(0)]=\det\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=-2\neq 0.$$

因此,原方程组的通解为

$$\boldsymbol{Y}(t)=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^{3t}+C_2e^{-t}\\C_1e^{3t}-C_2e^{-t}\end{pmatrix},$$

C_1, C_2是任意常数.

1500. 求二阶常系数线性方程组 $\boldsymbol{Y}'=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$ 的通解.

[解] 特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

即$(1-\lambda)^2+4=0$, 于是 $\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2=1-2i$. 对应于 $\lambda=1+2i$ 的特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$, 于是由 $A\xi=\lambda\xi$ 得

$$\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=(1+2i)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix},\ \text{得}\quad\begin{cases}-2i\xi_1+2\xi_2=0\\-2\xi_1-2i\xi_2=0.\end{cases}$$

取特征向量为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{(1+2i)x}&=\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right](e^x\cos 2x+ie^x\sin 2x)\\&=\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^x\cos 2x-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^x\sin 2x\right]\\&\quad+i\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^x\cos 2x+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^x\sin 2x\right]\\&=\begin{pmatrix}e^x\cos 2x\\-e^x\sin 2x\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}e^x\sin 2x\\e^x\cos 2x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

于是通解为

$$\boldsymbol{Y}(t)=C_1\begin{pmatrix}e^x\cos 2x\\-e^x\sin 2x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^x\sin 2x\\e^x\cos 2x\end{pmatrix}.$$

1501. 试求方程组 $\boldsymbol{Y}'=\begin{pmatrix}4&6&6\\1&3&2\\-1&-4&-3\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$ 的通解.

[解] 特征方程为

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

即 $-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)=0$. 于是特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=1$, 则设特征向量

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

由 $A\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$ 得 $\begin{cases} 3\xi_1+6\xi_2+6\xi_3=0 \\ \xi_1+2\xi_2+2\xi_3=0 \\ -\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \xi_1=0 \\ \xi_2=-k \\ \xi_3=k, \end{cases}$

特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

同理，对于 $\lambda_2=-1$, 得特征向量为

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=4$, 得特征向量为

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

最后方程组的通解表达式为

$$\mathbf{Y}(t)=C_1e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}+C_3e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1502. 试求方程组 $\boldsymbol{Y}'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}$ 的通解.

［解］ 先计算特征根

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ 0 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$\therefore \quad (\lambda-2)^2(\lambda+1)=0, \quad 解得 \quad \lambda_1=\lambda_2=2, \ \lambda_3=-1.$$

对于 $\lambda=2$，求其对应的特征向量，研究方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}=0, \quad 得 \quad \begin{cases} -3\xi_2+3\xi_3=0 \\ 3\xi_2-3\xi_3=0 \\ 6\xi_2-6\xi_3=0. \end{cases}$$

由于方程中不出现 ξ_1，于是有两个任意常数，令 $\xi_1=h$ $\xi_2=k$，则 $\xi_3=k$.

于是 $\begin{pmatrix} h \\ k \\ k \end{pmatrix}$ 是特征向量，取 $h=0$，$k=1$ 及 $h=1$，$k=0$. 分别得到两个特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

于是特解为
$$\mathbf{Y}_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{Y}_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda=-1$，其相应的特征向量

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}=0,$$

即
$$\begin{cases} 3\xi_1-3\xi_2+3\xi_3=0 \\ 6\xi_2-3\xi_3=0 \\ 6\xi_2-3\xi_3=0, \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \xi_1=-k \\ \xi_2=k \\ \xi_3=2k, \end{cases}$$

于是第三个线性无关解为

$$\mathbf{Y}_3(t)=e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$\mathbf{Y}(t)=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1503. 试求方程组 $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2+y_3\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1+y_2-y_3\\ \dfrac{dy_3}{dt}=y_2+y_3\end{cases}$ 的通解。

［**解**］ 这是常系数线性方程组．系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

特征方程 $\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&-1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$，即 $\lambda(\lambda-1)^2=0$．

所以 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=1$．对于单根 $\lambda_1=0$，可计算其特征向量

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}.\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=0,\ 得\quad \begin{cases}\xi_2+\xi_3=0\\\xi_1+\xi_2-\xi_3=0\end{cases}$$

于是 $\xi_1=2k$，$\xi_2=-k$，$\xi_3=k$，特征向量取为

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.\quad 第一个解为\quad \mathbf{Y}_1(t)=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对于二重根 $\lambda=1$，则可取解的形状为

$$\mathbf{Y}(t)=\left[\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix}\right]e^t,$$

代入方程组，比较同次幂的系数，得到

$$\begin{cases}\eta_1-\eta_2-\eta_3=0\\ \eta_1-\eta_3=0\\ \eta_2=0\\ \xi_1+\eta_1-\xi_2-\xi_3=0\\ -\xi_1+\eta_2+\xi_3=0\\ \eta_3-\xi_2=0,\end{cases}$$

这六个方程系数矩阵的秩为4，它的解构成2维线性子空间，或者说依赖于两个任意常数k, h，其解为

$$\xi_1=k,\ \xi_2=h,\ \xi_3=k,\ \eta_1=h,\ \eta_2=0,\ \eta_3=h$$

于是其解表达成

$$\mathbf{Y}_2(t)=\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix}e^t,\quad \mathbf{Y}_3(t)=h\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^t+h\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}te^t.$$

归纳前面的结果得方程组的通解

$$\mathbf{Y}(t)=C_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^t\\0\\e^t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}te^t\\e^t\\te^t\end{pmatrix}.$$

1504. 求解方程组$\begin{cases}3\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+x+3y=0\\ 2\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+x+2y=0.\end{cases}$

[解] 此方程组是由两个二阶方程所组成，可以化为线性方程，先化为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-y\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-x\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=u\\ \dfrac{du}{dt}=-y\\ \dfrac{dy}{dt}=v\\ \dfrac{dv}{dt}=-x\end{cases}$$

特征方程 $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$

即 $\lambda^4-1=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$.

对于 $\lambda_1=1$ 得　$x=C_1$, $u=C_1$, $y=-C_1$, $v=-C_1$.

对于 $\lambda=-1$ 得　$x=C_2$, $u=-C_2$, $y=-C_2$, $v=+C_2$.

对于 $\lambda=i$ 得　$x=C_3$, $u=C_3i$, $y=C_3$, $v=C_3i$.

对于 $\lambda=-i$ 得　$x=C_4$, $u=-C_4i$, $y=C_4$, $v=-C_4i$.

于是 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}+C_3'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{it}+C_4'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-it}$

$$=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t+C_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t.$$

即
$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t \\ y=-C_1e^t-C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t. \end{cases}$$

1505. 求解下列方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+4y+e^{3t} \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+3y-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=0. \end{cases}$$

[解] 先求对应的齐次方程的解.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+4y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+3y. \end{cases}$$

特征方程 $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$, $\lambda^2-2\lambda+1=0$, $\lambda_1=\lambda_2=1$.

于是齐次方程的解为

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1+C_2t \\ D_1+D_2t \end{pmatrix}e^t.$$

代入齐次方程解得

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1+C_2t \\ \dfrac{2C_1+C_2}{4}+\dfrac{C_2}{2}t \end{pmatrix}e^t, \quad 即 \quad \begin{cases} x_H=(C_1+C_2t)e^t \\ y_H=\left(\dfrac{2C_1+C_2}{4}+\dfrac{C_2}{2}t\right)e^t \end{cases}$$

再求一个非齐次方程的特解. 设此特解为

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1+D_2e^{3t} \\ E_1+E_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

将此解代入方程中

$$\begin{cases} 3D_2e^{3t}=(-D_1+4E_1)+(-D_2+4E_2+1)e^{3t} \\ 3E_2e^{3t}=(-D_1+3E_1-1)+(-D_2+3E_2)e^{3t}, \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -D_1+4E_1=0 \\ -D_1+3E_1=1 \\ -4D_2+4E_2=-1 \\ -D_2=0, \end{cases}$$

于是
$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -1-\dfrac{e^{3t}}{4} \end{pmatrix},$$

方程组的通解为

$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2te^t-4 \\ y=\dfrac{2C_1+C_2}{4}e^t+\dfrac{C_2t}{2}e^t-1-\dfrac{1}{4}e^{3t}, \end{cases}$$

代入初值:
$$\begin{cases} x(0)=C_1-4=0 \\ y(0)=\dfrac{2C_1+C_2}{4}-1-\dfrac{1}{4}=0, \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=-3. \end{cases}$$

因此所求初值问题的解为

$$\begin{cases} x=4e^t-3te^t-4 \\ y=\dfrac{5}{4}e^t-\dfrac{3}{2}te^t-\dfrac{1}{4}e^{3t}-1. \end{cases}$$

1506. 求初值问题 $\begin{cases} x'=y+\sin t \\ y'=x+2\cos t \end{cases}$, $\begin{cases} x(0)=2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的解.

[解] 先求对应齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=x. \end{cases}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

于是 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，对应于 $\lambda_1=1$ 得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

对应于 $\lambda=-1$ 得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

所以齐次方程组的通解为

$$\begin{cases} x_H=C_1e^t+C_2e^{-t} \\ y_H=C_1e^t-C_2e^{-t}. \end{cases}$$

设非齐次方程组的特解为

$$\begin{cases} x_P=D_1\cos t+D_2\sin t \\ y_P=D_3\cos t+D_4\sin t. \end{cases}$$

其中 D_1，D_2，D_3 和 D_4 是待定系数，

代入方程组得到

$$\begin{cases} -D_1\sin t+D_2\cos t=D_3\cos t+D_4\sin t+\sin t \\ -D_3\sin t+D_4\cos t=D_1\cos t+D_2\sin t+2\cos t, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} -D_1=D_4+1 \\ -D_3=D_2 \\ D_2=D_3 \\ D_4=D_1+2. \end{cases}$$

解得 $D_1=-\dfrac{3}{2}$，$D_2=0$，$D_3=0$，$D_4=\dfrac{1}{2}$. 特解为

$$x_P=-\frac{3}{2}\cos t,\quad y_P=\frac{1}{2}\sin t.$$

原方程组的通解为

$$\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}-\dfrac{3}{2}\cos t \\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\dfrac{1}{2}\sin t. \end{cases}$$

代入初值 $x(0)=2$ 及 $y(0)=0$，得

$$\begin{cases}2=C_1+C_2-\dfrac{3}{2}\\0=C_1-C_2,\end{cases}$$

因此$C_1=C_2=\dfrac{7}{4}$.

问题的解为
$$\begin{cases}x=\dfrac{7}{4}e^t+\dfrac{7}{4}e^{-t}-\dfrac{3}{2}\cos t\\y=\dfrac{7}{4}e^t-\dfrac{7}{4}e^{-t}+\dfrac{1}{2}\sin t.\end{cases}$$

1507. 求微分方程组$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\\dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$的通解.

[解] 所对应的齐次方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\\dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$$

其通解为
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t\\-C_1\sin t+C_2\cos t\end{pmatrix}.$$

用常数变易法求非齐次方程特解,设特解为

$$\begin{cases}x=V_1(t)\cos t+V_2(t)\sin t\\y=-V_1(t)\sin t+V_2(t)\cos t,\end{cases}$$

其中$V_1(t)$, $V_2(t)$是待定函数. 将其代入方程组有

$$\begin{cases}V_1'(t)\cos t+V_2'(t)\sin t=0\\-V_1'(t)\sin t+V_2'(t)\cos t=\dfrac{1}{\cos t},\end{cases}$$

由此得$V_1'(t)=-\operatorname{tg} t$, $V_2'(t)=1$, 积分得$V_1(t)=\ln\cos t+C_1$, $V_2(t)=t+C_2$.

因而原方程的通解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+\cos t\ln\cos t+t\cdot\sin t\\y=-C_1\sin t+C_2\cos t-\sin t\ln\cos t+t\cdot\sin t.\end{cases}$$

1508. 解方程组 $\begin{cases}(2D^2+3D-9)x+(D^2+7D-14)y=4\\(D+1)x+(D+2)y=-8e^{2t}.\end{cases}$

［解］ 由算子方法知，$x(t)$ 和 $y(t)$ 可由下形式解得：

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}2D^2+3D-9 & D^2+7D-14\\D+1 & D+2\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}4 & D^2+7D-14\\-8e^{2t} & D+2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2D^2+3D-9 & D^2+7D-14\\D+1 & D+2\end{vmatrix}y=\begin{vmatrix}2D^2+3D-9 & 4\\D+1 & -8e^{2t}\end{vmatrix}\end{cases}$$

计算结果为 $\begin{cases}(D^3-D^2+4D-4)x=8+32e^{2t}\\(D^3-D^2+4D-4)y=-4-40e^{2t},\end{cases}$

对于这二个方程，用算子法易得特解为

$$\begin{cases}x_p(t)=-2+4e^{2t}\\y_p(t)=1-5e^{2t}.\end{cases}$$

而各自对应的齐次方程的特征值为 $r_1=1$，$r_2=2i$，$r_3=-2i$. 于是通解为

$$\begin{cases}x(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3e^t-2+4e^{2t}\\y(t)=K_1\cos 2t+K_2\sin 2t+K_3e^t+1-5e^{2t}.\end{cases}$$

其中 C_1,C_2,C_3，是任意常数，下面确定 K_1,K_2,K_3 与 C_1,C_2,C_3 的关系. 将这两个形式解代入方程组的第二个方程得

$$(C_1+2C_2+2K_1+2K_2)\cos 2t+(-2C_1+C_2-2K_1+2K_2)\sin 2t$$
$$+(2C_3+3K_3)e^t-8e^{2t}=-8e^{2t}.$$

比较系数有 $\begin{cases}C_1+2C_2+2K_1+2K_2=0\\-2C_1+C_2-2K_1+2K_2=0\\2C_3+3K_3=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}K_1=\dfrac{-3C_1-C_2}{4}\\K_2=\dfrac{C_1-3C_2}{4}\\K_3=-\dfrac{2}{3}C_3.\end{cases}$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3e^t-2+4e^{2t}\\y=-\dfrac{1}{4}(3C_1+C_2)\cos 2t+\dfrac{1}{4}(C_1-3C_2)\sin 2t-\dfrac{2}{3}C_3e^t+1-5e^{2t}.\end{cases}$$

1509. 试求方程组 $\begin{cases} Dx+(D-1)y+(D+2)z=2e^t \\ (D-1)x+Dy+(D-2)z=ae^t \\ (D+1)x+(D-2)y+(D+6)z=e^t \end{cases}$ 的解.

［解］ 由于按算子方法易算出关于 z 的微分方程为

$$\begin{vmatrix} D & D-1 & D+2 \\ D-1 & D & D-2 \\ D+1 & D-2 & D+6 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} D & D-1 & 2e^t \\ D-1 & D & ae^t \\ D+1 & D-2 & e^t \end{vmatrix}.$$

但展开此式时得 $0z=(a-3)e^t$，因此当 $a\neq 3$ 时，此方程组无解. 当 $a=3$ 时，则方程可解. 可以知道此时第一个方程的 2 倍减去第三个方程即是第二个方程. 因此原方程组等价于

$$\begin{cases} Dx+(D-1)y=2e^t-(D+2)z, \\ (D-1)x+Dy=3e^t-(D-2)z. \end{cases}$$

对于每一个可微的函数 z，上述方程可解，化为

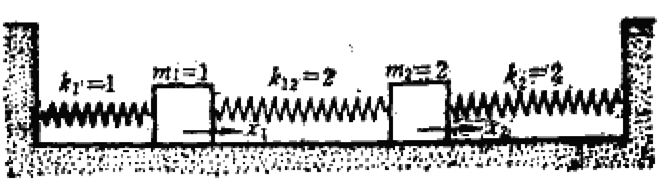
$$\begin{cases} \begin{vmatrix} D & D-1 \\ D-1 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 3e^t-(D+2)z & D-1 \\ 3e^t-(D-2)z & D \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} D & D-1 \\ D-1 & D \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D & 3e^t-(D+2)z \\ D-1 & 3e^t-(D-2)z \end{vmatrix}. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (2D-1)x=3e^t-(5D-2)z, \\ (2D-1)y=3e^t+(3D-2)z. \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x=C_1e^{\frac{1}{2}t}+3e^t-\dfrac{5D-2}{2D-1}z, \\ y=C_2e^{\frac{1}{2}t}+3e^t+\dfrac{3D-2}{2D-1}z. \end{cases}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数，而 z 是任意的可微函数. 这便是原方程的解.

1510. 试求两质点的弹簧系统的本征振动，假设 $k_1=1$, $k_{12}=2$, $k_2=2$, $m_1=1$, $m_2=2$，如图所示.



［解］ 取系统平衡状态时的质量块位置分别为 m_1 及 m_2 的坐标原点，质点偏移平衡位置的位移为 x_1 及 x_2. 于是在质点 m_1 上受力为

$$F_1=-k_1x_1,\ F_2=k_{12}(x_2-x_1)$$

在质点 m_2 上受力为 $F_3=-k_{12}(x_2-x_1)$ 及 $F_4=-k_2x_2$. 系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=F_1+F_2 \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=F_3+F_4, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} (D^2+3)x_1-2x_2=0 \\ -2x_1+(2D^2+4)x_2=0. \end{cases}$$

方程组的系数行列式为 $(D^2+3)(2D^2+4)-4=2D^4+10D^2+8$，特征根为 $r_1=i,\ r_2=-i,\ r_3=2i,\ r_4=-2i$. 因此设解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\cos\omega t \quad 或 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}\sin\omega t,$$

其中 ω 取 1 或 2. 将形式解代入方程组得到

$$\begin{cases} (-\omega^2+3)A\cos\omega t-2B\cos\omega t=0 \\ -2A\cos\omega t+(-2\omega^2+4)B\cos\omega t=0. \end{cases}$$

以 $\omega=1$ 代入，得 $2A-2B=0$，于是可取 $A=B=1$. 以 $\omega=2$ 代入，得 $-A-2B=0$，于是可取 $A=2,\ B=-1$. 同样对 $\sin\omega x$ 形式的解，$\omega=1$ 时得 $C=1,\ E=1$；$\omega=2$ 时得 $C=2,\ E=-1$. 因此得到系统的本征振动为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t+C_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t+C_4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\sin 2t.$$

1511. 有两个双连通的铁箱 T_1 和 T_2，它们的容积分别为 V_1 和 V_2，两个铁箱由两条管子连接，液体通过管道的速度为 r，每个铁箱内都有一个搅拌器，使液体立即混和. 若开始时，在铁箱 T_2 内是浓的盐溶液，含 A_2 盐分，在 T_1 内是稀的盐溶液，含 A_1 盐分. 试求两个铁箱内盐的含量的变化规律？设 $A_1=0,A_2=75,\ V_1=50,\ V_2=100,\ r=5$.

［解］ 用 $Q_1(t)$ 和 $Q_2(t)$ 分别表示在 T_1 和 T_2 内盐分的量. 于是在 T_1 内，盐分的变化率 $Q_1'(t)$ 等于进入盐分率减去流出的盐分率，即

$$Q_1'=r\cdot\frac{Q_2(t)}{V_2}-r\frac{Q_1(t)}{V_1},\ Q_1(0)=A_1.$$

类似地有

$$Q_2'=r\frac{Q_1(t)}{V_1}-r\frac{Q_2(t)}{V_2},\ Q_2(0)=A_2.$$

因此问题化为一个常系数齐次线性方程组的初值问题：

$$\begin{cases}Q_1'=-rV_1^{-1}Q_1+rV_2^{-1}Q_2\\ Q_2'=rV_1^{-1}Q_1-rV_2^{-1}Q_2,\end{cases}\quad\begin{cases}Q_1(0)=A_1\\ Q_2(0)=A_2.\end{cases}$$

代入数值得

$$\begin{cases}Q_1'=-\dfrac{1}{10}Q_1+\dfrac{1}{20}Q_2\\ Q_2'=\dfrac{1}{10}Q_1-\dfrac{1}{20}Q_2,\end{cases}\quad\begin{cases}Q_1(0)=0\\ Q_2(0)=75.\end{cases}$$

特征方程

$$\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{10}-\lambda & \dfrac{1}{20}\\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{20}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda+\frac{3}{20}\right),$$

特征根

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\frac{3}{20}.$$

于是 $Q_1=C_1+C_2e^{-\frac{3}{20}t}$，$Q_2=D_1+D_2e^{-\frac{3}{20}t}$. 因为 $Q_2=20Q_1'+2Q_1$，于是知 $D_1=2C_1$，$D_2=-C_2$，于是方程组的通解为

$$Q_1(t)=C_1+C_2e^{-\frac{3}{20}t},\quad Q_2(t)=2C_1-C_2e^{-\frac{3}{20}t}$$

代入初始条件解得 $C_1=25$, $C_2=-25$. 因此最后解为

$$\begin{cases}Q_1(t)=25-25e^{-\frac{3}{20}t}\\ Q_2(t)=50+25e^{-\frac{3}{20}t}.\end{cases}$$

§5. 常微分方程的数值解

1512. 试用改进的欧拉方法求初值问题 $y'=1+y^2$, $y(0)=0$ 的近似解. 取 $n=4, h=0.1$.

[解] 按改进的欧拉方法得

$$y_i=y_{i-1}+\frac{0.1}{2}[k_1+k_2].$$

其中

$$k_1=f(t_{i-1},\ y_{i-1})=1+y_{i-1}^2;$$

$$k_2=f(t_{i-1}+h,\ y_{i-1}+hf(t_{i-1},\ y_{i-1}))=1+(y_{i-1}+0.1k_1)^2.$$

于是 $i=1$ 时，　$k_1=1,\ k_2=1+0.1^2=1.01,$

$$y_1=0.05(1+1.01)=0.1005;$$

$i=2$ 时，　$k_1=1+(0.1005)^2=1.010,$

$$k_2=1+(0.1005+0.101)^2=1.041,$$

$$y_2=0.1005+0.05(1.010+1.041)=0.2031;$$

$i=3$ 时，　$k_1=1+(0.2031)^2=1.041,$

$$k_2=1+(0.2031+0.1041)^2=1.094,$$

$$y_3=0.2031+0.05(1.041+1.094)=0.3099;$$

$i=4$ 时，　$k_1=1+(0.3099)^2=1.096,$

$$k_2=1+(0.3099+0.1096)^2=1.176,$$

$$y_4=0.3099+0.05(1.096+1.176)=0.4235$$

1513．试用欧拉方法求 $y'=t^2-y^2$，$y(0)=\frac{1}{2}(0\leqslant t\leqslant 0.7)$的近似解．取 $n=7$，$h=0.1$．

［解］ 由已知 $h=0.1$，$n=7$，$f(t,\ y)=t^2-y^2$．于是

$$y_i=y_{i-1}+0.1[0.01(i-1)^2-y_{i-1}^2]\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7).$$

经过计算得

$$y_1=0.5+0.1[0-(0.5)^2]=0.4750,$$

$$y_2=0.4750+0.1[0.01-(0.4750)^2]=0.4534,$$

$$y_3=0.4534+0.1[0.04-(0.4534)^2]=0.4369,$$

$$y_4=0.4369+0.1[0.09-(0.4369)^2]=0.4268,$$

$$y_5=0.4268+0.1[0.16-(0.4268)^2]=0.4246,$$

$$y_6=0.4246+0.1[0.25-(0.4246)^2]=0.4315,$$

$$y_7=0.4315+0.1[0.36-(0.4315)^2]=0.4489.$$

1514．试用欧拉方法解 $y'=-y+2e^t$ 的初值问题，$y(0)=0$．$0\leqslant t\leqslant 1$．

［解］ 取支点为 0，0.2，0.4，0.6，0.8，1.0 即步长 $h=0.2$，支点个数 $n=5$，按方程及欧拉方法的公式有

$$y_i=y_{i-1}+0.2(-y_{i-1}+2e^{0.2(i-1)})\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5),$$

于是逐次计算得:

$$y_0=0,$$

$$y_1=0+0.2(-0+2e^0)=0.4000,$$

$$y_2=0.4000+0.2(-0.4+2e^{0.2})=0.8086,$$

$$y_3=0.8086+0.2(-0.8086+2e^{0.4})=1.2436,$$

$$y_4=1.2436+0.2(-1.2436+2e^{0.6})=1.7237,$$

$$y_5=1.7237+0.2(-1.7237+2e^{0.8})=2.2692.$$

[说明] 此方程的精确解是 $y(t)=e^t-e^{-t}$，比较一下近似解和精确解的差别(见下表):

t	y_i(近似解)	$y(t)$(精确解)
0	0	0
0.2	0.4000	0.4027
0.4	0.8086	0.8215
0.6	1.2436	1.2733
0.8	1.7237	1.7762
1.0	2.2692	2.3504

1515. 用龙格-库塔法计算 $y'=1+y^2$, $y(0)=0$ 的初值问题近似解. 取 $h=0.2$, $n=2$.

[解] 由解的公式有

$$y_i=y_{i-1}+\frac{0.2}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4] \quad (i=1,\ 2).$$

其中
$$k_1=1+y_{i-1}^2,\ k_2=1+(y_{i-1}+0.1k_1)^2,$$

$$k_3=1+(y_{i-1}+0.1k_2)^2,\ k_4=1+(y_{i-1}+0.2k_3)^2.$$

于是计算得

$i=1$, $k_1=1$, $k_2=1+0.1^2=1.01$, $k_3=1+0.101^2=1.010$,

$$k_4=1+(0.2\times1.012)^2=1.041,$$

$$y_1=\frac{1}{30}(1+2\times1.01+2\times1.010+1.041)=0.2027;$$

$i=2$, $k_1=1+(0.2027)^2=1.041$,

$$k_2=1+(0.2027+0.1041)^2=1.094,$$

$$k_3=1+(0.2027+0.1094)^2=1.097,$$
$$k_4=1+(0.2027+0.2\times1.097)^2=1.178,$$
$$y_2=0.2027+\frac{1}{30}[1.041+2\times1.094+2\times1.097+1.178]$$
$$=0.4227.$$

［说明］ 此方程的精确解为 $y(t)=\operatorname{tg}t$. 在 $t=0.2$, 及 $t=0.4$时, $y(t)$的精确值是 $\operatorname{tg}0.2=0.2027$, $\operatorname{tg}0.4=0.4228$, 由此可见精度是比较高的. 而且若和前面的欧拉法比较，尽管龙格-库塔法的步长较大，但精度却仍较高.

§6. 拉普拉斯变换法

1516. 试求初值问题 $y''+y'-2y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的解.

［解］ 两边求拉普拉斯变换. 记 $\mathscr{L}[y]=\bar{y}$, 则

$$(s^2+s-2)\bar{y}=\mathscr{L}[\sin x]=\frac{1}{1+s^2}$$

于是
$$\bar{y}(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s^2+1)},\quad s>1,$$

求逆变换

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s^2+1)}\right]$$
$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{15}\frac{1}{s+2}-\frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{10}\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$=\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{15}e^{-2x}-\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x\quad(x>0).$$

1517. 用拉普拉斯变换求解下述初值问题:

$$y''+y=x+3\sin 2x+2\cos x,\ y(0)=y'(0)=0.$$

［解］ 令 $\mathscr{L}[y]=\bar{y}$, 对方程进行拉普拉斯变换, 得

$$p^2\mathscr{L}[y]+\mathscr{L}[y]=\frac{1}{p^2}+\frac{6}{p^2+4}+\frac{2p}{p^2+1}.$$

整理后得
$$\bar{y}(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{p^2+4}+\frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

取其逆变换有

$$y(t)=x+\sin x-\sin 2x+x\sin x.$$

1518. 用拉普拉斯变换求解初值问题:

$$y''+y=2xe^x+4\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

[解] 对方程取拉普拉斯变换,令 $\mathscr{L}[y]=\bar{y}$, 得

$$p^2\bar{y}+\bar{y}=\frac{2}{(p-1)^2}+\frac{4}{p^2+1}=\frac{6p^2-8p+6}{(p-1)^2(p^2+1)},$$

于是
$$\bar{y}=\frac{6p^2-8p+6}{(p-1)^2(p^2+1)^2}.$$

设
$$\frac{6p^2-8p+6}{(p-1)^2(p^2+1)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}+\frac{Ep+F}{(p^2+1)^2}.$$

用待定系数法求得 $A=-1,\ B=1,\ C=1,\ D=0,\ E=0,\ F=4.$

因此
$$\bar{y}=-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{p}{p^2+1}+\frac{4}{(p^2+1)^2},$$

从而
$$y(t)=-e^x+xe^x+\cos x+2\sin x-2x\cos x.$$

1519. 试求初值问题:

$$y''-3y'-4y=f(x)\equiv\begin{cases}e^x, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & 2\leqslant x,\end{cases}\quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

[解] 记 $H(x)$ 为台阶函数,即

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 可以表示为 $f(x)=e^x-H(x-2)e^x$ 于是

$$\mathscr{L}[f(x)]=\frac{1}{s-1}-e^2e^{-2s}\cdot\frac{1}{s-1}.$$

对上述方程两边进行拉普拉斯变换. 记 $\mathscr{L}[y]=\bar{y}$ 有

$$\bar{y}(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-4)}-\frac{e^2e^{-2s}}{(s-1)(s+1)(s-4)}$$

再计算逆变换得

$$y(x)=-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{10}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{4x}-e^2H(x-2)$$
$$\times\left[-\frac{1}{6}e^{x-2}+\frac{1}{10}e^{-x+2}+\frac{1}{15}e^{4x-8}\right]$$

或
$$y(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}e^{x}+\dfrac{1}{10}e^{-x}+\dfrac{1}{15}e^{4x}, & 0\leqslant x<2,\\ \dfrac{1-e^{4}}{10}e^{-x}+\dfrac{1-e^{-6}}{15}e^{4x}, & 2\leqslant x.\end{cases}$$

1520. 试求方程 $4y''+4y'+9y=4\delta(x)+7\delta(x-3)$，$y(0)=y'(0)=0$.

［解］ 对方程两边取拉普拉斯变换．利用初始条件及 $\delta(x)$ 函数的性质．便有

$$\mathscr{L}[y]=\frac{4-7e^{-3s}}{4\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^{2}+8}.$$

由于

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{4\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^{2}+8}\right]=\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^{2}+2}\right]$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\sqrt{2}x$$

于是原方程的解是

$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\sqrt{2}x, & 0\leqslant x<3,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\sqrt{2}x+\dfrac{7}{4\sqrt{2}}e^{-(x-3)/2}\sin[\sqrt{2}(x-3)], & t\geqslant 3.\end{cases}$$

附　　录

微积分简史

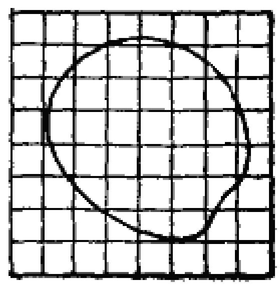
在数学的众多分支中，没有一个能像微积分那样，以其发展史的丰富内容提供充实而又深刻的启发性材料．微积分的历史提供了一个极好的例证：其一，说明近代数学概念是如何从原始的直观派生的一切感性材料中解脱出来，缓慢形成而又螺旋式上升的；其二，说明数学的产生和发展与社会背景的关系，即数学的产生与发展既不能超脱社会，也不机械地依附于社会，数学是人类社会的产物，也是它自身发展的必然结果；其三，说明人类的思想是如何在感性世界与理性世界，直观与逻辑之间建立联系，并最终达到理性化境界的．

微积分大体完成于十七世纪的欧洲，其基因来自于对数学的两个传统问题的研究．一个是求运动速度、曲线的切线、函数极值，它导致导数及其理论——微分学的产生；另一个是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心，它引出积分及其理论——积分学的产生．

长度用以反映线段的长短，面积用以反映平面部分的大小，这是人们在长期的实践中产生的需要，进而形成的一种方法．在古代人的经验中，有限的平面部分总是有面积的，因此问题不是要定义它们(面积)，而是要计算它们．从现存的最古老的文献资料中可知，大约在四五千年以前，人们已经会计算一些特殊图形，如三角形、四边形等的面积了①．当然，这都是一些

对特殊图形的特殊计算公式，既没有一般性意义，又缺乏逻辑结构或证明.

历史上第一个给面积计算以一般方法的，是古希腊的毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约公元前 580～前 500) 学派. 毕氏学派的“万物皆数”的哲学信条，促使他们用数来构思整个宇宙，包括给出所有平面图形的数的表示. 为此，他们创造了一种“面积贴合法”，即用一个已知面积的图形贴合到需求面积的另一个图形上，通过比较得出另一个图形的面积. 这种比较的结果，导致了应用面积单位进行面积度量的方法(如图). 尽管这种方法难以获得图形面积的真值(精确值)，但它具有普遍意义，适用于一切图形. 从根本上说，为求面积真值而发展起来的积分法，就是从改革毕氏学派的面积贴合理论开始的.



容易明白，为了尽可能地获得面积的真值，毕氏学派必须不断地缩小面积单位. 然而，这里存在着一个不可逾越的障碍——不可公度的量. 除非把面积单位设想成点或者线，否则一大类图形的面积的真值就休想用这种面积贴合法来得出.

公元前五世纪，希腊哲学家德谟克利特(Democritus, 约公元前 460～前 370)提出的“原子论”为毕氏学派解决不可公度量的计算问题提供了启发. 一些人把哲学上的原子论引进数学，建立起数学原子论，也就是后来发展起来的无穷小理论的前身. 数学原子论的基本观点认为线是由不可再分的无穷小的点所组成，面是由宽度为无穷小的线组成，体是由厚度为无穷小的

① 据古埃及的林特 (Rhind) 草卷和莫斯科草卷记载，当时的埃及人已经懂得如何去计算正方形和矩形、三角形和梯形、以及能分割成这些形状的图形的土地面积.

面所组成．这样，点、线、面也就分别成了线、面、体的共同度量单位，不可公度量的计算问题也就算可以解决了．利用数学原子论，希腊数学家求得了不少图形的面积和体积，德谟克利特本人就用它证明了锥体的体积是等高等底柱体体积的三分之一．

无穷小观点的建立是数学史上的一件大事，虽然数学上的可接受性的准绳是逻辑的相容性，而不是概念的合理性以及直观的清晰性，因此在为微积分奠定严密基础的时候，无穷小观点最终必须抛弃，但是在微积分产生和发展的过程中无穷小观点所提供的启示却是不容忽视的．它在人们的思想上产生了根深蒂固的影响，每当逻辑显得无济于事的时候，直观就常会求助于它．

但是，在逻辑上无穷小观点毕竟是有矛盾的．人们不禁设问，一个几何上的无穷小量，比如点，它究竟有没有长度可言？如果它有长度，那么由于任意一条线段都是由无穷多个点组成，因此任一有限长线段就应该有无限的长度；如果它没有长度，这样且不等于说任意线段都没有长度了．最早揭示这一矛盾的是古希腊埃利亚学派的芝诺 (Zeno，约公元前 490～前 436)．芝诺以其提出的四条悖论证明了我们的感官所感知的时间、空间、运动、连续等，与具有相同名称的数学概念并不具有相同的外延．用点的无限连接来描述线段，不能真正反映线段的连续统本质．虽然芝诺当时没有能像今天的人们一样把问题的要害挑得如此明白．但他确实清楚地指出了感性世界与理性世界、直观与逻辑之间的区别．数学可以借助于直观但不能依靠直观．

芝诺悖论的影响是巨大的．就微积分而言，它将了原子论一军，迫使希腊数学家重新作出选择，创造一种对解决实际问题有效，理论上又说得通的方法．于是，一种被后世学者称为“穷

竭法"的逻辑上更趋严密的方法被创造出来了. "穷竭法"在许多方面表现出现代极限思想的形态，它可以看作是极限概念的雏形.

"穷竭法"创自欧多克斯(Eudoxus，约公元前408～前355)，他是古希腊数学家中仅次于阿基米得(Archimedes，公元前287～前212)的伟大学者．他创立的"比例论"和"穷竭法"对数学的发展产生过深远的影响．著名的欧几里德(Euclid，约公元前330～前275)«几何原本»第五和第十二卷集中反映了欧多克斯的这两方面的成就.

古代微积分方法在阿基米得的时候达到了顶峰．"穷竭法"抛弃了数学原子论，从而加强了论证的严密性和结果的可靠性，但是它却失去了数学原子论所提供的直观启示，限制了获得众多结果的可能性．阿基米得的伟大功绩就在于他复苏了无穷小观点，使它在探索新结果上发挥积极的作用，并将它与严格的穷竭法论证相结合，使结果的正确性和逻辑的严格性完美地统一起来.

十六世纪中叶，出现了两个对微积分的诞生具有重要影响的事件．一是符号代数与解析几何的先后问世；二是阿基米得等古希腊数学家的原始微积分方法被发掘．它们在很大程度上为十七世纪创立微积分之前所进行的探索奠定了基础．然而更值得注意的是，使这两个事件能有效地促进微积分诞生的主要原因，却在于科学的数学化思想在欧洲的形成和确立.

科学数学化的结果使得数学问题大量涌现，从而给数学家的创造性工作开拓了许多重要的方向．与微积分关系最密切的一个数学收获来自对运动的研究．上至天体下至各种机械，对运动的研究不仅直接导致函数概念的产生，而且重新引出求曲线的切线、运动物体的瞬时速度、极大极小问题以及图形的面

积体积计算和重心的确定等一系列课题. 从十六世纪中叶开始的一百多年间，欧洲许多大数学家都致力于获得解决这些问题的特殊算法，而微积分也就在寻找解决这一系列实际问题的普遍算法中产生.

一般说来,微积分产生的历史大致可分为三个时期,即潜伏期、预备期和完成期.

潜伏期出现在十六世纪前后，当时函数的概念在数学对运动的研究中开始形成. 虽然许多函数的合理的符号表示式尚未建立,绝对多数函数那时都被当作曲线来加以研究,但它却使十六世纪的数学家对曲线的认识在观念上超出了古希腊的学者们,并使得所有的这些研究都朝着促进微积分产生的方向发展.

开普勒 (J. Kepler, 1571～1630) 和伽利略 (G. Galilei, 1564～1642) 可以说是微积分在这个时期中的代表人物. 开普勒的工作主要在开创积分法方面，其工作的直接动因来自对酒桶容积的测量. 我们知道,古希腊数学家虽然从直观上认识到圆内接正多边形边数不断扩大后的趋势是与圆合体，但是他们无法从逻辑上确证这一建立在无限过程之下的结果的必然性. 因此,他们最终还是放弃了曲直转化的观点,代之以严密的穷竭法论证. 然而十六七世纪的数学家不同于此，他们追求结果的热忱，大大超过对逻辑法则的忠诚. 开普勒大胆地采用了一种虽不严格但很有启发性的曲直转化方法. 一个典型的例子是圆面积的计算.

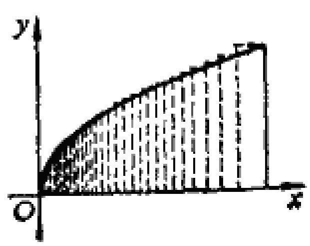
1615 年，开普勒发表《关于酒桶的新立体几何》，书中介绍了成百个将所求图形分割后通过曲直转化来求出各种曲边形面积和曲面体体积的例子. 所有计算都采用了将无限个同维的无限小元素之和来确定曲边形面积和曲面体体积的做法. 这可以说是开普勒求积术的核心,也是他的后继者们所吸收的精华. 由

于这一原因,开普勒的那本书被誉为历来求积方法的灵感源泉.

与开普勒不同,伽利略较少直接去解决有关微积分的问题,他的影响在于奠定了实验与理论调谐的近代科学精神,而这种精神十分有利于微积分思想的和谐发展.伽利略还具体地阐述了运动的数学理论,特别是距离、速度和加速度之间的关系.另外还研究了抛物体的运动轨道以及在已知抛射角和初速的情况下,抛射体的射程与高度之间的关系,这些无疑都是微积分中最敏感的问题.

1635年,伽利略的学生卡瓦列里(B. Cavalieri, 1598~1647)的《不可分连续量的几何》发表,标志了微积分的产生进入了预备期.

卡瓦列里确定了一种简单形式的积分法——不可分量方法,其思想脉络在于开普勒的无限小元.所不同的是卡瓦列里为了克服开普勒用各种不同的直线形来与不同的曲边形建立曲直转化的缺点,采用了"面是由条数不定的等距离的平行线所构成,体是由等距离的平行平面所构成"这样一种带普遍性的思想方法.与开普勒的方法相比较,卡瓦列里方法的优点在于解决问题的一般性,从而具有广泛的适应性和启发性.然而,不难发现,卡瓦列里的方法是德谟克利特的原子论的翻版,经不起推敲.到十七世纪中叶,出现了对不可分量方法的各种修正,为微积分的最后完成创造了条件.大约在1636年费尔马(P. de Fermat, 1601~1665)提出了一个极有启发性的积分方法.例如,为求在$y=x^{\frac{p}{q}}$之中从0到a之间一段面积,费尔马采用了在横轴上取坐标为a、αa、$\alpha^2 a\cdots$的点($\alpha<1$),然后在这些点上作垂线,使整个图形被分割成无数条窄长的矩形带(如图),这些矩形带的



底边长为横坐标之差，分别是：

$$(1-\alpha)a,\ \alpha(1-\alpha)a,\ \alpha^2(1-\alpha)a,\ \cdots$$

它们的高分别为抛物线 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 在相应点上的纵坐标

$$a^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{p}{q}}a^{\frac{p}{q}},\ \alpha^{\frac{2p}{q}}a^{\frac{p}{q}},\ \cdots$$

于是所有带形的面积构成一个几何级数

$$(1-\alpha)a^{\frac{p+q}{q}}+(1-\alpha)^{\frac{p+q}{q}}a^{\frac{p+q}{q}}+(1-\alpha)^{\frac{2(p+q)}{q}}a^{\frac{p+q}{q}}+\cdots$$

其和为 $\left(\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}\right)\cdot a^{\frac{p+q}{q}}$.

为使这些矩形的和充分接近抛物线所围成的图形的面积，就得将带形的宽度无限地缩小，费尔马采取了令 $\alpha\to 1$，经过适当推算，最后得出(用微积分符号表示)如下结果

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}}dx=\frac{1}{1+\dfrac{p}{q}}a^{\frac{p}{q}+1}$$

就这样，费尔马不仅成功地克服了卡瓦列里不可分法的致命弱点，而且几乎采用了现代定积分定义中的全部内容，所差的是尚未抽象出积分这个概念．然而，这却是要害之处．

这种情况也反映在费尔马关于微分问题的研究上．1637年，费尔马发表«求最大值和最小值的方法»，以与现在求导数方法相仿的过程求得了曲线的切线和极值．他甚至指出了函数在某点处取得极值的必要条件以及求隐函数导数的方法．但是，他始终未提炼出微分法的一般技巧，亦未引出导数或微分的概念．这表明，费尔马的技巧虽然高明，但它只是用作解决具体问题的手段，而不是发明一种不依赖于任何几何的或物理的考虑的有结构的运算，并予以专门的名称．因此，费尔马不是微积分的发明者，而只是为微积分的产生作预备工作的杰出代表．

费尔马在微积分上的一些要害问题，在牛顿(I. Newton, 1642～1727)、莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646～1716)之前一直

没有得到很好地解决. 不过, 在一些具体问题上还是有较大进展的, 其中有英国数学家沃利斯 (J. Wallis, 1616～1703) 的将费尔马等人建立在几何上的微积分方法改变成算术形式的初步尝试; 有法国数学家罗伯瓦尔 (G. P. de Roberval, 1602～1675)、奈尔(W. Neile, 1637～1670)、雷恩 (C. Wren, 1632～1723) 等人在求曲线长度方面的积分工作; 巴罗 (I. Barrow, 1630～1677)利用微分三角形(相当于函数增量与自变量增量之比)来求切线的方法, 以及他关于求切线问题与求积问题之间可逆关系的认识. 所有这些无不体现着微积分完成之前的预备性工作, 它给牛顿和莱布尼茨提供了完成微积分所必需的素材和启示.

如果把微积分看作是, 由无限小分析中所涉及到的观点、方法和发现所组成的一门以独特算法为特征的新学科的话, 那么无论是微积分的观点、方法和发现, 还是微积分的算法特征, 在牛顿和莱布尼茨大体完成这个学科之前经过一个世纪许多人的努力, 已经基本就全了. 尽管费尔马没有认识到切线问题和求积问题是微积分的两个可逆的侧面, 但是他对每一个侧面分别给出了具有启发性的计算方法; 也尽管巴罗只是以几何形式表达了微积分的可逆性, 但沃利斯却用纯分析的方法展现了处理微积分问题的基本手段. 至于说具体的发现, 那就更多了. 在巴罗的书中已经可以看到求切线的方法(微分法), 两个函数的积和商的微分法则, 隐函数的微分法则, 求曲线长度的方法, 定积分中的变量代换, 甚至还有解微分方程的变量分离法等等.

但是, 导数概念的意义决不限于求曲线的切线斜率和函数的极小极大值, 积分概念的意义也决非限于求图形的面积和体积. 不把这些概念从对特殊问题的应用中抽象出来, 进而阐述它们的基本原理, 建立它们的理论体系, 那么也就谈不上微积分

的大体完成.微积分学说的先驱者们至少在以下三个方面是有待后人去解决的,这三方面是:(1)澄清概念,特别是建立导数与积分的概念;(2)提炼方法,把散见的解决各种具体问题的方法加以提炼,创立一种具有普遍意义的真正的微积分方法;(3)改变形式,即把以往的几何形式改变成解析的形式,使它具有更大的应用能力和彻底严密化的可能.

大体完成这三项工作,使微积分从特殊走向一般的是牛顿和莱布尼茨.

牛顿对微积分问题的深入考虑大约是在1665年,即巴罗发表《几何讲义》不久.当时牛顿是巴罗的学生,巴罗不仅向牛顿传授了他的微积分成果,而且信任地将《几何讲义》的出版工作交由牛顿完成.

牛顿对微积分的研究大致可分三个阶段.第一阶段是静态的无穷小量方法,即象费尔马那样把变量看作是无穷小元素的静止的集合,由此展开他的微积分方法.第二阶段是变量流动生成法,即认为变量是时间以及点、线面等几何量连续运动的表现,这时他把变量叫做流,变量的变化率叫做流数.第三阶段是牛顿所谓的最初比和最后比方法,这种方法是牛顿对第一阶段无穷小量方法的彻底否定.

1669年,牛顿完成了他的第一篇微积分论文,题为《运用无穷多项方程的分析学》.先在朋友中散发,1711年正式发表.这篇论文是牛顿第一阶段工作的具体表现.与他的前人相比较,无论是观点和方法牛顿都有了较大的改进.他不仅给出了求一个变量对于另一个变量的瞬时变化率的普遍方法,而且通过证明面积可以由求变化率的逆过程得到,揭示了微积分的基本性质.

牛顿第二阶段的微积分工作主要体现在他完成于1671年

的《流数法和无穷级数》一书，此书1736年出版．在该书中，牛顿引进了他独特的概念和记法．他把可考虑为随时间变化的量，即以时间为独立变数的函数为流量，以字母 v、x、y、z 来表示，而把流量的变化速度，即变化率称为流数，或简称速度，用在表示流量的字母上加点表示，如 $\dot{v}$、$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 等．如果把 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 等看作流量的话，那么其流数分别为 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{y}$，显然这体现着二阶导数的概念．

与前一阶段不同之处，不仅在于记法和名称，更重要的是此时牛顿改变了把变量看作无穷小单元的集合，而是看作由点、线、面等连续运动所生成的东西．这个改变的作用在于从直观上剔除了不可分量学说的生硬之处．由于概念的一般化和符号化，因此在《流数法和无穷级数》中出现的微积分基本问题的表达就更为一般和清楚了．

1676年《曲线求积术》的完成，标志着牛顿的微积分工作进入了第三个阶段．这时牛顿不仅已经引入了后来作为微积分学的基本概念——导数，而且明确地表现出把导数作为增量之比的极限的思想．一般认为，如果牛顿能以更多的时间，用最后比来澄清他的思想的话，那么在柯西(A. L. Cauchy, 1789～1857)之前一个世纪，微积分可能已经建立在极限概念上了．

在比牛顿稍晚的时间里，德国数学家莱布尼茨以另一种形式大体完成了微积分的建设工作．三十岁那年，他在巴黎结识了惠更斯(C. Huygens, 1629～1695)等一批数学家．在惠更斯的影响下开始进行微积分研究．莱布尼茨一开始就抓住了“微积分基本定理”，不仅把它作为微积分计算的出发点，而且由此开展他的其他研究．归纳起来，除了发现和应用微积分基本定理之外，莱布尼茨在微积分方面的成果还有：(1)复合函数的微分法则；(2)弧微分法则；(3)对数函数和指数函数的微分法则；

(4) 在积分号下对参变量求微分的方法; (5) 曲线绕轴旋转所成的旋转体体积公式; (6) 求切线、最大最小值以及拐点的方法; 另外, 他还讨论了曲率、密切圆和包络问题.

由于莱布尼茨的微积分工作的着眼点是通过反微分形求和, 因此, 微分成了他全部工作的基点. 他不仅给出函数的微分法则和特殊函数的微分, 而且第一次尝试给出微分的定义. 不过, 他有时把微分看作有限的确定的差, 有时又把它看作是无限小量. 这种对微分是确定量还是不确定量的踌躇认识, 说明莱布尼茨对微分概念的模糊和混乱.

在大体完成微积分这一点上, 莱布尼茨与牛顿的功绩相当. 他们都把微积分作为一种能应用于一般函数的普遍方法; 都把微积分从前期学者的纯几何形式中初步解脱出来, 使用了代数的方法和记号, 使之有广泛的应用能力; 都把求面积、体积以及其他以往作为求和加以处理的问题归并到反微分, 这不仅体现了微分与反微分之间的互逆关系, 而且为求积分运算开辟了一条简便的途径. 所不同的是, 牛顿更多的是关心创立微积分体系和基本方法, 而莱布尼茨则更关心运算公式的建立和推广, 力求建立微积分的规范, 即法则和公式的系统.

莱布尼茨对符号的关心也超过了牛顿. 现在的微积分符号不少是莱布尼茨创造的. 如一阶微分符号 dx, 高阶微分符号 d^2x、$d^3x\cdots$, 积分符号 $\int y\,dx$, 导数(微商)符号 $\frac{dy}{dx}$ 等. 科学的微积分符号的创用对发展微积分成果是极为重要的, 如果微积分仍然停留在它的初创者所用的那些粗糙而不完整的记号上, 那它就不可能成为如今那样有力的工具.

在牛顿、莱布尼茨大体完成微积分后的一个多世纪里, 这门新兴学科获得了惊人的发展. 历史上形成的算术、代数和几何

三足鼎立的状况被彻底打破了，一门以微积分为代表的所谓数学分析在数学中鼎立，形成了一个庞大的分析学家族：微分方程，无穷级数，微分几何，变分法，复变函数等等，无一不是微积分直接发展的结果.

从十八世纪起，微积分在以下五个方面取得了明显的发展：(1)提高了对函数概念以及各种新的具体函数的认识，使微积分真正成为关于函数的理论；(2)引出了椭圆积分及其理论；(3)发展多元函数微积分；(4)开始对无穷级数的专门研究；(5)进行建立微积分严密体系的各种尝试.

函数作为数学术语被引进是在1673年，当时莱布尼茨指的是："像曲线上的点的横坐标、纵坐标，切线的长度，垂线的长度等，所有与曲线上的点的有关的量". 从今天的眼光看，莱布尼茨的这个定义仅是在几何的范围内揭示某些量所存在着的依存关系，并没有给出函数的解析意义. 1718年，约翰·贝努利(J. Bernoulli, 1667～1748)首先从解析的角度提出函数概念，他把"由变数x和常数所构成的式子叫做变数x的函数"，记作X或ξ，1718年他又改为用Φx表示x的函数. 记号$f(x)$是欧拉(L. Euler, 1707～1783)于1734年引进的. 虽然所有的这类表述都不令人满意，但是它毕竟开始对笼统的变量概念作出区分，引出了自变量与因变量，使微积分的一些基本概念能在变量的基础上作出明确区分.

欧拉的«无穷小分析引论»是第一部首先突出函数概念，并把它作为分析学基本研究对象的著作. 由于函数的本质是一种形式上的表示，因此一旦欧拉把它作为微积分研究的基本对象，他就有可能使微积分改造成为一种形式化的函数理论. 事实上，欧拉就是对全体初等函数连同它们的微分和积分进行了形式上的系统分类和研究的第一个数学家. 欧拉的形式论观点与莱布

尼茨的符号化工作相结合，成为十八世纪微积分似乎自动发展的原因.

欧拉自己就是数学符号的最佳发明者，他创设了三角函数、对数函数等许多初等函数的符号，从而使得各函数的导函数和原函数能够列表反映出来. 这种表与求导法则和求积法则相结合大大提高微积分运算的能力.

十八世纪初，出现了求不定积分的变量换元法的各种例子，它有力地扩充了能够加以积分的初等函数. 所谓能够加以积分是说能够求得仍属初等函数的原函数. 但也发现了相反的情况，于是椭圆积分这一术语被提出来了，并出现了对它的专门研究. 早期的主要研究者有法革那诺 (G. C. de'T. di Fagnano, 1682～1766)、欧拉、勒让德 (A. M. Legendre, 1752～1833)等.

十八世纪微积分的最丰富成果是创立多元函数的微积分，首先是偏导数理论. 它是由于物理学中要求人们考虑在多个自变量的函数中，只有一个自变量发生变化时的导数而引起的. 而对偏导数研究的主要动力则来自早期偏微分方程方面的工作，其中主要的贡献者有方丹 (A. Fontaine des Bertins, 1705～1771)、欧拉、克莱罗 (A. C. Clairaut, 1713～1765) 和达兰贝尔(J. L. R. D'Alembert, 1717～1783).

欧拉在对力学的研究中提出了关于偏导数运算问题，后来达兰贝尔进行了深入研究和推广. 多重积分最早出现在牛顿的《自然哲学的数学原理》中，对地球和球壳作用于质点上的万有引力问题的讨论. 当时牛顿采取的是几何论述. 十八世纪开始出现二重积分的分析形式，1738 年欧拉首先通过累次积分的办法解决了二重积分的计算问题，并于 1769 年给出了二重积分的概念和化二重积分为二次积分方法的明确表述. 1773 年，拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736～1813) 在天体力学的讨论中引

出三重积分的概念，在发现用直角坐标计算很困难之后，转向了利用球面坐标计算的办法，从而开创了多重积分变换的研究.

对无穷级数的研究是十八世纪微积分的又一重要内容. 早在牛顿创立微积分的时候，无穷级数就作为他的一个重要的辅助手段. 进入十八世纪后，随着研究领域的逐渐扩大，无穷级数的作用也越来越大，因此不得不对它作出专门研究. 研究的内容主要包括三个方面：(1) 函数的级数展开方法；(2) 关于无穷级数收敛与发散的判别；(3) 关于三角级数. 所有的研究成果后来形成了无穷级数这一专门理论，也为微积分的严密性创造了条件.

在十七世纪对微积分可靠性的怀疑并没有消除. 进入十八世纪以后，尽管微积分在数学、力学、天文学等许多方面的应用取得了惊人的成就，然而对微积分基础松散的不满却愈益加深. 最有影响且深刻的抨击来自英国哲学家乔治·贝克莱 (G. Berkeley, 1685～1753). 1734 年贝克莱发表题为《分析学家》的一本小册子，对牛顿流数法中的矛盾以及推理中的不合理性一针见血地给予了揭露.

在十八世纪对微积分提供严密性的尝试中，欧拉、达兰贝尔和拉格朗日的工作具有突出地位. 欧拉把微积分发展成为一种形式化理论，从而使微积分真正摆脱靠几何直观来建立可靠性的状态，为基于实数系统的微积分的根本论证开辟了道路. 达兰贝尔则明确提出把微积分建立在极限基础上的主张，虽然他的具体实践是失败的，但他的主张却是正确而又有感召力的. 特别是由于拉格朗日试图抛弃极限把微积分纯粹代数化的尝试遭失败后，极限是微积分最可靠的基础便被十九世纪的数学家确认并加以贯彻了.

十九世纪的微积分严密化工作是从波尔察诺 (B. Bolzano,

1781～1848)、柯西、阿贝尔 (N. H. Abel, 1802～1829)和狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805～1859) 开始的，并由魏尔斯特拉斯 (K. Weierstrass, 1815～1897)进一步推进. 其中柯西和魏尔斯特拉斯的工作影响最大.

从1821年至1829年柯西发表了包括《代数分析教程》、《无穷小分析教程》、《微分计算教程》在内的许多关于微积分基础的重要著作. 他成功地建起了极限概念的算术化形式和一整套理论,并且有效地将无穷小量、连续、导数、积分等微积分学的重要概念建立在极限的基础上，同时摆正了这些概念之间的关系,奠定了微积分现代形式的基础. 可以毫不迟疑地下结论说，柯西是现代意义下的严格微积分学的奠基者.

尽管柯西的工作是精细的，但是由于极限本身包含着前一世纪即已产生的困难. 极限定义中的不明确性，因此连续、导数、积分等定义也难以真正严格化. 另外，柯西疏忽了对所有概念中最基本的一个——数——加以明确定义，而这对极限的定义从而对微积分其他概念的定义是绝对重要的.

将微积分彻底建立在不依赖于一切几何直观的纯粹严谨基础上的是德国数学家魏尔斯特拉斯. 他认识到，自古以来无论是变量、极限、连续还是导数、积分等概念都曾求助于来自几何的动态的直观启示,然而这是绝对靠不住的.

于是,从变量概念开始,魏尔斯特拉斯对微积分的所有主要概念作了算术化改貌. 例如，他将变量 x 简单地解释为一个字母，它表示一个数值集合中的任何一个、最精彩的则是极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义. 这个定义完全排除了“趋近”、“达到”之类模糊说法，留下的则是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 这点上极限是否存在，存在的话是什么的最确切的表述.

在魏尔斯特拉斯微积分算术化基础工作的影响下，十九世

纪七十年代德国数学家戴德金 (J. W. R. Dedekind, 1831～1916) 和康托尔 (G. Cantor, 1845～1918) 建起了无穷集合理论. 这个理论为数的定义奠定了严密化基础, 从而也使极限这一仅涉及数的定义的概念有了最可靠的基础性保证. 至此, 由毕达哥拉斯的面积贴合理论以及关于不可公度的发现为起点, 经过几十代人的努力探索, 严密的微积分的整个理论终于在魏尔斯特拉斯、戴德金和康托尔手中臻于完成. 虽然诸如非标准分析那样的新结构还会出现, 微积分的应用也会不断再扩大, 但严格意义下的微积分的历史应该就此结束了.

(袁小明撰稿)

汉英对照微积分名词

微积分　calculus
微分学　differential calculus
积分学　integral calculus
数列　sequence of number
有界数列　bounded sequence
无界数列　unbounded sequence
单调数列　monotonic sequence
子列　subsequence
数列极限　limit of sequence
上界　upper bound
下界　lower bound
上确界　supremum
下确界　infimum
收敛数列　convergent sequence
发散数列　divergent sequence
无穷小量　infinitesimal
无穷大量　infinite
区间　interval
开区间　open interval
闭区间　closed interval
区间套定理　theorem of nested intervals
有限覆盖定理　theorem of finite covering
柯西收敛准则　Cauchy criterion for convergence
实数系的连续性　continuity of the system of real numbers
实数系的完备性　completeness of the system of real numbers
上极限　superior limit
下极限　inferior limit
变量　variable
常量　constant
对应　correspondence
一一对应　one-to-one correspondence, monogamy
函数　function
定义域　domain of definition, field of definition
值域　range, co-domain
自变量　independent variable, argument
因变量　dependent variable
单值函数　single valued function
多值函数　multiple valued function
有界函数　bounded function
单调函数　monotone function
增函数　increasing function
减函数　decreasing function
奇函数　odd function
偶函数　even function
复合函数　composite function

反函数 inverse function
隐函数 implicite function
函数的极限 limit of function
左极限 left-hand limit
右极限 right-hand limit
连续函数 continuous function
左连续 continuity from left
右连续 continuity from right
间断点 discontinuous point
函数的振幅 amplitude of function
一致连续，均匀连续 uniformly continuous
介值定理 intermediate-value theorem
高阶无穷小量 infinitesimal of higher order
等价无穷小量 equivalent infinitesimal
无穷小量的主部 principal part of infinitesimal
导数，微商 derivative
导函数 derived function
高阶导数 derivative of higher order
微分 differential
微分形式不变性 invariance of differential forms
微分学中值定理 mean-value theorem of differentials
待定型 indeterminate
洛必达法则 L' Hospital rule
函数的极值 extreme value of function
极大（值） maximum, maximal value
极小（值） minimum, minimal value
平稳点，逗留点 stationary point
极值点 extreme point
凸函数 convex function
凹函数 concave function
拐点，扭转点 inflection point
原函数 primitive function
反导数 antiderivative
不定积分 indefinite integral
被积函数 integrand
积分变量 integral variable
积分常数 constant of integration
分部积分法 integration by parts
部分分式积分法 integration by partial fraction
黎曼积分 Riemann integral
定积分 difinite integral
积分限 bound of the integral
上积分 upper integral
下积分 lower integral
达布和 Darboux's sum
积分中值定理 mean-value theorem of integrals
微积分学基本定理 fundamental

·em of calculus

分法 integration by tution

的面积 area of curvi-r trapezoid

的体积 volume of body otation

曲面的面积 area of surface of revolution

曲线的弧长 arc length of a curve

弧长的微分 differential of arc

矩形公式 rectangular formula

梯形公式 trapezoidal formula

抛物线公式 parabolic formula

反常积分，广义积分 improper integral

级数 series

数项级数 series of constant terms

函数项级数 series of function terms

正项级数 positive term series

收敛级数 convergent series

发散级数 divergent series

级数的和 sum of series

级数的余式 residue of series

等差级数，算术级数 arithmetic series

等比级数，几何级数 geometric series

调和级数 harmonic series

循环级数 recurring series

绝对收敛 absolute convergent

条件收敛 conditional convergent

交错级数 alternate series

二重级数 double series

无穷乘积 infinite product

一致收敛，均匀收敛 uniformly convergent

逐项微分 term by term differentiation

逐项积分 term by term integration

幂级数 power series

收敛半径 convergence radius

收敛圆 convergence circle

超越几何级数 hypergeometric series

三角级数 trigonometrical series

共轭三角级数 conjugate trigonometrical series

傅立叶级数 Fourier series

多元函数 multivariable function

偏导数 partial derivative

高阶偏导数 partial derivative of higher order

全微分 total differentiation

链式法则 chain rule

齐次函数 homogeneous function

可微映射 differentiable mapping
方向导数 directional derivative
条件极值，限制极值 conditional extremum
拉格朗日乘数法 Lagrangian multiplier method
函数相关 functional dependence
含参变量积分 integral with parameter
重积分 multiple integral
逐次积分 iterated integral
变量代换 change of variable
曲线积分，线积分 line integral
曲面积分，面积分 surface integral
开球 open ball
邻域 neighbourhood
开集 open set
闭集 closed set
内点 internal point
外点 external point
边界点 boundary point
聚点 accumulation point
紧集 compact set
连通集 connected set
区域 region, range
场 field
数量场 scalar field
向量场 vector field
保守场 conservation field
势函数 potential function
梯度 gradient
旋度 curl
散度 divergence
算子 operator
函数行列式 functional determinant